BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président.*

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

GUILLET, *secrétaire*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

34579 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1903 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVIII. — ANNÉE 1904.

(XXXVIII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

APPELL (P.). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. Tome troisième. ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS. 1 vol. in-8°, 558 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

I. Le troisième et dernier Volume du *Traité de Mécanique* de M. Appell est le couronnement d'une œuvre magistrale qui marque une époque dans le développement des théories fondamentales de la Mécanique et dans l'enseignement de cette science. Il traite de l'équilibre et du mouvement des milieux continus; il ne le cède en rien aux deux premiers volumes sous le rapport de la précision et de la clarté dans l'exposition et l'enchaînement des théories; ce sont là des qualités auxquelles M. Appell nous a habitués depuis longtemps dans ses Ouvrages et dans son enseignement, et il est superflu d'en faire l'éloge une fois de plus. Ce livre est en même temps d'une grande richesse de renseignements et d'indications bibliographiques, et il sera lu par tous ceux qui veulent se tenir au courant des nouvelles théories relatives aux sciences appliquées.

Les matières qui font l'objet de ce troisième Volume étaient

pour la plupart éparses dans les Mémoires originaux ou dans les livres de Physique mathématique; en voyant plusieurs d'entre elles exposées exclusivement dans ces derniers ouvrages, on ne se fût pas douté qu'elles font partie intégrante de la Mécanique, et que les théories de Cauchy et de Helmholtz sur les tourbillons, les recherches de Cauchy, de Lamé et autres mathématiciens sur l'élasticité, recherches dirigées en ces derniers temps dans une nouvelle voie par MM. Cosserat, forment des Chapitres de cette Science au même titre que l'étude du mouvement des systèmes rigides.

Le livre de M. Appell vient nous le rappeler; les ingénieurs désireux d'approfondir au point de vue théorique les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des fluides, ceux qui cherchent l'explication des phénomènes remarquables qui accompagnent les déformations permanentes des corps élastiques, tous ceux qui estiment avec juste raison que les sciences appliquées ne font de sérieux progrès que si elles s'appuient sur des raisonnements rigoureux, y trouveront matière à apprendre et à penser; il leur ouvre des voies nouvelles et leur indique de nouveaux sujets de recherches. Les physiciens sauront gré également à M. Appell d'avoir réuni et coordonné les théories mécaniques dont ils ont besoin, et d'avoir indiqué les liens qui rattachent ces théories à celles de l'Électricité et du Magnétisme.

II. Les théorèmes relatifs aux intégrales définies étendues aux éléments d'une ligne, d'une surface ou d'un volume, et les transformations de ces intégrales les unes dans les autres, constituent une théorie fondamentale non seulement en Analyse, mais encore dans toutes les branches des sciences appliquées : l'attraction, la mécanique des fluides, l'Électrodynamique, etc. M. Appell réunit en un Chapitre, au début de son Ouvrage (Chap. XXVIII), les éléments de cette théorie, et les présente en employant la terminologie usitée en Mécanique. Toute portion de l'espace dans laquelle on donne trois fonctions P, Q, R des coordonnées x, y, z constitue un champ de vecteurs, chaque vecteur ayant pour origine un point du champ, et pour composantes les valeurs des trois fonctions P, Q, R en ce point; le produit d'un élément de surface par la composante normale du vecteur issu de son centre est le

flux élémentaire à travers cet élément ; enfin les fonctions

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

définissent en chaque point un nouveau vecteur qui est dit le *tourbillon* du premier.

Chaque théorème est dès lors susceptible d'une interprétation géométrique ; le théorème de Green transforme une intégrale de volume en un flux à travers la surface qui limite le champ d'intégration, et celui de Stokes transforme le travail d'un vecteur le long d'un contour fermé en un flux de tourbillon à travers une surface continue limitée à ce contour. Ces interprétations peuvent servir à justifier les appellations de *flux* et de *tourbillons* employées dans la théorie des vecteurs ; elles s'introduisent naturellement plus loin dans la dynamique des fluides.

Dans le Chapitre suivant (Chap. XXIX), M. Appell traite les questions fondamentales de la théorie de l'attraction et du potentiel ; en Analyse, elles sont la base de l'étude des fonctions harmoniques et de la solution du problème de Dirichlet ; en Mécanique céleste, elles conduisent à la détermination de la forme et du mouvement des corps célestes ; enfin, en Physique, elles sont indispensables dans l'étude de l'Électricité et du Magnétisme. Ces diverses manières d'envisager le potentiel amènent quelquefois des confusions lorsqu'on les applique à la recherche des composantes de l'attraction ; l'auteur insiste avec raison sur le signe qu'il faut donner à ces dernières, ainsi qu'aux coefficients, dans le cas de l'attraction newtonienne et dans celui des actions électriques ou magnétiques. Il donne à propos de chaque notion ou de chaque théorème son interprétation la plus simple ; les raisonnements qui se rapportent au flux de force et aux tubes de force deviennent de cette façon intuitifs si l'on compare les forces aux vitesses des molécules d'un liquide en mouvement permanent.

Les questions relatives aux masses isolées d'abord, puis aux masses réparties sur des lignes, des surfaces ou des volumes, sont présentées le plus simplement possible, et souvent par d'élégantes méthodes géométriques. Les résultats qui se rapportent aux discontinuités des dérivées premières du potentiel des surfaces, où à celles des dérivées secondes du potentiel des volumes sont net-

tement indiqués ; la rigueur absolue dans la démonstration de ces résultats ne peut être atteinte qu'après des raisonnements fort longs et fastidieux qui trouvent leur place dans les Ouvrages de Mathématiques pures plutôt que dans un Traité de Mécanique ; c'est pourquoi M. Appell préfère avec raison suivre la voie la plus directe, tout en restant absolument précis, et renvoie pour des démonstrations complètes aux Ouvrages de Riemann, de M. Picard et de M. Poincaré.

A l'étude de potentiel se rattache, dans ce Chapitre, celle des fonctions harmoniques, satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$; elles se rencontrent non seulement dans les théories de l'Attraction et de l'Électricité, mais encore dans celles de la Chaleur et de l'Hydrodynamique. M. Appell montre nettement que les propriétés de ces fonctions deviennent intuitives lorsqu'on les interprète dans l'une ou l'autre de ces théories ; il donne les indications les plus complètes sur le problème de Dirichlet, et le résout dans le cas de la sphère au moyen de la fonction de Green. Remarquons que la fonction introduite ici est celle qui reste partout finie et prend sur la surface limitant le volume donné les mêmes valeurs que $\frac{1}{r}$; elle diffère par le terme $\frac{1}{r}$ de la fonction envisagée par Riemann, par M. Poincaré et par M. Appell dans son intéressant Mémoire inséré dans les *Acta Mathematica,* Tome VIII ; celle-ci est nulle sur la surface et devient infinie comme $\frac{1}{r}$ en un point particulier ; les deux fonctions précédentes conduisent aux mêmes résultats dans les applications.

Le Chapitre se termine par le calcul du potentiel d'un ellipsoïde homogène d'après Dirichlet, et par celui du potentiel d'un cylindre indéfini, qui conduit au potentiel logarithmique.

III. L'étude des milieux continus à l'état de repos ou de mouvement constitue une science générale de l'étendue matérielle ; la géométrie élémentaire et la mécanique des systèmes rigides n'en sont que des cas particuliers. On peut diviser cette étude en plusieurs branches :

1° Une partie géométrique, où l'on considère les déformations d'un milieu qui reste continu, indépendamment du temps ;

2° Une partie cinématique, où l'on détermine les vitesses et les accélérations des éléments du milieu qui se déforme ;

3° Une partie dynamique où interviennent les forces appliquées à ces éléments ;

4° Comme cas particulier, la Statique ou l'étude de l'équilibre des forces appliquées au milieu.

La partie la plus simple est la dernière ; la précédente s'en déduit du reste en appliquant le principe de d'Alembert. M. Appell étudie d'abord (Chap. XXX) par la méthode de Cauchy les composantes de l'effort qui s'exerce par unité de surface sur un élément superficiel limitant le milieu ou placé dans son intérieur, ainsi que la variation de cet effort lorsque l'on change l'orientation de l'élément autour d'un de ses points. On peut représenter géométriquement cette variation à l'aide d'une quadrique directrice qui joue le même rôle que l'indicatrice de Dupin, ou bien à l'aide d'un ellipsoïde des efforts ou ellipsoïde d'élasticité, qui est le lieu des extrémités des vecteurs représentatifs des efforts autour d'un point. Remarquons à ce propos que le théorème de Green relatif à la transformation d'intégrales doubles en intégrales triples est couramment employé par l'auteur pour rendre les raisonnements plus simples et plus rigoureux.

Le Chapitre XXXI est consacré à l'étude de l'équilibre des fluides ; M. Appell commence par préciser la notion de viscosité, il considère ensuite les fluides pesants, et continue par la recherche des formes d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme ; il expose à ce sujet les résultats de Mac Laurin, de Jacobi et de M. Poincaré, et donne des indications sur les remarquables recherches de ce dernier relatives aux figures possibles d'équilibre et aux conditions de stabilité. Le Chapitre se termine par l'étude de l'équilibre des corps flottants, qui, due à Dupin, a été faite d'une manière à la fois élémentaire et rigoureuse par M. Guyou, et complétée par MM. Greenhill, Duhem et par l'auteur. On peut citer comme modèle de clarté et d'élégance l'exposé qu'a fait M. Appell des belles méthodes géométriques qui conduisent à la solution du problème, et du parti que M. Guyou a su tirer du principe de Dirichlet pour l'étude de la stabilité de l'équilibre.

IV. Le Chapitre XXXII renferme l'étude géométrique des déformations d'un milieu continu : MM. Cosserat l'ont considérablement perfectionnée dans ces derniers temps, et ont montré que les six fonctions caractéristiques de la déformation autour d'un point s'introduisent naturellement lorsqu'on étudie les variations du carré de l'élément linéaire ds^2. L'auteur expose ces belles théories, donne l'interprétation des six fonctions, et on en déduit l'ellipsoïde des dilatations autour d'un point ; il étudie le cas simple de la déformation homogène, dans laquelle les six fonctions caractéristiques ont la même valeur en tous les points ; il la ramène à une translation, suivie d'une rotation et d'une déformation pure, cette dernière consistant en trois dilatations dans trois directions rectangulaires ; il applique ces résultats à une déformation infiniment petite.

Dans le Chapitre XXXIII est exposée la cinématique des milieux continus, avec les deux systèmes classiques de variables qui portent les noms de Lagrange et d'Euler ; si le premier se prête avec facilité à l'établissement des équations de la Dynamique, par contre, le second est plus avantageux en Cinématique, car il permet d'appliquer simplement aux déformations du milieu les considérations du Chapitre précédent et d'appliquer à l'étude des vitesses les théories du premier Chapitre relatives aux champs de vecteurs, au flux à travers une surface et aux lignes de courant. On aperçoit immédiatement le lien qui rattache le vecteur tourbillon de vitesses, tel qu'il est défini au début de l'Ouvrage, à la rotation qui intervient dans la déformation d'un élément ; ce vecteur, qui joue un rôle essentiel, a été introduit par Cauchy sous le nom de *rotation moyenne* et étudié par Helmholtz sous le nom de *tourbillon*.

Le Chapitre se termine par un exposé des belles recherches commencées par Hugoniot et continuées par M. Hadamard sur la propagation des ondes dans le mouvement d'un milieu continu ; une onde dite d'*ordre n* est une surface fluide au passage de laquelle les dérivées d'ordre n des variables de Lagrange éprouvent des discontinuités. M. Hadamard a levé les difficultés qui se présentent lorsqu'on cherche les conditions de possibilité de la propagation d'une telle surface, et il a donné une interprétation géométrique simple des résultats qu'il a obtenus.

V. Le Chapitre XXXIV est consacré à la dynamique des fluides dont la viscosité est nulle ou, comme on dit, des fluides parfaits.

Le théorème fondamental de cette partie de la Dynamique est celui de Lagrange, relatif à l'indestructibilité des tourbillons des vitesses dans un milieu, lorsque la densité ne dépend que de la pression et que les forces données dérivent d'un potentiel. Cauchy l'a démontré en formant trois intégrales intermédiaires des équations du mouvement écrites avec les variables de Lagrange; ces intégrales contiennent en germe toutes les découvertes ultérieures, en particulier celles de Helmholtz. M. Appell donne les équations de Cauchy, celles de Weber qui ramènent le problème à l'intégration de quatre équations du premier ordre, enfin celles que Helmholtz a indiquées avec les variables d'Euler, et qui sont équivalentes à celles de Cauchy. Il montre ensuite comment les équations de l'Hydrodynamique, avec l'un ou l'autre système de variables, peuvent se mettre sous la forme des équations canoniques classiques de Lagrange; il expose, en partant des recherches de M. Hadamard, les résultats remarquablement simples obtenus par Hugoniot relativement à la vitesse de propagation des ondes planes et à la vitesse du son. Après l'étude classique du mouvement permanent des liquides et des gaz, il considère en détail le cas du mouvement irrotationnel d'un liquide; les vitesses dérivent alors d'un potentiel qui satisfait à l'équation de Laplace, et la théorie des fonctions harmoniques trouve ici de nombreuses et intéressantes applications.

Dans le Chapitre XXXV se trouve exposée la belle théorie des tourbillons, qui marque le plus grand progrès fait en Hydrodynamique depuis Cauchy, et qui est due à Helmholtz. Cauchy avait tiré de ses équations, comme nous l'avons vu, le théorème de Lagrange sur l'indestructibilité des rotations moyennes ou tourbillons dans le cas où les accélérations dérivent d'une fonction; on conçoit donc qu'il doit alors exister un invariant attaché à cette propriété; Helmholtz l'a mis en lumière sous une forme suggestive qui a le caractère à la fois simple et général des grandes découvertes. Cet invariant est la circulation le long d'une ligne fermée, c'est-à-dire le travail du vecteur vitesse le long de cette ligne; il est égal au flux du vecteur tourbillon à travers toute surface passant par la ligne, et il se conserve pendant les défor-

mations de la ligne fluide considérée. Les tubes de tourbillon possèdent dans le fluide leur individualité propre et y conservent leur intensité tout en se déplaçant et se déformant ; la recherche de leurs mouvements, ainsi que de leurs actions les uns sur les autres et sur les parties non tourbillonnaires du fluide constitue un problème très difficile qui n'a pu être résolu que dans des cas particulièrement simples. M. Appell montre clairement le rôle capital joué dans cette question par l'ordre de connexion du vase dans lequel est renfermé le fluide. Dans le cas d'un liquide indéfini, il met en lumière les liens qui rattachent la recherche des vitesses, lorsqu'on connaît les tourbillons, à la théorie du potentiel et à l'Électrodynamique : l'action d'un anneau de tourbillon sur un élément du fluide est en effet identique à celle d'un conducteur parcouru par un courant électrique sur un pôle magnétique ; cette analogie permet de simplifier l'exposition des résultats.

L'auteur nous fait connaître les beaux résultats obtenus par plusieurs mathématiciens et physiciens, en particulier par Basset, à l'aide d'une fonction particulière appelée fonction de Stokes, et il en simplifie l'exposition ; il rattache le cas d'un liquide non indéfini aux cas précédents par la méthode des images, généralisée par M. Poincaré.

Lorsque les mouvements ont lieu parallèlement à un plan fixe, les équations ne dépendent plus que de deux variables ; leur étude forme le Chapitre XXXVI. Si le mouvement est irrotationnel, la solution dépend de l'équation de Laplace à deux variables, et se rattache par conséquent à la théorie des fonctions d'une variable complexe ; s'il existe des tubes de tourbillon, elle se rattache à la théorie du potentiel logarithmique. La recherche des vitesses lorsqu'il existe des tubes tourbillonnaires rectilignes et parallèles est ramenée par l'auteur à l'intégration d'un système d'équations ayant la forme canonique de celles de Hamilton ; les résultats obtenus présentent avec les phénomènes de l'attraction des analogies frappantes, qui ont été étudiées par Lord Kelvin.

La formation et le déplacement des petites ondes parallèles dans un liquide pesant et l'étude de la houle sont exposés par l'auteur, et accompagnés d'indications bibliographiques sur ces questions qui ont été approfondies par MM. Guyou et Boussinesq en particulier.

Les considérations dans lesquelles est entré M. Appell dans ces trois Chapitres forment une introduction naturelle à la lecture des travaux qui se rattachent au mouvement d'un solide dans un fluide ; cette question, traitée d'abord par Poisson et Green, puis par Clebsch et Kirchhoff, a été le point de départ de recherches analytiques dues à Weber, Caspary, Kötter et Stekloff.

VI. Le Chapitre XXXVII est consacré à la théorie de l'élasticité; l'auteur donne des indications sur les travaux modernes de MM. Boussinesq, Brillouin, Duhem et Cosserat, et traite en détail le cas des déformations infiniment petites. Par une méthode simple et élégante, il relie entre elles la quadrique directrice étudiée au Chapitre XXX à propos de la répartition des efforts et l'ellipsoïde des déformations étudié au Chapitre XXXII ; il montre que dans un milieu homogène et isotrope ces surfaces ont mêmes plans de sections circulaires, et que les coefficients de l'une dépendent linéairement de ceux de l'autre avec deux coefficients arbitraires λ et μ ; ce sont ces coefficients ou plutôt leur rapport qui jouent un rôle capital dans la question et caractérisent le milieu.

M. Appell considère plus particulièrement l'équilibre d'un milieu élastique et discute les conditions aux limites ; le problème est ramené à l'intégration de trois équations aux dérivées partielles du second ordre ayant une forme analogue à celle de l'équation de Poisson dans la théorie du potentiel ; MM. Cosserat ont discuté les conditions pour qu'elles aient une solution unique. Après avoir donné la solution dans les cas classiques où elle peut être prévue, et donné des indications sur les cas plus généraux, l'auteur étudie les mouvements intérieurs d'un milieu élastique isotrope, la production et la propagation des mouvements vibratoires. Dans un dernier Chapitre, il montre comment le mouvement d'un fluide visqueux peut être traité par les mêmes méthodes que celui d'un milieu élastique.

On voit par ce qui précède quelle richesse de documents contient ce troisième volume, et comment M. Appell a magistralement résolu le difficile problème de réunir en un seul Volume plusieurs théories qui exigent chacune de longs développements. Il a su les relier les unes aux autres et les présenter avec la clarté et la

précision qui sont la caractéristique de tous ses Ouvrages; nous devons le remercier de nous avoir donné un Traité complet de Mécanique exposant toutes les théories modernes et donnant à ceux qui le lisent le goût des recherches personnelles.

H. Vogt.

HADAMARD (Jacques). — Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique. 1 vol. grand in-8°; XIV-375 pages. Paris, 1903.

Un publiciste écrivait naguère : « La France est un pays où chacun souhaite ardemment que le fils de son voisin aille aux colonies. » Le pays des géomètres prêterait à une observation toute semblable. Depuis bien longtemps, les recherches des mathématiciens ont surtout pour objet l'extension, la généralisation, de plus en plus vaste et compréhensive, de problèmes posés autrefois par les sciences d'application, par la Mécanique et la Physique ; ou bien l'analyse, de plus en plus sévère et minutieuse, de notions aujourd'hui bien lointaines des intuitions objectives qui les ont fournies. Beaucoup s'inquiètent à la vue de conséquences, toujours plus nombreuses, tirées d'un fonds qui ne se renouvelle pas; ils ont peur que la fécondité de ce fonds ne finisse par s'épuiser, qu'il n'engendre plus rien, sinon des formes vaines et des formules creuses. Ils pensent et ils disent que les Mathématiques auraient grand profit à venir chercher une nouvelle vitalité au sein des Sciences de la Nature, où elles ont pris naissance ; à leur demander des problèmes vraiment nouveaux qui susciteraient sans doute des théories jeunes et vigoureuses. Mais, parmi ceux qui souhaitent ce rajeunissement des Mathématiques par la Philosophie naturelle, il en est bien peu, trop peu, qui consentent à y contribuer par leurs propres travaux et à prêcher d'exemple. La plupart se laissent effrayer par le labeur qu'il est nécessaire d'accomplir pour se mettre au courant des théories physiques.

Si M. Hadamard a connu cette timidité, il a eu le courage de la vaincre. Suppléant M. Maurice Lévy, au Collège de France, dans

la chaire de Mécanique analytique et de Mécanique céleste, il a consacré les deux années scolaires 1898-1899 et 1899-1900 à un voyage d'exploration au sein des régions, bien désertes à notre époque, de la Mécanique physique. Aujourd'hui, il livre à la publicité la relation de ce voyage.

M. Hadamard n'a pas parcouru en son entier le domaine immense de l'Hydrodynamique et de l'Élasticité ; la vie d'un homme y suffirait à peine ; d'ailleurs, dans ce domaine, de vastes contrées, explorées dès longtemps, sont bien connues et la carte en est classique. Il a fouillé surtout, et nous devons lui en savoir gré, quelques provinces récemment découvertes et où peu de voyageurs, avant lui, avaient pénétré. Aussi a-t-il eu maintes fois à faire plus et mieux que d'inventorier et de classer les découvertes de ses devanciers ; maintes fois, il y joint ses propres trouvailles ; ce sont surtout ces trouvailles que nous nous proposons de signaler aux lecteurs du *Bulletin*

I.

L'étude des fonctions qui satisfont à l'équation de Laplace, des fonctions que l'on nomme aujourd'hui *fonctions harmoniques*, en vertu d'une convention que l'on aurait quelque peine à justifier, est le fondement indispensable de toute physique mathématique. L'étude de l'Électrostatique, et aussi bon nombre de questions concernant l'équilibre thermique sur un corps conducteur, conduisent aux problèmes suivants :

Trouver une fonction qui soit harmonique soit en l'espace intérieur à une surface fermée, soit en l'espace extérieur, et qui prenne sur cette surface une valeur donnée.

La solution de ces deux *problèmes de Lejeune-Dirichlet* (problème intérieur et problème extérieur) a été l'objet d'efforts innombrables de la part des géomètres les plus illustres ; ces efforts ont rendu peu à peu cette solution de plus en plus générale, de plus en plus compréhensive, en sorte que les cas où nous ne savons pas résoudre les problèmes de Lejeune-Dirichlet forment aujourd'hui des catégories très restreintes.

Le problème le plus simple que l'on puisse se poser en Hydrodynamique ressemble beaucoup au problème de Lejeune-Dirichlet ; si l'on cherche à déterminer le mouvement pris par un fluide parfait, incompressible, exempt de mouvements tourbillonnaires, au moyen des vitesses prises par les divers points de la surface qui le renferme, on voit que le *potentiel des vitesses* du fluide est une fonction φ harmonique dans tout le fluide et dont, en chaque point de la paroi, la dérivée normale $\frac{d\varphi}{dn}$ a une valeur donnée. La détermination d'une telle fonction constitue ce que M. Hadamard nomme le *problème de Carl Neumann*.

Si le fluide, d'une profondeur indéfinie, est limité par une surface cylindrique, le problème de Neumann ne dépend plus que de deux variables ; ce problème se ramène alors au problème de Lejeune-Dirichlet ; mais il n'en est plus de même lorsque trois variables sont indispensables : la méthode qui, dans le cas de deux variables, était d'un usage général, ne s'applique plus qu'à l'espace limité par une sphère ou par deux sphères concentriques ; pour de tels espaces, Gauss a résolu le problème par des développements en fonctions Y_n de Laplace, et Dini par des intégrales définies ; cette proposition curieuse est, en somme, liée à cette autre : la seule transformation conforme de l'espace est la transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est une remarque que nous avions indiquée naguère (¹), et que M. Hadamard a retrouvée dans ses *Leçons*.

Dans l'espace, et hors le cas de la sphère, le problème de M. Carl Neumann doit donc être traité directement. Et d'abord admet-il toujours une solution ? Lord Kelvin a répondu affirmativement à cette question en admettant l'existence d'un minimum pour une certaine intégrale triple, limitée inférieurement. Son raisonnement est semblable à celui que l'on emploie pour démontrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet, raisonnement que l'on attribue toujours à Riemann, bien que Riemann ait pris soin de nous avertir qu'il le tenait de Lejeune-Dirichlet. On connaît les graves critiques auxquelles ce raisonnement prête le flanc. Au

---

(¹) P. DUHEM, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, 1892, p. 69 et suivantes.

moyen d'exemples ingénieusement choisis, M. Hadamard fait éclater à tous les yeux le bien fondé de ces critiques.

Mais un important théorème nous assure que le problème de Carl Neumann admet, dans des cas extrêmement étendus, une solution et, en même temps, il nous fournit cette solution ; en effet, toutes les fois que l'on sait, pour un espace donné, résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet par la méthode de récurrence que M. Carl Neumann a nommée *méthode de la moyenne arithmétique*, on peut, de cette méthode et pour cet espace, tirer la solution du problème de M. Carl Neumann. Malheureusement, la seconde solution ne présente pas tous les avantages de la première; elle ne permet pas d'établir des inégalités analogues à celles qui justifient les *méthodes alternées*, par lesquelles la première solution est susceptible d'une si grande extension.

On sait que la solution du problème de Lejeune-Dirichlet peut se ramener à la recherche de la fonction de Green. Franz Emil Neumann avait ramené à la recherche d'une fonction analogue la solution du problème que M. Hadamard nomme problème de Carl Neumann. La fonction proposée par F.-E. Neumann ne se présente pas, au premier abord, comme douée de la réciprocité qui caractérise la fonction de Green; aussi M. F. Klein avait-il proposé l'emploi d'une autre fonction, douée de cette réciprocité ; M. Hadamard montre que cette substitution n'est point indispensable et qu'en complétant convenablement la définition de la fonction de F.-E. Neumann, on peut lui assurer une réciprocité semblable à celle dont jouit la fonction de Green.

Lors même que l'on n'excède point les bornes de cette Hydrodynamique restreinte où l'on ne traite que des fluides parfaits, incompressibles et exempts de mouvements tourbillonnaires, le problème de Neumann est loin de représenter le problème le plus général que l'on ait à résoudre. Toujours l'équation de Laplace représente l'équation indéfinie du problème, mais, le long de la surface limite, la forme de la condition imposée au potentiel des vitesses peut varier ; de là divers types de problèmes au sujet desquels nous sommes, jusqu'aujourd'hui, dans une ignorance presque complète. En sorte que l'Hydrodynamique la plus réduite, tellement simplifiée qu'elle est à peu près incapable de représenter les

phénomènes que manifestent les mouvements réels des fluides, nous met face à face avec des problèmes qui excèdent les bornes de l'analyse actuelle.

II.

Le second Chapitre de M. Hadamard est consacré à la cinématique des milieux continus et, en premier lieu, aux propriétés des déformations et des vitesses au sein de ces milieux. Regrettons, en passant, que la bibliographie, un peu sommaire et bornée aux ouvrages étrangers, laisse dans l'ombre les noms de Lagrange et de Cauchy auxquels nous devons presque tous ces théorèmes, et ne renvoie pas non plus le lecteur français au magistral exposé que MM. E. et F. Cosserat en ont donné dans les *Annales de Toulouse*.

Parmi les théorèmes cinématiques utilisés en Hydrodynamique, il en est un, dû à Clebsch, sur lequel il convient d'insister un instant. Si u, v, w sont trois fonctions de x, y, z (dans les applications, les trois composantes de la vitesse en un point de l'espace), on peut trouver trois autres fonctions F, ψ, χ telles que l'on ait

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \psi\dfrac{\partial \chi}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \psi\dfrac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \psi\dfrac{\partial \chi}{\partial z}. \end{cases}$$

Les fonctions F, ψ, χ qui figurent dans ces formules dépendent de l'intégration de certaines équations différentielles de celles qui définissent les *lignes de flux* :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Or, les lignes définies par des équations différentielles peuvent, en général, présenter des formes extrêmement compliquées ; chacune d'elles revient une infinité de fois aussi près que l'on veut de son point de départ, mais, en général, sans jamais repasser par cette position.

Cette remarque, dont la méconnaissance a conduit notamment à de fausses conclusions touchant les *lignes-tourbillons* et les *filets-tourbillons*, diminue singulièrement la valeur de la transformation de Clebsch. On voit bien, en effet, que l'on peut donner à u, v, w la forme (1), F, ψ, χ étant uniformes *dans une région suffisamment petite du milieu ;* mais il est, en général, impossible que ces fonctions restent bien déterminées dans tout le milieu. L'emploi de la transformation de Clebsch nécessitera donc les plus minutieuses précautions.

A l'étude cinématique des déformations et des vitesses succède l'étude cinématique des *ondes*.

En général, l'intégrale d'un problème d'Hydrodynamique ou d'Élasticité ne sera pas formée de fonctions continues ou analytiques dans toute l'étendue du milieu ; il arrivera que chacune de ces fonctions sera discontinue le long d'une certaine surface ; ou bien que, la fonction demeurant continue à la traversée d'une telle surface, ses dérivées partielles subiront une variation brusque ; ou bien encore que la discontinuité, sans atteindre la fonction ni ses dérivées partielles du premier ordre, frappera les dérivées partielles du second ordre ; et ainsi de suite. On peut dire que l'étude de ces *ondes de divers ordres* est la première question à examiner lorsqu'on aborde un problème d'Hydrodynamique ou d'Élasticité ; avant d'en rechercher les intégrales, il importe de délimiter les domaines au sein desquels elles sont continues et analytiques.

Cette étude fut abordée en 1877 par M. Christoffel dans d'importants Mémoires sur les petits mouvements des corps élastiques. En 1887, furent publiés des Mémoires posthumes d'Hugoniot où cet auteur, sans connaître les Mémoires de M. Christoffel, reprenait l'étude des ondes au même point de vue, établissait des théorèmes nouveaux, et en faisait de remarquables applications aux équations de l'Hydrodynamique. Cette belle méthode, imaginée par Christoffel et développée par Hugoniot, demeura longtemps inappréciée. Pendant une dizaine d'années, nous avons été, croyons-nous, seul à en faire usage, aussi bien dans l'étude de l'Hydrodynamique et de l'Élasticité que dans la théorie de la propagation des actions électriques.

M. Hadamard a entrepris d'exposer sous une forme systéma-

tique et de compléter au besoin, les propositions découvertes par M. Christoffel et par Hugoniot. Reprenant une distinction déjà marquée par M. Christoffel, il a nettement séparé les *théorèmes dynamiques*, qui varient selon que l'on a affaire à l'Hydrodynamique, à l'Élasticité, etc., des *théorèmes purement cinématiques*, qui sont, en réalité, des lemmes de théorie des fonctions, et qui deviennent vrais dans tous les domaines.

Parmi ces théorèmes cinématiques eux-mêmes, M. Hadamard fait un départ entre ce qu'il nomme les *conditions identiques* et les *conditions de compatibilité*. Les premières s'obtiennent en exprimant qu'une certaine surface S est, à un certain instant t, onde d'un certain ordre pour la fonction $U(x, y, z, t)$; les secondes, en exprimant qu'à l'instant $(t + dt)$, une surface S', infiniment voisine de la surface S, est encore onde du même ordre pour la fonction $U(x, y, z, t)$. La distinction est peut-être un peu artificielle; elle s'évanouit si l'on regarde (x, y, z, t) comme un point d'un espace à quatre dimensions.

L'exposé systématique des lemmes de Christoffel et d'Hugoniot, donné par M. Hadamard, facilite grandement l'application de ces lemmes à chaque problème particulier.

Lorsque, au travers de la surface S, la fonction U est continue tandis que ses dérivées partielles du premier ordre éprouvent des discontinuités, soumises aux lois découvertes par M. Christoffel et par Hugoniot, les dérivées partielles du second ordre sont, elles aussi, discontinues; mais leurs variations brusques ne sont pas quelconques; elles sont soumises à certaines conditions de compatibilité du *second ordre*. Les pages que M. Hadamard consacre à l'étude de ces *conditions de compatibilité d'ordre supérieur* montrent combien il est, en général, difficile de les former toutes; ajoutons que, dans les problèmes posés jusqu'ici, on n'a point eu à en faire usage.

III.

Le Chapitre consacré à la *mise en équations du problème de l'Hydrodynamique* est assez court; l'auteur se borne, en effet, à l'étude des fluides exempts de viscosité; il établit les équations

internes de leur mouvement, tirées du principe de d'Alembert, et la relation supplémentaire fournie par l'Hydrodynamique. La considération des conditions aux limites le conduit à quelques remarques, générales et fort importantes, sur la forme de la solution d'un problème d'Hydrodynamique.

Cette solution se présente d'une manière toute différente selon qu'il s'agit des fluides incompressibles ou des fluides compressibles. Pour ces derniers, les conditions imposées semblent, tout d'abord, surabondantes; les équations indéfinies, jointes aux conditions initiales, semblent déterminer complètement le mouvement du fluide, en sorte qu'il ne serait plus possible de se donner arbitrairement le mouvement de la paroi.

La considération des ondes permet seule de résoudre cette difficulté; ces surfaces séparent à chaque instant le fluide en régions qui sont animées de mouvements différents; certains de ces mouvements satisfont aux conditions initiales sans avoir à vérifier les conditions aux limites; certains autres, soumis à ces dernières conditions, sont affranchis des premières. Par là, la nécessité de la formation d'ondes de divers ordres au sein des fluides compressibles en mouvement devient évidente.

IV.

Le Chapitre consacé au *mouvement rectiligne des gaz* est un des plus considérables et des plus importants. Par mouvement rectiligne, M. Hadamard entend ce que l'on appelle souvent *mouvement par tranches*; chaque élément fluide se meut parallèlement à une direction fixe, qui est la même pour tous les éléments; tous les éléments d'un plan perpendiculaire à cette direction ont même mouvement. Les fonctions inconnues ne dépendent plus que de deux variables : le temps t et une coordonnée x.

Ce problème est le seul où l'on puisse, dans des cas étendus, pousser jusqu'au bout l'intégration des équations du mouvement et étudier en détail les particularités des solutions obtenues.

L'étude du mouvement rectiligne des gaz, achevée depuis d'Alembert lorsque les déplacements de chaque élément sont fort petits, a été faite, dans le cas général, par Riemann; sans con-

naître le travail de Riemann, Hugoniot, dans deux Mémoires justement célèbres, en a retrouvé les résultats, qu'il a rectifiés en un point essentiel. Ce sont les recherches de Riemann et d'Hugoniot que M. Hadamard s'est proposé de présenter en les accompagnant d'une discussion originale et approfondie.

La détermination du mouvement pris par un gaz que contient un cylindre immobile et que presse un piston animé d'un mouvement donné est relativement aisée lorsque les fonctions à déterminer : pression, densité, vitesse, sont fonctions continues de x et de t. Une méthode, imaginée à cette occasion par Riemann, et étendue par M. Darboux à toutes les équations dites *de Laplace*, permet de résoudre le problème de Cauchy pour les caractéristiques de l'équation hydrodynamique ; les diverses particularités du mouvement peuvent alors être mises en évidence ; la propagation des ondes, en particulier, donne lieu à des remarques qui concordent pleinement avec celles que fournirait la méthode de Christoffel-Hugoniot.

Mais le cas qui vient d'être traité ne suffit nullement, malgré son apparente généralité, à embrasser toutes les formes intéressantes du problème ; il est des circonstances où la vitesse, la pression, la densité ne peuvent être continues dans toute la masse du gaz ; ces circonstances se présentent lorsque le piston reçoit, à un certain instant, un choc qui en fait varier brusquement la vitesse ; elles se présentent encore si la marche du piston s'accélère tellement qu'elle arrive à être plus rapide que la propagation du son ; et ce dernier cas est particulièrement intéressant à analyser, car il peut donner une première idée des phénomènes qui se produisent dans l'air, à l'avant d'un projectile d'artillerie.

Aussi Riemann avait déjà examiné le cas où une onde de discontinuité pour les trois fonctions à déterminer se propage au travers du gaz. Mais il avait admis que l'on pouvait écrire, dans toute la masse du gaz privé de conductibilité, l'équation de Poisson

$$P = K\rho^{\frac{C}{c}},$$

P étant la pression, ρ la densité, C et c les deux chaleurs spécifiques du gaz, et K une quantité qui a la même valeur en toute la masse fluide.

Or cette hypothèse n'était point exacte. La quantité K, constante dans la masse que n'a pas atteinte la surface de discontinuité, n'a pas, en l'autre masse, une valeur constante ; au passage de l'onde de discontinuité, elle subit une variation brusque ; cette variation dépend d'une condition essentielle, établie par Hugoniot et connue sous le nom de *loi de détente adiabatique dynamique*.

Même lorsqu'on admet l'hypothèse erronée de Riemann, la détermination complète du mouvement rectiligne d'un gaz que balaye une surface de discontinuité donne lieu à des difficultés incomparablement plus grandes que celles dont dépend la solution du problème lorsque les fonctions inconnues sont continues dans toute la masse fluide. Ces difficultés croissent extraordinairement lorsqu'on adopte, ainsi que la saine physique l'exige, la loi de détente adiabatique dynamique posée par Hugoniot. Pour simplifier autant que possible sa tâche, M. Hadamard s'en tient presque toujours à la supposition de Riemann, au risque d'atténuer l'intérêt que ses calculs présenteront pour le physicien ; et cependant, malgré ce sacrifice consenti en vue de rendre le problème plus facile, malgré une analyse où il met en jeu tous les moyens d'attaque que fournit l'arsenal actuel de l'Algèbre, il est réduit à présenter des amorces de solutions plutôt que des solutions.

V.

Les obstacles, difficiles à franchir, et parfois insurmontés jusqu'ici, auxquels on se heurte lorsque l'on étudie les mouvements si particuliers des fluides compressibles que nous avons nommés mouvements rectilignes, suffiraient pour annoncer au moins clairvoyant que le problème général des *mouvements dans l'espace* sera à peu près inabordable. Aussi M. Hadamard ne consacre-t-il à ce problème qu'un Chapitre fort court, que complètent (à la fin du Volume) deux Notes importantes.

L'étude des ondes, dans ce cas général, a déjà été faite par Hugoniot ; M. Hadamard y joint un résultat bien remarquable.

La théorie de Christoffel et d'Hugoniot montre que les équations de l'Hydrodynamique sont, dans tous les fluides, compatibles

avec l'existence d'ondes *stationnaires*, séparant constamment les deux mêmes masses fluides; ces ondes peuvent être, pour les composantes de la vitesse, des surfaces de discontinuité; le long d'une telle surface, les deux masses fluides contiguës glissent l'une sur l'autre. Helmholtz a attiré, le premier, l'attention sur cette sorte de mouvements; il en a introduit la considération dans diverses questions d'Hydrodynamique et, en particulier, dans l'étude des mouvements de l'atmosphère terrestre.

M. Hadamard ne s'inscrit pas en faux contre la théorie de Christoffel et d'Hugoniot selon laquelle l'existence *actuelle* d'une telle surface de glissement ne présente aucune impossibilité; mais il prouve que si une masse fluide, à un instant donné de son mouvement, ne présente aucune telle surface de glissement, elle n'en présentera jamais par la suite; en sorte que la naissance d'une telle surface est un phénomène incompréhensible.

Remarquons toutefois que cette démonstration suppose non seulement la continuité de la pression au travers d'une telle surface, mais encore la continuité de la densité; la première condition est assurément toujours remplie, mais il peut n'en pas être de même de la seconde; elle sera violée, par exemple, si le fluide ne conduit pas la chaleur et si la surface de glissement est, pour la température, une surface de discontinuité; c'est ce que suppose la théorie des mouvements atmosphériques proposée par Helmholtz; cette théorie n'est donc pas atteinte par la remarque de M. Hadamard.

Une autre observation, que sa nouveauté nous engage à relater ici, concerne l'influence des ondes sur les mouvements tourbillonnaires; les ondes au travers desquelles les vitesses demeurent continues ne créent ni ne détruisent de mouvements tourbillonnaires; elles ne mettent point en défaut le théorème de Lagrange. Il n'en est plus de même d'une onde au travers de laquelle la vitesse subit un saut brusque, même si l'on admet l'hypothèse de Riemann. Moyennant cette hypothèse, on peut déterminer complètement l'effet que le passage de la discontinuité exerce sur le mouvement tourbillonnaire. Dans l'hypothèse d'Hugoniot, seule admissible pour le physicien, la question perd de son intérêt, car la conservation du mouvement tourbillonnaire n'a plus lieu en amont de l'onde.

VI.

Les équations de l'équilibre et du mouvement d'un corps élastique affecté de déformations finies sont connues depuis les travaux de M. J. Boussinesq ; mais de ces équations compliquées il n'est point aisé de faire usage ; aussi le Chapitre intitulé : *Application à la théorie de l'Élasticité,* est-il forcément restreint à un petit nombre de problèmes.

L'étude de la stabilité de l'équilibre élastique présente de très grandes difficultés ; par une extension de propriétés qui sont justifiées pour des systèmes dépendant d'un nombre limité de paramètres, M. Hadamard admet qu'il est nécessaire, pour cette stabilité, que le potentiel interne du milieu soit minimum, les divers élements du milieu étant soustraits à l'action de toute force, et la surface étant maintenue immobile.

La variation seconde de ce potentiel interne doit être positive. Cette variation seconde se présente sous forme d'une intégrale triple. Chaque élément de cette intégrale est la somme d'une fonction linéaire des variations secondes des six déformations et d'une forme quadratique des variations premières des six mêmes quantités. Ces six déformations ne sont pas arbitrairement variables ; elles sont liées par des conditions d'une extraordinaire complication ; il est donc extrêmement difficile d'exprimer que la variation seconde du potentiel interne est toujours positive. Néanmoins, M. Hadamard est parvenu à établir une certaine condition qui est nécessaire pour que cette variation seconde soit positive ; et cette condition est précieuse ; elle entraîne en effet la réalité des trois vitesses de propagation relatives à une onde donnée, vitesses dont nous allons dire un mot.

Considérons un milieu affecté de déformations finies ; x, y, z sont les coordonnées d'un point de ce milieu dans l'état où il se trouve à l'instant t ; u, v, w sont les composantes de la vitesse de ce même point.

Une surface S, tracée dans l'espace des x, y, z, y joue le rôle d'onde ; la vitesse est supposée continue à la traversée de cette surface ; mais ses dérivées partielles sont discontinues ; si α, β, γ

sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S, les sauts brusques éprouvés par les trois dérivées par rapport à x, y, z de la composante u sont respectivement $\alpha\mathfrak{U}$, $\beta\mathfrak{U}$, $\gamma\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ étant une quantité qui varie d'une manière continue le long de la surface S. Des propositions analogues s'appliquent à v et w, à condition de remplacer la grandeur $\mathfrak{U}$ par des grandeurs analogues $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$. Lorsqu'on se donne l'état de déformation du milieu au point (x, y, z) et les cosinus α, β, γ, qui déterminent la direction de l'onde passant en ce point, on connaît l'orientation du vecteur $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$; ou plutôt ce vecteur n'est plus susceptible que de trois orientations distinctes qui sont rectangulaires entre elles.

Les déformations du milieu étudié sont rapportées à un certain état initial où a, b, c sont les coordonnées du point matériel qui, dans l'état déformé, occupe la position (x, y, z); les trois élongations $\xi = x - a$, $\eta = y - b$, $\zeta = z - c$ sont des fonctions de a, b, c et de t; à la surface S, variable avec t et tracée dans l'espace des x, y, z, correspond une surface Σ, variable aussi avec t, et tracée dans l'espace des a, b, c; la surface Σ est une onde pour des fonctions $\xi(a, b, c, t)$, $\eta(a, b, c, t)$, $\zeta(a, b, c, t)$; ces fonctions et leurs dérivées premières sont continues au travers de la surface Σ, mais leurs dérivées secondes éprouvent des sauts brusques qui s'expriment au moyen d'un certain vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Si l'on considère un point M de l'onde S et le point correspondant μ de l'onde Σ, le vecteur $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ en M et le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ en μ sont parallèles entre eux. Si donc on connaît l'état de déformation du milieu en M, ou en μ, à l'orientation de l'onde Σ en ce point, on connaît trois directions du vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ [1].

Ces trois directions rectangulaires sont les directions d'axes d'une certaine surface du second degré; l'onde Σ, qui correspond à un certain vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, a, *dans l'espace des* (a, b, c),

---

[1] Nous nous sommes permis de rectifier ici une légère inadvertance échappée à M. Hadamard; M. Hadamard, qui n'a pas donné le premier théorème, a énoncé le second en prenant pour variables les x, y, z au lieu des a, b, c, ce qui ne laisse point subsister sa valeur. Nous avons communiqué les énoncés précédents, ainsi que plusieurs autres, le 8 juin 1903, à l'Académie des Sciences.

une vitesse de propagation inverse de celui des demi-axes de la quadrique qui marque l'orientation du vecteur ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$).

Pour qu'à une déformation donnée et à une orientation d'onde donnée correspondent trois vitesses de propagation réelles, il faut et il suffit que cette quadrique soit un ellipsoïde réel ; or la condition de stabilité établie par M. Hadamard prouve qu'il en est bien ainsi.

M. Hadamard donne à cet ellipsoïde le nom d'*ellipsoïde de polarisation ;* cette dénomination pourrait éveiller l'idée d'une analogie avec l'ellipsoïde de polarisation employé en Optique ; cette idée serait erronée. Pour un milieu donné, l'ellipsoïde de polarisation optique ne change pas avec la direction de l'onde qui se propage dans le milieu ; au contraire l'ellipsoïde considéré par M. Hadamard dépend de la direction de l'onde ; à chaque direction d'onde correspond un ellipsoïde différent.

On voit que la puissante méthode de Christoffel et d'Hugoniot a permis à M. Hadamard d'étendre aux milieux affectés de déformations quelconques les lois que Green et Poisson avaient établies simultanément (¹) pour les milieux infiniment peu déformés.

VII.

Le septième et dernier Chapitre du Livre de M. Hadamard est intitulé : *La théorie générale des caractéristiques ;* c'est un de ceux qui attireront au plus haut degré l'attention des algébristes. L'auteur se propose d'y développer, suivant les idées de Beudon, l'extension de la notion de caractéristiques aux problèmes qui dépendent de plus de deux variables indépendantes. Il insiste, en particulier, sur les propriétés si remarquables des *bicaractéristiques.* Cette branche de l'analyse est, à l'heure actuelle, en pleine évolution ; entre le moment où ont été professées les leçons de M. Hadamard et celui où elles ont été publiées, divers travaux sont venus s'adjoindre à celui de Beudon. Citons, en particulier, la belle thèse où M. Coulon a si bien montré les relations qui existent entre la notion générale de caractéristique et les

(¹) *Voir* ce *Bulletin*, 2e série, t. XXVII, septembre 1903, p. 253.

diverses formes données au principe d'Huygens, par Kirchoff, par M. Volterra, par M. Tedone. M. Hadamard a dû se borner à une courte allusion à ces recherches. Les pages, si pleines d'idées neuves, qu'il consacre à ce dernier Chapitre ne comportent guère d'être résumées.

Il nous paraît qu'une impression d'ensemble se dégage du Livre que nous venons de parcourir.

L'étude du mouvement des fluides et des corps élastiques est une des branches les moins complexes de la Physique et, en cette partie de la Science, M. Hadamard a choisi seulement les problèmes les plus simples, puisqu'il a constamment fait abstraction de la viscosité et de la propagation de la chaleur par conductibilité. Cependant, ces problèmes, simplifiés à l'excès, se tiennent encore, presque toujours, au delà des limites en deçà desquelles nos méthodes analytiques sont valables ; à peine entrevoit-on quelques régions où le contact ne soit pas très loin de s'établir entre les problèmes les plus simples de la Mécanique physique et les procédés les plus savants de l'Algèbre.

Cette insuffisance des Mathématiques à aborder la solution des questions posées par la Physique théorique ne peut être révoquée en doute. Doit-elle pousser les géomètres à désespérer ? Non pas. Ils doivent bien plutôt, ce me semble, la regarder comme un sûr indice que leur science n'est point achevée, qu'il reste une infinité de méthodes nouvelles à créer, d'immenses espaces à conquérir. Mais il me paraît aussi qu'ils n'ont point chance de contribuer à ces progrès tant souhaités, s'ils n'imitent résolument M. Hadamard ; s'ils ne s'arrachent à la contemplation des problèmes créés par leur seule raison pour s'acharner aux énigmes que la nature leur pose. P. Duhem.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE DE NOMBRES RATIONNELS RÉDUCTIBLES AUX NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Dans une Note récente insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CXXXVII, p. 840), M. Fejer a été amené à une classe de nombres rationnels C_n qui peuvent être définis au moyen de la fonction génératrice

$$\frac{1}{1+e^x} = C_0 + \frac{C_1}{1!}x + \frac{C_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{C_n}{n!}x^n + \ldots.$$

L'auteur donne les valeurs suivantes de quelques-uns de ces nombres

$$C_0 = \frac{1}{2}, \qquad C_{2p} = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_3 = \frac{1}{8}, \quad C_5 = -\frac{1}{4}, \quad C_7 = \frac{17}{16}, \quad C_9 = -\frac{31}{4}, \quad C_{11} = \frac{691}{8}, \quad \ldots,$$

et remarque qu'ils ne sont pas sans analogie avec les nombres de Bernoulli. Or, ils se ramènent immédiatement à ceux-ci. Du développement

$$\frac{1}{1-e^x} = \sum \frac{C_n}{n!}x^n$$

on déduit, en effet,

$$\frac{2x}{1+e^x} = \sum \frac{2(n+1)C_n}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ce qui montre, si l'on se reporte à une équation symbolique donnée par Ed. Lucas [1], que l'on a

$$2(n+1)C_n = G_{n+1}.$$

---

[1] *Théorie des nombres*, p. 262.

G_{n+1} étant un *nombre de Genocchi*. Mais, d'autre part (¹),

$$G_{n+1} = 2(1 - 2^{n+1})B_{n+1},$$

B_{n+1} étant un *nombre de Bernoulli*. Donc

$$C_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{n+1} B_{n+1}.$$

Telle est la formule qui ramène les nombres C_n de M. Fejer aux nombres de Bernoulli.

Ce résultat appelle toutefois une remarque importante. Le nombre B_{n+1} est supposé pris ici dans le système de notation d'Édouard Lucas (²), qui résulte de la considération de la fonction génératrice

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{B_n}{n!}x^n + \ldots,$$

et conduit, pour le calcul par voie récurrente des nombres B, à l'égalité symbolique

$$(B+1)^n - B^n = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

dans le premier membre de laquelle, après développement, les exposants doivent être remplacés par des indices d'ordre.

Or, il est essentiel de préciser, pour les nombres de Bernoulli, le système de notation employé, celui-ci variant d'un auteur à l'autre. Nous avons, pour notre part, relevé jusqu'à six systèmes différents dont la correspondance résulte du Tableau ci-dessous :

Valeurs.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1	B_0	B_0	»	»	»	»
$-\frac{1}{2}$	B_1	$-B_1$	»	»	»	»
$\frac{1}{6}$	B_2	B_2	B_2	B_1	B_1	B_1
0	B_3	B_3	»	»	»	»
$-\frac{1}{30}$	B_4	B_4	$-B_4$	B_3	$-B_3$	$-B_2$

(¹) *Ibid.*, p. 250.
(²) *Ibid.*, p. 239.

Valeurs.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	B_5	B_5	»	»	»	»
$\frac{1}{42}$	B_6	B_6	B_6	B_5	B_5	B_3
0	B_7	B_7	»	»	»	»
$-\frac{1}{30}$	B_8	B_8	$-B_8$	B_7	$-B_7$	$-B_4$
0	B_9	B_9	»	»	»	»
$\frac{5}{66}$	B_{10}	B_{10}	B_{10}	B_9	B_9	B_5
0	B_{11}	B_{11}	»	»	»	»
$-\frac{691}{2730}$ ..	B_{12}	B_{12}	$-B_{12}$	B_{11}	$-B_{11}$	$-B_6$
....	...	...	.....	...	.....	....

Le système le plus répandu, et qu'on peut dire classique, est celui qui est indiqué par la colonne VI. On le rencontre chez Hermite (*Journal de Crelle*, t. 116, p. 140), Joseph Bertrand (*Calcul différentiel*, p. 306), Serret (*Traité de Trigonométrie*, 5e édition, p. 260), M. Tannery (*Introduction à la théorie des fonctions*, p. 192). A lui également se réfère le Tableau des nombres de Bernoulli calculé par Adams (*Journal de Crelle*, t. 85, p. 269), le plus développé sans doute qui existe, puisqu'il va jusqu'à B_{62} du système VI.

Le système V se rencontre chez Duhamel (*Éléments de Calcul infinitésimal*, 3e édition, t. II, p. 427), Hagen (*Synopsis der höheren Mathematik*, t. I, p. 91); le système IV chez Lacroix (*Calcul intégral*, t. III, p. 84) et dans les nombreuses Notes consacrées par Catalan aux nombres de Bernoulli.

Le système III, employé par M. Laurent (*Traité d'Analyse*, t. III, p. 325), diffère de celui de Lucas en ce qu'il s'applique simplement aux valeurs absolues des nombres considérés.

Enfin le système II, qui est celui de M. Cesaro (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. V, p. 305) [1], ne diffère

[1] C'est de ce système V que nous nous sommes précédemment servi dans diverses Notes (*American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 363 et suivantes; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVII, p. 107), où nous donnons, entre autres, une expression fort simple de B_n au moyen de nos nombres K_n^p, savoir

$$B_n = \frac{K_n^1}{2} - \frac{1!\,K_n^2}{3} + \frac{2!\,K_n^3}{4} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,K_n^n}{n+1}.$$

de celui de Lucas que par la valeur de B_1 égale à $\frac{1}{2}$ au lieu de $-\frac{1}{2}$. Il peut être défini par la fonction génératrice $\frac{xe^x}{e^x-1}$ ou l'égalité symbolique

$$(B-1)^n - B^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

La correspondance entre les six systèmes ci-dessus peut s'établir comme suit

$$\begin{aligned}[B_n]_{\rm I} &= (-1)^n \quad [B_n]_{\rm II} = (-1)^{n-1}[B_n]_{\rm III}\\ &= [B_{n-1}]_{\rm IV} = (-1)^{n-1}[B_{n-1}]_{\rm V} = (-1)^{n-1}\left[\frac{B_n}{2}\right]_{\rm VI}.\end{aligned}$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

SCHOUTEN (G.). — *Inleiding tot de studie der eliptische functiën,* van Weierstrass. Gr. in-8° et 152 p. Delft, Waltman jr. 3 fl. 90 c.

STÜEBLER (EUG.). — *Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt.* (Thèse.) Gr. in-8°, 35 p. avec 2 planches. Stuttgart, Enderlen. 1 m.

BELTRAMI (EUG.). — *Opere matematiche.* T. I. In-4°. Milano, Hoepli. 25 l.

BOLZA (O.). — *Concerning the geodesic curvature and the isoperimetric problem on a given surface and proof of the sufficiency of Jacobi's condition for a permanent sign of the second variation in the so called isoperimetric problems.* In-4°. Chicago. 1 m. 20 pf.

CATALOG *mathematischer Modelle f. den höheren mathematischen Unterricht.* 6e édit. Gr. in-8°, XIII-130 p. avec 83 fig. Halle, Schilling. 1 m.; relié 1 m. 50 pf.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — Traité de Mécanique rationnelle. 2e édition. Tomes I et II.

La deuxième édition des Tomes I et II du *Traité de Mécanique,* de M. Appell, n'est pas une simple réimpression de la première ; elle contient de notables additions qui augmentent l'intérêt de cette œuvre magistrale, font connaître les théories modernes relatives à l'étude des systèmes, et mettent le lecteur au courant des importants travaux personnels de l'auteur. Toutes ces additions sont faites dans l'esprit général de l'œuvre primitive, avec le même souci de la rigueur et de la clarté, la même précision dans les détails qui font du Traité de M. Appell le meilleur Ouvrage didactique de notre époque pour la Mécanique.

Il a été rendu compte de la première édition du Tome I dans ce *Bulletin* (2e série, t. XVIII, 1894, p. 69); aussi nous ne mentionnerons ici que les principaux changements qui ont été apportés à ce Tome dans la seconde édition.

En Cinématique, l'auteur donne les formules générales fournissant la vitesse et l'accélération d'un point en mouvement par rapport à un système d'axes mobiles. Dans l'exposé des fondements de la Mécanique, il adopte les idées émises par M. Blondlot et énonce les principes suivants :

Un point unique ne prend aucune accélération ; deux points en présence l'un de l'autre prennent des accélérations dirigées suivant la droite qui les joint et de sens opposés ; ces accélérations sont inversement proportionnelles à des nombres constants qui sont les masses ; en ajoutant à ces principes celui de la composition géométrique des accélérations, et en définissant la force comme le produit de la masse par l'accélération, on peut fonder toute la Mécanique.

Les conditions d'équilibre d'un système quelconque, solide ou non, sont simplifiées ; l'élimination des forces intérieures conduit à six conditions nécessaires qui doivent être remplies par les

forces extérieures, et ces conditions sont suffisantes dans le cas d'un corps solide. Dans l'application du principe des vitesses virtuelles aux conditions d'équilibre des systèmes à liaisons, l'auteur, adoptant la terminologie de Hertz, distingue ces systèmes en deux classes ; pour les premiers, dits *holonomes,* les liaisons s'expriment par des équations en termes finis entre les coordonnées ; pour les seconds, qui ne sont pas holonomes, par exemple pour un cerceau roulant sans glisser sur un plan, les liaisons s'expriment par des relations entre les déplacements virtuels infiniment petits, mais ces relations ne sont pas les différentielles d'équations en termes finis entre les coordonnées. Cette distinction est capitale dans l'établissement des équations de Lagrange en Dynamique.

Un paragraphe nouveau est consacré à l'étude des conditions d'équilibre d'un système dans lequel certaines liaisons sont unilatérales ; par exemple, lorsqu'un point peut se mouvoir sur une surface ou d'un seul côté de cette surface, ou lorsque deux points sont reliés par un fil flexible mais inextensible.

En Dynamique se trouvent de nouveaux développements sur le mouvement des planètes et la gravitation universelle ; de plus, la dynamique analytique du point, qui faisait primitivement partie du second Volume, est incorporée dans le premier. Dans le Chapitre qui lui est consacré, les équations d'Hamilton et le théorème fondamental de Jacobi sont suivis des propriétés géométriques des trajectoires, ainsi que d'applications au mouvement des planètes, aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde, aux brachistochrones et aux figures d'équilibre des fils ; les liens qui rattachent ces dernières questions à celle du mouvement d'un point sont nettement mis en évidence.

Nous insisterons un peu plus sur le Tome II, consacré à la Dynamique des systèmes et à la Mécanique analytique ; il débute (Chap. XVII) par l'étude des moments d'inertie, traitée avec tous les développements qu'elle comporte ; vient ensuite (Chap. XVIII) l'exposé des théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes.

M. Appell insiste en particulier sur le théorème des moments des quantités de mouvement et sur les applications de ce théorème à l'étude du mouvement d'un système déformable ; un tel système,

sans l'aide d'aucune force extérieure, peut effectuer une rotation et passer d'une position à une autre dont la forme est identique à la première. Cette remarque a fait l'objet en 1894 de plusieurs Mémoires intéressants, particulièrement de l'auteur, et présente des applications aux mouvements des êtres vivants.

Après la démonstration du théorème des forces vives, et l'étude du cas où le travail des forces intérieures est nul, vient la théorie de l'énergie; en quelques pages d'une clarté remarquable, l'auteur définit les systèmes conservatifs, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, et il montre que l'énergie totale se conserve tant qu'il n'existe aucune force extérieure; plusieurs exemples tirés du pendule, de la lame élastique, etc. font comprendre l'importance de cette proposition qui a servi de point de départ à plusieurs physiciens pour édifier la Mécanique.

Dans le Chapitre XIX se trouve l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, avec la théorie classique du pendule composé, puis l'étude du mouvement parallèle à un plan fixe, avec de nombreux exemples, enfin celle du frottement; M. Appell indique nettement la nature des trois frottements de glissement, de roulement et de pivotement, expose les lois empiriques admises jusqu'ici dans l'étude du premier, et les divers genres de discontinuité possibles qu'il produit dans les équations du mouvement. Il insiste, dans la deuxième édition plus encore que dans la première, sur les difficultés inhérentes à ces questions, et sur les contradictions, mentionnées par M. Painlevé, auxquelles conduit l'application des règles admises actuellement ; ces règles sont donc insuffisantes pour rendre compte de toutes les particularités du mouvement.

L'auteur consacre le Chapitre XX à l'étude de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe ; cette étude, qui a donné lieu à d'importants travaux, est une de celles qui ont le plus contribué à faire avancer l'Analyse ; aussi n'est-il pas superflu de la traiter en détail. Aux développements classiques sur les équations d'Euler, M. Appell a ajouté dans l'édition actuelle la définition des trois paramètres d'Olinde Rodrigues au moyen desquels les neuf cosinus s'expriment rationnellement, puis les équations relatives au cas où le trièdre de référence est mobile dans le corps et dans l'espace. Il discute entièrement le cas de Poinsot, en

donne la solution à l'aide des fonctions elliptiques, et expose d'une façon magistrale la belle représentation géométrique du mouvement qui a été faite par Poinsot ; il indique ensuite les principes qui ont servi à MM. Darboux et Königs pour réaliser le mouvement, avec la loi des vitesses, à l'aide de leur ingénieux appareil l'herpolhodographe.

L'auteur passe de là à l'étude du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, d'abord dans le cas de Lagrange et Poisson, puis dans celui de Mme Kowaleski, et il indique les résultats complémentaires énoncés par M. Roger Liouville. Il insiste ensuite, notamment dans la seconde édition, sur les propriétés en apparence paradoxales que présentent les corps de révolution animés d'un mouvement de rotation rapide autour de leur axe et suspendus par un point de cet axe ; pour déplacer celui-ci, il faut exercer un effort considérable, et le mouvement de l'axe a lieu dans une direction perpendiculaire à celle de l'effort. Cette propriété, et d'autres intéressantes, ont été mises en lumière par Gruey dans sa théorie des gyroscopes.

Le Chapitre XXI comprend l'étude du mouvement d'un corps solide libre, puis celle du mouvement d'un corps reposant sur un plan, en insistant sur le cas d'un corps pesant de révolution qui glisse sans frottement sur un plan horizontal; mentionnons en particulier les élégants résultats obtenus par M. Appell et par M. Korteweg dans l'étude du cerceau qui roule sans glisser sur le plan horizontal; en se servant d'axes de référence mobiles dans le corps, ils expriment la solution à l'aide de fonctions hypergéométriques et de quadratures. Le Chapitre suivant est consacré aux mouvements relatifs, avec applications à la théorie de la bicyclette, qui a fait l'objet d'intéressants travaux de M. Bourlet, puis à l'équilibre et au mouvement relatifs à la surface de la Terre, au pendule et au gyroscope de Foucault.

Les Chapitres XXIII, XXIV et XXV sont consacrés à la Dynamique analytique qui, par ses liens avec l'analyse, est devenue une partie importante de la Mécanique.

Le principe de d'Alembert, exposé en premier lieu, fournit les équations générales du mouvement d'un système, soumis ou non à des liaisons ; lorsque les liaisons sont sans frottement, le théorème des travaux virtuels permet de réduire ces équations au

nombre minimum, et de les écrire sous une forme qui convient à tous les cas. Mais lorsqu'on veut les transformer en d'autres équations plus simples et mieux appropriées au calcul, il est nécessaire de faire une distinction entre les systèmes holonomes et ceux qui ne le sont pas ; c'est ce que M. Appell montre de la manière la plus nette dans la seconde édition de son *Traité*.

Si le système est holonome, les équations se mettent sous la forme de Lagrange, et il suffit, pour écrire leurs premiers membres, de connaître l'expression de l'énergie cinétique T du système en fonction du temps t, des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_k$ du système et de leurs dérivées par rapport à t. L'auteur établit ces équations, examine le cas où il y a une fonction des forces, en déduit le théorème des forces vives, et donne de nombreux exemples ; il applique ces équations à l'étude de la stabilité de l'équilibre, à celle des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable, ou d'un mouvement stable, puis à celle des mouvements relatifs, en indiquant la méthode mixte de Gilbert ; enfin à celle des mouvements relatifs à la surface de la Terre.

Lorsque le système n'est pas holonome, les équations de Lagrange ne s'appliquent plus ; bien plus, la connaissance de l'énergie cinétique, jointe à celle des travaux virtuels des forces données, ne suffit plus pour caractériser le mouvement du système, comme le montre nettement l'auteur daus un exemple.

M. Appell a eu le grand mérite d'établir des équations simples et générales, analogues aux équations de Lagrange, et s'appliquant au mouvement de tous les systèmes holonomes ou non ; la méthode qui l'a conduit à ces équations constitue l'un des plus grands progrès qui aient été faits dans ces derniers temps en Mécanique analytique. A la place de l'énergie cinétique T, l'auteur introduit l'énergie d'accélération

$$S = \frac{1}{2}\sum m\,J^2 = \sum \frac{1}{2}\,m(x''^2 + y''^2 + z''^2);$$

il suffit d'exprimer S au moyen des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_k$ du système et de leurs dérivées, puis de remplacer les premiers membres des équations de Lagrange par les dérivées de S par rapport à $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$, pour avoir les équations du mouvement.

Les corps, comme la sphère et le cerceau, qui peuvent être assujettis à rouler et à pivoter sans glissement sur un plan, constituent des systèmes non holonomes. M. Appell insiste sur les applications de ses équations à ces systèmes et à d'autres semblables ; il montre nettement pourquoi les équations de Lagrange ne s'appliquent plus, et il recherche dans quels cas il serait encore possible de les appliquer à une ou plusieurs des coordonnées du système.

L'auteur donne ensuite la transformation de Poisson et d'Hamilton qui ramène à une forme canonique les équations du mouvement d'un système holonome lorsque les forces dérivent d'une fonction ; il expose le théorème de Jacobi qui ramène l'intégration de ces équations à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles, puis la théorie des parenthèses de Poisson, et l'usage que l'on peut en faire dans la recherche d'intégrales nouvelles.

A la suite de ces questions sont exposées les théories qui rattachent les équations de la Dynamique aux problèmes d'Analyse et au calcul des variations ; nous citerons en particulier le principe d'Hamilton et celui, moins général, de la moindre action, qui rattachent la recherche du mouvement et celle des trajectoires au problème des géodésiques dans un espace où ds^2 est une forme quadratique donnée des différentielles des coordonnées ; puis la théorie du multiplicateur de Jacobi, perfectionnée par M. Königs. M. Appell montre d'une manière saisissante comment l'application de cette belle théorie aux équations canoniques permet de prévoir les simplifications qu'apporte à la solution d'un problème la connaissance d'une ou de plusieurs intégrales, et de dire combien il faut connaître d'intégrales pour que le problème soit ramené aux quadratures.

Vient ensuite l'exposé de la théorie des invariants intégraux qui a été entre les mains de M. Poincaré d'un puissant secours en Mécanique céleste ; enfin, un paragraphe nouveau introduit dans la seconde édition est consacré au principe de la moindre contrainte de Gauss ; ce principe, qui s'applique à tous les systèmes, holonomes ou non, ramène la recherche des équations du mouvement d'un système à celle du minimum d'une fonction du second degré ; si l'on adopte ce point de départ, on est conduit par une

deuxième voie à la forme générale des équations de la Dynamique résultant de l'emploi de l'énergie d'accélération.

Dans le Chapitre XXVI, M. Appell expose la théorie des chocs et des percussions, qui peut être fondée sur un principe analogue à celui de d'Alembert ; il discute et classe les divers genres de liaisons et, dans le cas où celles-ci sont sans frottement, démontre le théorème de Carnot sur la force vive perdue ; il le fait suivre du théorème de Robin d'après lequel les vitesses finales sont celles qui rendent minimum une certaine fonction, cette fonction étant égale, à une constante près, à la force vive perdue. Il termine enfin par l'application des équations de Lagrange aux chocs et aux percussions ; dans ses recherches personnelles exposées ici, l'auteur a donné des équations permettant de résoudre les problèmes de percussions d'une manière simple et élégante, sans introduire de liaisons de percussions, et cela dans tous les cas, que le système soit holonome ou non.

Dans un dernier Chapitre, M. Appell donne des notions sur les machines, applique le théorème des forces vives à l'étude de leur mouvement et au calcul des volants. Il termine par un nouveau paragraphe relatif à la similitude en Mécanique ; les relations d'homogénéité montrent dans quelles conditions un modèle réduit d'une machine peut rendre compte des conditions du fonctionnement de la machine réelle.

On voit par cet aperçu quelle est la richesse des matériaux renfermés dans ce Traité ; nous ajouterons qu'il contient un nombre considérable d'énoncés d'exercices ; de même que les nombreux exemples développés à la suite des théorèmes, ils sont tous choisis d'une manière judicieuse, avec le souci constant de donner des applications directes et intéressantes des théories exposées dans l'Ouvrage. H. Vogt.

KRONECKER (L.). — VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATIK herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. In zwei Teilen. Zweiter Teil. — VORLESUNGEN ÜBER ALLGEMEINE ARITHMETIK. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. KURT HENSEL. Zweiter Aschnitt. VORLESUNGEN ÜBER DETERMINANTEN THEORIE. Erster Band, mit 11 Figuren im Text. 1 vol. in-8, XII-390 p. Leipzig, Teubner, 1903.

Les noms de Kronecker et de M. Hensel suffisent assurément pour que le lecteur soit fixé sur la haute valeur de ces Leçons, sur la façon pieuse et savante dont elles ont été recueillies, publiées, continuées, dans l'esprit même où Kronecker les avait faites.

L'intérêt que le lecteur français ne peut manquer de se promettre en ouvrant ce premier volume se double d'un peu d'étonnement : après une leçon d'ouverture à la fois historique et philosophique, conçue dans cette manière large où le maître excellait, voici *cinq* leçons sur le déterminant du second ordre ; elles occupent une centaine de pages, d'un format grand in-8°, d'un texte assez compact. Voici ensuite cinq leçons sur le déterminant du troisième ordre, puis trois leçons sur celui du quatrième ordre : elles tiennent environ cent quarante pages. Voici une leçon sur la décomposition d'un polynome en facteurs irréductibles dans un domaine naturel de rationalité. Nous voici enfin arrivés à la définition du déterminant en général ; nous en sommes à la seizième leçon, à la page 263. Deux leçons sont consacrées à cette définition et à l'établissement des propriétés fondamentales. Les quatre leçons qui restent, qui tiennent à leur tour une centaine de pages, se rapportent aux matrices, à la règle de Laplace, à la notion de la divisibilité et de l'équivalence des systèmes. Le lecteur a beau se dire que les deux tiers du Livre ont été écrits pour le conduire à la pleine intelligence des cent quarante dernières pages, il ne s'en convainc tout à fait que par une lecture approfondie.

Il convient tout d'abord de dire un mot de la façon dont Kronecker présente la définition générale d'un déterminant : cette fonction de n^2 variables ne tombe pas du ciel, toute faite : on ne commencera pas par une description de la façon dont elle est

formée, pour en déduire les propriétés, et, en particulier, le rôle qu'elle joue dans la résolution des équations linéaires : au contraire cette résolution même doit conduire à la fonction des coefficients de ces équations, qu'on désigne sous le nom de déterminant, et aux propriétés de cette fonction. C'est là sans doute l'ordre naturel et, dans une certaine mesure, l'ordre historique, en substituant toutefois à l'histoire vraie, l'histoire telle qu'elle aurait dû être, si Leibniz et Cramer avaient eu les connaissances algébriques de M. Kronecker. Celui-ci insiste avec force, dans sa première leçon, sur l'importance dans l'enseignement de la méthode historique, mais l'ensemble même de son Cours montre avec quelle largeur il entendait se servir de cette méthode et comment les progrès mêmes d'une doctrine peuvent en éclairer les origines : aussi bien les jeunes gens qui étudient les Mathématiques n'ont pas plusieurs siècles à vivre, pour repasser minutieusement par toutes les étapes qu'ont franchies peu à peu ceux dont ils étudient les découvertes.

Étant données n équations linéaires à n inconnues, dont on regardera les coefficients comme des variables, il n'est pas difficile de montrer, par induction, que ces équations admettent une solution unique, dont les divers éléments s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients entiers des éléments de la matrice à n lignes et à $n+1$ colonnes qui résume en quelque sorte les n équations. Un point assez difficile et qui est établi d'une manière très ingénieuse consiste à prouver que les n fonctions rationnelles qui, substituées aux inconnues, satisfont identiquement aux équations, ont le même dénominateur ; on y arrive en montrant, sur deux dénominateurs, que chacun est divisible par l'autre : cette démonstration suppose connues les propositions élémentaires concernant la divisibilité dans un domaine naturel de rationalité, auxquelles une leçon a été consacrée. Il est ensuite assez facile d'établir le caractère linéaire, par rapport aux coefficients qui ne multiplient pas les inconnues, des numérateurs des solutions, et la règle pour déduire ces numérateurs du dénominateur commun : les propriétés essentielles de ce dénominateur commun, son caractère linéaire par rapport aux éléments d'une colonne, sa propriété de s'annuler quand on remplace les éléments d'une colonne par les éléments d'une autre colonne, son indiffé-

rence à l'échange des lignes et des colonnes, la règle de la multiplication se déroulent ensuite à l'entière satisfaction du lecteur.

Non moins intéressante est la description de la façon dont un déterminant est formé au moyen de ses éléments : cette description se déduit uniquement des trois propriétés suivantes, qui caractérisent entièrement un déterminant du n^e ordre regardé comme une fonction entière à coefficients entiers des n^2 variables u_{gh} ; cette fonction est linéaire par rapport aux éléments de chaque ligne horizontale du système ; elle change de signe, sans changer de valeur absolue, quand on échange deux lignes entre elles ; elle se réduit à 1 quand tous les éléments u_{gh} sont remplacés par zéro ou par 1 suivant que g et h sont différents ou égaux.

Ces propriétés suffisent à retrouver les règles qui servent habituellement à définir *a priori* un déterminant. La voie suivie par Kronecker est à la fois naturelle et instructive ; elle est assurément beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit que la définition *a priori;* elle est très appropriée à ceux qui veulent faire une étude approfondie de l'Algèbre, qui veulent connaître les choses en elles-mêmes, et non se borner à acquérir le maniement d'un outil commode.

La définition générale du déterminant constitue le terme de la rédaction qu'avait laissée Kronecker ; les leçons qui précèdent préparent cette définition par l'étude du déterminant du deuxième et du troisième ordre ; sur ce dernier, en particulier, les étapes successives qui conduisent à la formation et aux propriétés de la *fonction déterminante* apparaissent très bien au lecteur qui a, en même temps, toute facilité pour vérifier les résultats de la théorie. Ce n'était d'ailleurs probablement pas la seule raison qu'avait Kronecker de s'arrêter sur les déterminants du second, du troisième et du quatrième ordre : il tenait évidemment à ce que ses auditeurs devinssent très familiers avec ces fonctions. S'il s'arrête longtemps et soigneusement sur les applications géométriques, c'est toutefois les propriétés arithmétiques et algébriques qui tiennent la plus grande place.

Reprenons ces leçons au début, à la seconde, où commence l'exposition didactique.

On notera tout d'abord la façon dont est posé le problème de la

résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues x, y, afin que ce problème ait toujours un sens :

Quelle restriction à la variabilité de x, y est-elle apportée par la condition que les fonctions linéaires

$$f = ax + by + c, \qquad f' = a'x + b'y + c'$$

soient nulles ?

Dans cette même leçon s'introduisent la notion de systèmes équivalents de formes linéaires, la notion de *rang*, la notion de matrices à deux lignes et à trois colonnes.

Quatre leçons environ sont consacrées aux propositions qui résultent de la composition de deux systèmes de quatre éléments : c'est, tout d'abord, la multiplication de deux déterminants du second ordre, que Kronecker ne craint pas de présenter de trois façons différentes, fort voisines l'une de l'autre ; puis la théorie de la décomposition d'un système de quatre éléments en systèmes élémentaires ; la propriété d'une fonction de quatre éléments dont la valeur, quand on y remplace le système de ces quatre éléments par un système composé, est indépendante de l'ordre des compositions, d'être une fonction du déterminant de ces quatre éléments ; l'examen approfondi du cas où les éléments des systèmes considérés sont des nombres entiers ; la réduction de pareils systèmes par composition antérieure au moyen de systèmes élémentaires ; l'équivalence de ces systèmes de quatre nombres entiers et ses divers modes, le nombre de leurs classes ; les formes bilinéaires à deux couples de variables, leur transformation et leur réduction, leur équivalence, les quaternions, la déduction au moyen de la théorie de la composition des propriétés fondamentales d'un déterminant du second ordre. On voit combien la matière est riche, et, si le déterminant du second ordre occupe une centaine de pages, le lecteur ne peut plus s'en étonner. Il est à peine utile de dire que le déterminant du troisième ordre donne lieu à des développements analogues.

J'arrive maintenant aux dernières leçons, qui ont été rédigées par M. Hensel.

Des trois propriétés qui caractérisent le déterminant de n^2 variables u_{gh}, regardé comme une fonction entière de ces variables,

ne conservons que les deux premières : la fonction doit être linéaire par rapport aux éléments d'une même ligne ; elle doit changer de signe, et seulement de signe, quand on échange entre elles deux lignes. Ces deux propriétés caractérisent le déterminant à un facteur constant près, indépendant des variables u_{gh}. Il est très naturel, dès lors, étant donné non plus un système de n^2 éléments, mais une matrice de nm éléments ($m \geqq n$), de chercher la forme des fonctions entières des ces mn éléments qui jouissent des mêmes propriétés, et l'on parvient sans peine à reconnaître qu'elles doivent être des fonctions linéaires à coefficients constants des déterminants du n^e ordre que l'on peut tirer de la matrice. Cette remarque conduit, à peu près sans calcul, à l'expression classique du déterminant dont les éléments résultent de la composition de deux matrices, comme somme de produits de déterminants : il en est de même des relations entre les mineurs, de la règle de Laplace, etc. Signalons la proposition suivante :

Soit U un système de n^2 éléments : il donne naissance à n systèmes dérivés dont le premier $U^{(1)}$ coïncide avec U, dont le second $U^{(2)}$ a pour éléments les déterminants du second ordre tirés du tableau U, dont le troisième a pour éléments les déterminants du troisième ordre tirés du même tableau, etc. ; l'équation $UV = W$, où le produit doit être entendu dans le sens d'une composition, entraîne les équations $U^{(\rho)}V^{(\rho)} = W^{(\rho)}$, où $V^{(1)}$, $(V^{(2)})$, ..., $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., signifient les sytèmes dérivés des tableaux à n^2 éléments V et W, comme $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ... sont dérivés du système U.

Cette proposition, qui s'applique en particulier aux systèmes adjoints et aux systèmes réciproques, condense, comme on le voit, un nombre considérable de relations.

Une leçon intéressante et d'une lecture très facile concerne le calcul avec les matrices (carrées), où l'addition de deux systèmes A, B est définie par l'addition des éléments correspondants et la multiplication par la composition.

La dernière leçon enfin traite de la divisibilité et de l'équivalence des systèmes : le système B est divisible par le système A si ces deux systèmes sont liés entre eux par une équation (de composition) $B = PAQ$; les deux systèmes A et B sont équivalents si chacun d'eux est divisible par l'autre ; c'est ce qui arrive si, dans

l'équation précédente, les déterminants des systèmes P et Q ne sont pas nuls. Il n'est pas difficile de reconnaître que le rang de deux systèmes équivalents est le même ; mais la proposition réciproque « deux systèmes qui ont même rang sont équivalents » demande quelque effort.

La définition de la divisibilité et de l'équivalence est susceptible d'une forme plus étroite quand les systèmes sont formés d'éléments entiers ou de fonctions entières d'une variable. Tout d'abord, si tous les éléments du système A ont un plus grand commun diviseur, ce système résulte de la composition d'un *système diagonal,* dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale, lesquels sont égaux au plus grand commun diviseur, et d'un système *primitif,* dont les éléments n'ont pas de plus grand commun diviseur. Ce système diagonal est dit alors le *diviseur diagonal* du système A. Le système B est dit divisible par le système A si, dans la relation $B = PAQ$, les systèmes P et Q sont entiers ; A sera alors divisible par B et les deux systèmes A et B seront équivalents si les systèmes P^{-1}, Q^{-1} sont aussi entiers.

Si B est un multiple de A, le diviseur diagonal de B est un multiple du diviseur diagonal de A ; deux systèmes équivalents ont même diviseur diagonal.

A un système A de n^2 éléments correspondent, comme on l'a expliqué plus haut, n systèmes dérivés. Ces systèmes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... admettent des diviseurs diagonaux dans lesquels les éléments de la diagonale sont respectivement égaux à d_1, d_2, ... ; d_i est dit le *diviseur des déterminants* (*Determinantenteiler*) du $i^{\text{ème}}$ ordre du système A. Si B est un multiple de A, les diviseurs des déterminants du système B sont des multiples des diviseurs des déterminants du système A ; deux systèmes équivalents ont mêmes diviseurs de déterminants. Réciproquement, si ces diviseurs des déterminants sont les mêmes pour les deux systèmes A, B, ces deux systèmes sont équivalents. On peut dire aussi que la condition d'équivalence pour ces deux systèmes consiste dans l'égalité de leurs *diviseurs élémentaires,* ces derniers étant définis au moyen des diviseurs des déterminants d_1, d_2, ..., d_n par les relations

$$d_1 = e_1, \quad d_2 = e_1 e_2, \quad \ldots, \quad d_n = e_1 e_2 \ldots e_n.$$

L'importance de la considération des diviseurs élémentaires apparaît dans l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système B soit divisible par le système A consiste en ce que les diviseurs élémentaires du système B doivent être des multiples des diviseurs élémentaires correspondants du système A.

Ces dernières leçons font prévoir une exposition, d'une part, de la théorie de l'équivalence des faisceaux de formes, d'autre part, de recherches arithmétiques sur la décomposition des matrices en systèmes élémentaires et sur la théorie des formes, qui ont beaucoup occupé Kronecker, et qui trouveront sans doute leur place dans le second volume.

« La théorie des déterminants, dit M. Hensel dans sa Préface, s'est si profondément développée du vivant de Kronecker et par son action même, puis dans les douze années qui ont suivi sa mort, que les Livres actuellement parus qui traitent de cette discipline sont loin de donner une exposition complète de son riche contenu. Les Cours universitaires de Kronecker, à ce point de vue, ont réalisé un important progrès. Mais il n'estimait pas que le temps fût venu d'y faire entrer ses profondes recherches, en particulier sur la théorie des formes bilinéaires et quadratiques ; il ne pouvait non plus y faire entrer cette suite de résultats obtenus par Frobenius, Minkowski, Hurwitz et d'autres chercheurs, qui s'est close dans ces dernières années, et grâce auxquels la théorie a tant gagné en profondeur et en simplicité.

» L'étude longue et approfondie que j'ai faite de ces nouveaux problèmes de la théorie des déterminants m'a montré qu'ils pouvaient être exposés de la façon la plus claire en suivant systématiquement les pensées qui se dégagent des derniers Cours et des derniers travaux de Kronecker sur ce sujet. Je me suis donc résolu, tout en gardant soigneusement les principes fondamentaux et en conservant les méthodes simples et puissantes que Kroneker avait développées dans ses leçons, à reprendre celles-ci et à les continuer, en sorte que le présent Ouvrage contînt un exposé systématique de la moderne théorie des déterminants et de ses applications. »

La part qui reviendra à M. Hensel dans la publication de ce

second Volume, et le service qu'il aura rendu, seront donc considérables. Il est permis de se réjouir que l'œuvre de Kronecker soit comprise et complétée de cette façon. J. T.

MÉLANGES.

RECHERCHE ANALYTIQUE SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. J. DOLBNIA.

I.

1. La réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques de seconde espèce se fait suivant la méthode que nous avons développée pour les intégrales de première espèce [1]. Quoique ce nouveau problème soit un peu plus compliqué, néanmoins, dans tous les cas où la réduction peut être effectuée à l'aide de simples opérations algébriques, ces dernières ne présentent aucune difficulté. Pour les intégrales hyperelliptiques, la théorie se présente sous la forme plus ou moins définitive.

Soit donnée l'intégrale hyperelliptique de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$R(x)$ étant un polynome du degré n. Il faut choisir la fonction rationnelle $F(x)$ du degré k de telle sorte que

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = A\zeta(u, g_2, g_3). \tag{1}$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXVII, juin 1903.

La réduction doit être effectuée à l'aide de la substitution

$$\varphi(x) = \lambda\, \mathrm{p}(u, g_2, g_3), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle. Nous étudierons d'abord le cas, où $\varphi(x)$ est une fonction entière du degré i. Soit k le degré de la fonction rationnelle $\mathrm{F}(x)$. En posant $x = \infty$ dans l'équation (2), nous aurons un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{i}}.$$

Faisant $x = \infty$ dans l'équation (1), nous obtiendrons un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{2k-n-2}};$$

donc

$$i = 2k - n + 2. \tag{3}$$

De l'équation (2) nous aurons un développement

$$\varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \ldots$$
$$= \lambda\left(\mathrm{p}(u_0) + (u - u_0)\,\mathrm{p}'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{1.2}\mathrm{p}''(u_0) + \ldots\right),$$

où x_0 est l'une des racines de l'équation

$$\varphi(x) - \mathrm{p}(u_0) = 0.$$

Nous considérons le cas particulier, lorsque

$$\varphi'(x_0) = 0, \qquad \varphi''(x_0) \gtrless 0;$$

c'est-à-dire lorsque $x = x_0$ est une racine double de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda\,\mathrm{p}(u_0) = 0.$$

Dans ce cas, deux hypothèses sont possibles :

1° $\mathrm{p}'(u_0) = 0$;

2° $\mathrm{p}'(u_0) \gtrless 0$.

Si $\mathrm{p}'(u_0) = 0$, l'argument u_0 est une demi-période de l'intégrale elliptique, et

$$\mathrm{p}(u_0) = e_i \qquad (i = 1, 2, 3);$$

x_0 est une racine double de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0,$$

et, au voisinage du point $x - x_0 = 0$, x est une fonction holomorphe de l'argument u. Dans le cas où $p'(u_0) \neq 0$, $x - x_0$ se développe en série avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{1}{2}}.$$

De ce qui précède nous concluons que les racines

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_{i-1}$$

de l'équation $\varphi'(x) = 0$ se partagent en deux groupes :

1° $\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_j,$

2° $\xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_h;$

toutes les racines du premier groupe satisfont à l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dans tous les points

$$\xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_h,$$

x est une fonction non holomorphe de l'argument u

$$(4) \qquad \begin{cases} j + h = i - 1, \\ \qquad j = i - h - 1. \end{cases}$$

Le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2][\varphi(x) - \lambda e_3]$$

est divisible par $R(x)$. En effet, désignant par z l'une des racines de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0,$$

nous aurons

$$\varphi(z) + (x - z)\varphi'(z) + \frac{(x - z)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(z) + \ldots$$
$$= \lambda\left(p(\omega_i) + \frac{(u - \omega_i)^2}{1 \cdot 2}p''(\omega_i) + \ldots\right).$$

Si nous avons

$$\varphi'(z) = 0.$$

$x - z = 0$ est un point de ramification, et comme

$$\varphi(z) = \lambda p(\omega_i),$$

$x - z$ est un diviseur du polynome

$$\varphi(x) - \lambda e_i;$$

si nous avons

$$\varphi'(z) = 0,$$

alors $x = z$ est une racine double du polynome

$$\varphi(x) - \lambda e_i.$$

Par conséquent

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2][\varphi(x) - \lambda e_3]$$
$$= R(x)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_j)^2;$$

donc

$$3i = n + 2(i - h - 1),$$

d'où

(5) $$i = n - 2h - 2.$$

Des équations (3) et (5) nous trouvons

(6) $$k = n - h - 2.$$

En posant successivement

$$h = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

nous aurons un nombre infini d'intégrales de seconde espèce réductibles aux intégrables elliptiques.

2. Nous obtiendrons, évidemment, le cas le plus simple pour $h = 0$; alors

$$i = n - 2, \qquad k = n - 2.$$

Prenons $n = 7$,

$$R(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d).$$

Il faut choisir

$$\alpha, \beta, a, b, c, d, F(x),$$

de telle sorte que

$$\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x^5+5ax^3+5bx^2+5cx-d)}} = \mathrm{A}\zeta(u,\ g_2,\ g_3).$$

Posons

$$\varphi(x) = \lambda p(u,\ g_2,\ g_3),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome du cinquième degré. Comme

$$[\varphi(x)-\lambda e_1][\varphi(x)-\lambda e_2][\varphi(x)-\lambda e_3]$$

est divisible par $\mathrm{R}(x)$, nous aurons les deux combinaisons possibles

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \varphi(x)-\lambda e_1 = (x-x_1)\ldots(x-x_5),\\ \varphi(x)-\lambda e_2 = (x-x_6)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2,\\ \varphi(x)-\lambda e_3 = (x-x_7)(x-\xi_3)^2(x-\xi_4)^2,\end{cases}$$

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\quad \xi_4$$

étant les racines du polynome $\varphi'(x)$;

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \varphi(x)-\lambda e_1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-\xi_1)^2,\\ \varphi(x)-\lambda e_2 = (x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-\xi_2)^2,\\ \varphi(x)-\lambda e_3 = (x-x_7)(x-\xi_3)^2(x-\xi_4)^2.\end{cases}$$

Étudions la première combinaison. Posons

$$\varphi(x)-\lambda e_1 = x^5+5ax^3+5bx^2+5cx-d,$$

d'où

$$\varphi'(x) = 5(x^4+3ax^2+2bx+c).$$

Le produit

$$(\varphi x-\lambda e_2)(\varphi x-\lambda e_3) = \varphi^2(x)+\lambda e_1\varphi(x)+\lambda^2 e_2 e_3$$

est divisible par

$$[\varphi'(x)]^2.$$

De cette condition nous trouverons

$$b=0,\qquad c=a^2,$$

$$\lambda e_1 = -\frac{2}{5}d,\qquad \lambda^2 e_2 e_3 = 4a^5 - \frac{1}{9}d^2,$$

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - 4a.$$

Des équations

$$\lambda e_1 = -\lambda(e_2 + e_3) = -\frac{2}{3}d, \qquad \lambda^2 e_2 e_3 = 4a^3 + \frac{1}{9}d^2$$

nous obtiendrons

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3}d + 2a^2\sqrt{-a}, \qquad \lambda e_3 = \frac{1}{3}d - 2a^2\sqrt{-a};$$

donc

$$\lambda^2 g_2 = 4\left(\frac{1}{3}d^2 - 4a^5\right),$$

$$\lambda^3 g_3 = -\frac{8}{3}\left(\frac{d^3}{9} - 4a^5 d\right);$$

$$(7) \qquad \varphi(x) = x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + \frac{1}{3}d = \lambda\,\mathrm{p}(u, g_2, g_3).$$

Posons maintenant

$$\mathrm{F}(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)};$$

désignons par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots$$

les racines du polynome $f(x)$. L'équation (1) nous montre qu'au voisinage du point η_m nous aurons un développement de la forme

$$(8) \quad a + b(x - \eta_m)^2 + \ldots = \zeta(v) - (u - v)\,\mathrm{p}(v) + \frac{(u-v)^2}{1.2}\mathrm{p}'(v) + \ldots.$$

D'après les hypothèses faites, x est une fonction holomorphe de l'argument u pour toutes les valeurs finies de x, comme le montre l'équation (7); donc

$$\mathrm{p}(v) = 0.$$

D'où il suit que

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda p(u) = 0;$$

par conséquent

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Et comme le degré de la fonction $\mathrm{F}(x)$

$$k = n - 2 = i = 5,$$

la fonction $\psi(x)$ doit être une constante; donc

$$F(x) = \varphi(x),$$

et nous aurons définitivement

$$\int \frac{\left(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + \frac{1}{3}d\right)dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^5+5ax^3+5a^2x+d)}} = \frac{4}{25}\zeta(u, g_2, g_3),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^5+5ax^3+5a^2x+d)}} = u.$$

3. En posant $h = 1$ dans les formules (5) et (6), nous avons

$$i = n - 4, \qquad k = n - 3.$$

Il y a une infinité d'intégrales réductibles de cette catégorie. Posons $n = 7$, alors

$$i = 3, \qquad k = 4.$$

Désignant par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_7$$

les racines du polynome $R(x)$, nous avons une seule combinaison possible

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_2 = (x - x_4)(x - x_5)(x - x_6),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_3 = (x - x_7)(x - \xi)^2,$$

où $\varphi(x)$ est un polynome du troisième degré, ξ est l'une des racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 3(x - \xi)(x - \eta) = 0.$$

Supposons

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = x^3 - 3a^2x + b;$$

alors

$$\varphi(x) - \lambda e_2 = x^3 - 3a^2x + b + \lambda(e_1 - e_2),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_3 = x^3 - 3a^2x + b + \lambda(e_1 - e_3),$$
$$\varphi'(x) = 3(x^2 - a^2),$$
$$\xi = a, \qquad \eta = -a.$$

Et, comme

$$\varphi(x) - \lambda e_3$$

est divisible par

$$(x - a)^2,$$

nous aurons

$$x - x_7 = x + 2a, \qquad b - \lambda(e_1 - e_3) = 2a^3.$$

Maintenant, en posant

$$R(x) = (x^3 - 3a^2x - b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a),$$

nous avons

$$b + \lambda(e_1 - e_2) = c.$$

Par conséquent

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3}(2a^3 - 2b + c);$$

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3}(2a^3 + b - 2c);$$

$$\lambda e_3 = \frac{1}{3}(b + c - 4a^3);$$

$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3}(b^2 + c^2 - bc + 4a^6 + 2a^3b - 2a^3c);$$

$$\lambda^3 g_3 = \frac{4}{27}(12a^6b + 12a^6c - 16a^9 - 24a^3bc + 6a^3b^2 + 6a^3c^2 + 3bc^2 + 3b^2c - 2b^3 - 2c^3).$$

Comme

$$k = n - 3 = 4,$$

$F(x)$ est une fonction rationnelle du quatrième degré. Soit

$$F(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)};$$

alors les zéros de la fonction $F(x)$ sont les racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Aux environs de chacune de ces racines

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots$$

nous aurons un développement de la forme

$$a + b(x - \eta_1)^2 + \dots = \zeta(v) - \wp(v)(u - v) + \frac{1}{2}\wp'(v)(u - v)^2 + \dots$$

Si nous avons

$$\wp(v) = 0,$$

$(x - \eta_1)$ est une fonction holomorphe de $(u - v)$. Si au contraire

$$\wp(v) \neq 0,$$

la partie principale du développement de $(x-\eta_1)$ sera

$$(u-v)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, de l'équation

$$\varphi(x)=\lambda\,\mathrm{p}(u)$$

nous aurons

$$\varphi(x_0)+(x-x_0)\,\varphi'(x_0)$$
$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\varphi''(x_0)+\ldots=\lambda[\mathrm{p}(u_0)+(u-u_0)\,\mathrm{p}'(u_0)+\ldots].$$

Si nous avons

$$\varphi'(x_0)\neq 0,\qquad \mathrm{p}'(u_0)=0,$$

alors $x-x_0=0$ est un point de ramification. Quand

$$\varphi'(x_0)=0,\qquad \mathrm{p}'(u_0)=0,$$

alors $(x-x_0)$ est une fonction holomorphe de l'argument $(u-u_0)$. Il y a une seule valeur $x-x_0=0$ pour laquelle nous ayons simultanément

$$\varphi'(x_0)=0,\qquad \mathrm{p}'(u_0)\neq 0;$$

cette valeur est

$$x+a=0.$$

Aux environs de ce point nous avons un développement de $(x+a)$ avec la partie principale

$$(u-u_0)^{\frac{1}{2}}.$$

De cette analyse il résulte que

$$\eta_1,\quad \eta_2,\quad \eta_3$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi(x)=\lambda\,\mathrm{p}(u)=0,$$

et

$$\eta_4=-a;$$

donc

$$f(x)=\varphi(x)(x+a)=\left(x^3-3a^2x+\frac{1}{3}(b-c+2a^3)\right)(x+a);$$
$$\psi(x)=1;$$
$$\mathrm{F}(x)=\left(x^3-3a^2x+\frac{1}{3}(b+c+2a^3)\right)(x+a).$$

Par conséquent, l'intégrale réductible sera

$$\int \frac{\left(x^3 - 3a^2x + \frac{1}{3}(b + c + 2a^3)\right)(x + a)\,dx}{\sqrt{(x^3 - 3a^2x + b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a)}} = \frac{2}{3}\lambda^{\frac{1}{2}}\zeta(u, g_2, g_3).$$

Pour déterminer le facteur numérique λ, remarquons que

$$u = \int \frac{(x + a)\,dx}{\sqrt{(x^3 - 3a^2x + b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a)}}.$$

De cette équation, d'après la formule

$$\varphi(x) = \lambda p(u),$$

nous trouvons

$$\lambda = \frac{4}{9}.$$

4. Comme troisième exemple prenons $h = 2$, alors

$$i = n - 6, \qquad k = n - 4.$$

Soit $n = 10$, alors

$$i = 4, \qquad k = 6.$$

Nommant

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{10}$$

les racines du polynome $R(x)$, nous avons une seule combinaison possible

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_2 = (x - x_5)(x - x_6)(x - x_7)(x - x_8),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_3 = (x - x_9)(x - x_{10})(x - \xi)^2;$$

ξ étant une racine de l'équation

$$\varphi'(x) = 0.$$

Posons

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = x^4 + 2ax^2 + 4bx + c;$$

alors

$$\varphi(x) - \lambda e_2 = x^4 + 2ax^2 + 4bx + c + \lambda(e_1 - e_2),$$
$$\varphi(x) - \lambda e_3 = x^4 + 2ax^2 + 4bx + c + \lambda(e_1 - e_3)$$
$$= (x^2 - 2\alpha x + \beta)(x - \xi)^2,$$

$$R(x) = (x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)(x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\alpha x + \beta).$$

où

$$d = c + \lambda(e_1 - e_2),$$

$$\xi^3 + a\xi + b = 0.$$

De la condition

$$\varphi(x) - \lambda e_3 = (x^2 + 2\alpha x + \beta)(x - \xi)^2$$

nous aurons

1° $$\alpha^3 + a\alpha + b = 0,$$

c'est-à-dire que l'on peut prendre

$$\alpha = \xi;$$

2° $$\beta = 2a + 3\alpha^2 = 2a + 3\xi^2.$$

3° $$c + \lambda(e_1 - e_3) = 2a\beta + 4\alpha^2\beta - \beta^2 = 3\xi^4 + 2a\xi^2;$$

d'où

$$\lambda(e_1 - e_3) = 3\xi^4 + 2a\xi^2 - c.$$

Nous avons encore

$$\lambda(e_1 - e_2) = d - c.$$

Par conséquent

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 - 2c + d),$$

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c - 2d),$$

$$\lambda e_3 = \frac{1}{3}(c + d - 6\xi^4 - 4a\xi^2).$$

C'est pourquoi

$$\mathrm{R}(x) = (x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)$$
$$\times (x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a),$$

$$\varphi(x) = x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d) = \lambda p(u).$$

Il est facile de prouver que $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction entière renfermant des facteurs linéaires $(x - x_j)$ de deux catégories :

1° Tels que, pour $x = x_j$, on aura

$$p(u_j) = 0;$$

2° Les facteurs pour lesquels nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale

$$(u - u_j)^{\frac{1}{2}}.$$

Les facteurs de la seconde catégorie se détermineront par l'équation

$$\frac{\varphi'(x)}{x - \xi} = 0,$$

ou

$$x^2 + \xi x + \xi^2 + a = 0.$$

Par conséquent

$$\mathrm{F}(x) = \Big(x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d)\Big)(x^2 + \xi x + \xi^2 + a).$$

Par conséquent

$$\int \frac{\Big(x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d)\Big)(x^2 + \xi x + \xi^2 + a)\,dx}{\sqrt{(x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)(x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a)}}$$
$$= \frac{1}{4}\zeta(u, g_2, g_3),$$

où ξ satisfait à l'équation

$$\xi^3 + a\xi + b = 0.$$

La réduction se fait par la substitution

$$x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d) = \frac{1}{4}\mathrm{p}(u, g_2, g_3),$$

$$u = \int \frac{(x^2 + \xi x + \xi^2 + a)\,dx}{\sqrt{(x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)(x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a)}}.$$

5. Considérons maintenant les cas de réductibilité où $\varphi(x)$ est une fraction rationnelle. Posons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)} = \lambda\mathrm{p}(u, g_2, g_3),$$

$f(x)$ étant un polynome du degré i, $\psi(x)$ un polynome du

degré $(i-j)$. Considérons le cas, particulièrement simple, où toutes les racines du polynome $\psi(x)$ sont des points de ramification; dans ce cas, $\psi(x)$ est un diviseur de $R(x)$. Il est clair que le produit

$$(9)\qquad [f(x)-\lambda e_1\psi(x)][f(x)-\lambda e_2\psi(x)][f(x)-\lambda e_3\psi(x)]$$

est divisible par

$$\frac{R(x)}{\psi(x)},$$

et le quotient doit être de la forme

$$(x-x_\alpha)^\alpha(x-x_\beta)^\beta\ldots.$$

α, β, ... étant des entiers positifs. Posons pour simplifier

$$\alpha=\beta=\ldots=2.$$

Dans ce cas le produit (9) renferme des facteurs de deux catégories :

1° Facteurs simples qui sont, en même temps, les facteurs du polynome $R(x)$ (de degré n);

2° Facteurs doubles qui sont, en même temps, les facteurs simples du polynome

$$f'(x)\psi(x)-\psi'(x)f(x),$$

de degré

$$2i-j-1.$$

Supposons que

$$[f(x)-\lambda e_1\psi(x)][f(x)-\lambda e_2\psi(x)][f(x)-\lambda e_3\psi(x)]$$
$$=\frac{R(x)}{\psi(x)}(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{2i-j-h-1})^2;$$

alors

$$3i=n-i+j+2(2i-j-h-1);$$

d'où

$$n=j+2h+2,$$
$$2i-j-1\geqq h.$$

Et comme

$$n\geqq 5,\qquad j\leqq 1,$$

nous avons évidemment

$$h>0.$$

Prenons comme exemple $h = 3$, $j = 1$, alors

$$n = 9, \qquad 2i \geq 5;$$

posons

$$i = 3.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle manière que

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \lambda \zeta(u, g_2, g_3).$$

Supposons que la réduction s'effectuera par la substitution

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + a x + b} = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

Posons

$$\begin{aligned} R(x) = & \;(x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \\ & \times (x^3 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2)(x^2 + a x + b)(x - r), \end{aligned}$$

et désignons, pour abréger,

$$\begin{gathered} x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = f_1(x), \\ x^3 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = f_2(x), \\ x^2 + a x + b = \theta(x) \\ \lambda e_1 = e'_1, \qquad \lambda e_2 = e'_2, \qquad \lambda e_3 = e'_3. \end{gathered}$$

Nous avons évidemment

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^3 + (\alpha - e'_1) x^2 + (\beta - a e'_1) x + \gamma - b e'_1 = x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \\ & x^3 + (\alpha - e'_2) x^2 + (\beta - a e'_2) x + \gamma - b e'_2 = x^3 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2, \\ & x^3 + (\alpha - e'_3) x^2 + (\beta - a e'_3) x + \gamma - b e'_3 = (x - r)(x - \xi)^2; \end{aligned} \right.$$

ξ est l'une des racines de l'équation

$$f'(x)\psi(x) - \psi'(x) f(x) = 0.$$

Des équations (10) nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha - e'_1 &= a_1, & \beta - a e'_1 &= b_1, & \gamma - b e'_1 &= c_1, \\ \alpha - e'_2 &= a_2, & \beta - a e'_2 &= b_2, & \gamma - b e'_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$a = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \qquad b = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}.$$

En outre

$$r^3 - (\alpha - e'_3) r^2 + (\beta - a e'_3) r + \gamma - b e'_3 = 0,$$

$$2\alpha + e'_3 = a_1 + a_2, \qquad 2\beta + a e'_3 = b_1 + b_2, \qquad 2\gamma + b e'_3 = c_1 + c_2,$$

$$2(\alpha - e'_3) = a_1 + a_2 - 3e'_3,$$

$$2(\beta - a e'_3) = b_1 + b_2 - 3 a e'_3,$$

$$2(\gamma - b e'_3) = c_1 + c_2 - 3 b e'_3,$$

$$2r^3 + (a_1 + a_2 - 3e'_3) r^2 + (b_1 + b_2 - 3 a e'_3) r + c_1 + c_2 - 3 b e'_3 = 0;$$

d'où

$$e'_3 = \frac{f_1(r) + f_2(r)}{3\theta(r)}.$$

Par cette raison

$$\alpha = \frac{3(a_1 + a_2)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)},$$

$$\beta = \frac{3(b_1 + b_2)\theta(r) - a[f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)},$$

$$\gamma = \frac{3(c_1 + c_2)\theta(r) - b[f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)};$$

$$e'_1 = \frac{3(a_2 - a_1)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)},$$

$$e'_2 = \frac{3(a_1 - a_2)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)},$$

$$e'_3 = \frac{f_1(r) + f_2(r)}{3\theta(r)}.$$

Déterminons maintenant le fonction $F(x)$. De l'équation

$$(11) \qquad \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = A\zeta(u, g_2, g_3)$$

nous avons pour $x = \infty$ un développement avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{2}{2k-7}},$$

k désignant le degré de la fonction $F(x)$. Par conséquent

$$-\frac{2}{2k-7} = -2,$$

$$k = 4.$$

L'équation

$$(12) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + a x + b} = \lambda \wp(u, g_2, g_3)$$

nous montre que x ne sera pas une fonction holomorphe de l'argument u au voisinage des points satisfaisant à l'équation

$$f'(x)\psi(x)-\psi'(x)f(x)=0$$

et à la condition

$$\mathrm{p}'(u)\neq 0.$$

Il y a seulement trois points de cette catégorie; ce sont les racines de l'équation

$$\frac{f'(x)\psi(x)-\psi'(x)f(x)}{x-\xi}=0. \tag{13}$$

Il s'ensuit que la fonction rationnelle $F(x)$ doit être choisie de telle manière que x soit une fonction holomorphe de l'argument u dans toute l'étendue du plan à l'exception des trois points (13) aux environs desquels nous avons les développements de la forme

$$x=\xi'+A(u-u')^{\frac{1}{2}}+\ldots$$

Par conséquent, en posant

$$F(x)=\frac{F_1(x)}{F_2(x)},$$

nous voyons que $F_1(x)$ doit être divisible par le polynome (13).

En outre $F_1(x)$ peut renfermer seulement les facteurs pour lesquels

$$\mathrm{p}(u)=0.$$

Ces facteurs sont déterminés par l'équation

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=f(x)=0.$$

Par cette raison

$$F_1(x)=\frac{[f'(x)\psi(x)-\psi'(x)f(x)](x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{x-\xi};$$

cette fonction est du sixième degré. La fonction $F_2(x)$ du deuxième degré ne peut avoir d'autres racines que les points de ramification; car, autrement, l'intégrale (11) aurait les points critiques logarithmiques, ce qui est impossible. Il est facile de prouver que

$$F_2(x)=x^2+ax+b.$$

En effet au voisinage de chacun des points de ramification l'intégrale (11) reste finie, à l'exception des points

$$x^2 + ax + b = 0;$$

aux environs de ces derniers, nous avons

$$\lim(u) = 0;$$

donc

$$\zeta(u) = \infty.$$

Par cette raison, nous avons

$$\int \frac{[f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x)](x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx}{(x-\xi)(x^2+ax+b)\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\\ \times (x^3 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2)(x^2 + ax + b)(x - r)\end{array}\right\}}}$$
$$= A\zeta(u, g_2, g_3).$$

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CLERKE (AGNES-M.). — *Problems of Astrophysics.* In-8°, 584 p. avec 81 fig. London, Black. 20 sh.

DARWIN (G.-H.). — *Stability of the pear-shaped figure of the equilibrium of a rotating mass of liquid.* In-4°, 64 p. London, Dulau. 3 sh.

HAVINGA (E.). — *Onze sterrenhemel en het nemen van nachtelijke observaties.* Avec 2 cartes et 4 fig. In-8°, 102 p. Amsterdam, Stemler. Relié, 3 fl.

HEATH (T.). — *Twentieth century Atlas of popular Astronomy.* 22 planches. In-8°. London, Johnston. 7 sh. 6 d.

HILLMAYR (WILH. RITTER V.). — *Bestimmung der Bahn des Kometen* 1854. III (Tirage à part). In-8°, 44 p. Wien, Gerold's Sohn. 2 m. 80 pf.

HUMBERT (G.). — *Cours d'Analyse, professé à l'École polytechnique.* T. I. In-8°; XVI-484 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

Newcomb (S.). — *Astronomy for everybody*. Avec figures. In-12. New-York. 10 sh. 6 d.

Schuster (A.). — *On some definite integrals, and a new method of reducing a function of spherical co-ordinates to a series of spherical harmonics*. In-4°, 42 p. London, Dulau. 2 sh.

Study (E.). — *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften u. verwandte Gegenstände der Geometrie*. 2e livraison. Gr. in-8°, avec fig. et 1 carte. Leipzig, Teubner. 13 m. 40 pf. (Complet, 21 m.; relié, 23 m.)

Czuber (E.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre. Anwendung*. 2e partie. (*Teubner's Sammmlung von Lehrbüchern...*, t. IX, 2e partie) Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 12 m.; complet en 1 vol., 24 m.

Poincaré (H.). — *La Science et l'hypothèse*. In-18 jésus, 288 p. Paris, Flammarion. 3 fr. 50 c.

Bianchi (Luigi). — *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni;* anno 1902-1903. Gr. in-8°, 708 p. lithogr. Pisa, Spoerri. 12 m. 80 pf.

Borel (E.). — *Leçons sur les fonctions méromorphes,* professées au Collège de France. In-8°, VI-124 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Lalande (J. de). — *Tables de logarithmes,* étendues à sept décimales par F.-C.-M. Marie. Nouv. édit. In-16, XLII-238 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

— *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les sinus*. Édition stéréotype. In-18, XLII-236 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Lœwy (M.). — *Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour* 1904. In-4°, 44 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

Boltzmann (Ludw.). — *Ueber die Prinzipien der Mechanik*. Zwei akadem. Antrittsreden. In-8°, 48 p. Leipzig, Hirzel. 1 m.

Neumann (C.). — *Ueber die Maxwell-Hertz'sche Theorie*. 3e Partie. In-8°, 25 p. avec 3 fig. Leipzig, Teubner. 1 m. 50 pf.

Séligmann-Lui. — *Note sur une interprétation mécanique des principes de la Thermodynamique*. In-8°, 72 p. avec fig. Paris, Vve Dunod.



1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GRACE (J.-H.) et YOUNG (A.). — The Algebra of invariants. 1 vol. in-8°; vi-384 pages. Cambridge, University Press, 1903.

L'*Algèbre des invariants* de MM. Grace et Young rendra les meilleurs services à ceux qui veulent apprendre ce qu'il y a de fondamental dans cette théorie; la lecture en est claire et facile; les idées essentielles sont bien mises en relief et l'intérêt ne languit pas. L'étude des invariants est fondée sur cette *notation symbolique* dont les mathématiciens allemands ont su tirer si grand parti. Dans la Préface de son excellente *Algèbre des quantiques,* M. Elliott avait exprimé le regret qu'aucun livre n'eût encore été publié en langue anglaise où l'auteur se plaçât à ce point de vue: le Livre de MM. Grace et Young semble devoir répondre au désir de M. Elliott. Il convient d'ajouter que les auteurs, tout en se reportant aux sources comme il convient, n'ont nullement fait un travail de compilation, mais bien une œuvre qui se suit et où tout se tient.

Les cinq premiers Chapitres aboutissent à la démonstration du théorème de M. Gordan sur le nombre fini des invariants d'un système de n formes binaires et l'on peut dire qu'ils préparent cette démonstration.

La notation symbolique est introduite dès le début, et l'on montre, sur une suite d'exemples, comment elle permet d'obtenir immédiatement des invariants et des covariants. On démontre ensuite comment la forme trouvée pour les expressions symboliques de ces invariants ou covariants convient à tous les invariants ou covariants: une démonstration est fondée sur les propriétés de l'opérateur différentiel

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1};$$

une autre est celle même que l'on doit à Clebsch. Les auteurs développent ensuite les propriétés fondamentales des polaires et

des *transvectants* (*Ueberschiebungen*), les procédés que l'on doit à M. Gordan pour le calcul de ces dernières expressions, et consacrent un Chapitre à la discussion détaillée des invariants et covariants d'une forme binaire d'ordre 1, 2, 3 ou 4, de manière à montrer que l'on a, pour chacune de ces formes, obtenu le système complet de ses *concomitants*, d'où tous les autres invariants ou covariants se déduisent rationnellement. Le Chapitre suivant contient la troisième preuve donnée par M. Gordan de l'important théorème auquel son nom restera attaché ; on notera le parti que les auteurs ont su tirer, pour cette exposition, des Mémoires de M. C. Jordan sur la théorie des invariants.

La méthode de M. Gordan est ensuite appliquée à la forme du cinquième degré, de manière à obtenir le système complet et irréductible de ses covariants.

L'extension du théorème de M. Gordan aux systèmes de formes binaires est à peu près immédiate. Les auteurs consacrent quelques pages à la détermination des systèmes complets dans les cas les plus simples.

La partie purement algébrique de leur Livre se termine par l'exposition de la démonstration du théorème de M. Gordan que l'on doit à M. Hilbert. Cette démonstration, en raison de sa simplicité et de la portée du lemme qui lui sert de base, ne pouvait être passée sous silence. On notera, dans le Chapitre où elle est exposée, la démonstration que M. Gordan a donnée de ce lemme dans le *Journal* de M. Jordan (1900).

Les sujets qui sont traités dans le reste du Livre ont un grand intérêt géométrique ; ce sont d'abord les interprétations directes des formes binaires considérées comme représentant des systèmes de points, sur une droite, sur une courbe rationnelle, ou encore dans le plan, quand on regarde la variable comme complexe ; c'est ensuite la théorie de l'apolarité pour les formes binaires, et ses applications aux coniques, aux cubiques planes rationnelles, aux cubiques gauches, aux quartiques rationnelles, etc.

Deux Chapitres sont consacrés aux formes ternaires ; on y trouvera en particulier le système complet relatif à deux formes quadratiques. La théorie de l'apolarité est reprise pour les formes ternaires. Les auteurs traitent ensuite des *types* de covariants, en regardant comme appartenant au même type que le covariant Φ

simultané de deux formes binaires

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n)(x_1, x_2)^n,$$
$$(B_0, B_1, \ldots, B_n)(x_1, x_2)^n,$$

tous ceux qui s'en déduisent par l'opération

$$A_0 \frac{\partial}{\partial B_0} + A_1 \frac{\partial}{\partial B_1} + \ldots + A_n \frac{\partial}{\partial B_n}.$$

Enfin le dernier Chapitre se rapporte à d'intéressantes relations entre les théories précédemment développées et la théorie des groupes finis de substitutions ; on y notera divers résultats antérieurement publiés par M. Young.

Quatre appendices terminent l'Ouvrage ; le premier concerne la théorie *chimico-algébrique*, le second le théorème de Wronski et l'application des transvectants aux équations différentielles, le troisième une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Jordan dont les auteurs avaient montré l'importance dans les études préliminaires à la démonstration de théorème de M. Gordan ; le dernier enfin à d'intéressants résultats obtenus par M. Grace dans la théorie des *perpétuants*. J. T.



CASTELNUOVO (G.). — LEZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA E PROJETTIVA. Volume I. FORME DI PRIMA SPECIE. GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO. CURVE DI SECOND ORDINE. 1 vol. in-8°; VII-507 pages. Roma-Milano, Societa editrice Dante Alighieri di Albrighi. Segati et Cie, 1904.

Le Livre de M. Castelnuovo est un livre élémentaire, mais il a été conçu et rédigé par un savant : il intéressera donc d'autres lecteurs que les étudiants pour lesquels il a été spécialement écrit, et ceux-ci ne seront pas les seuls à être reconnaissants à l'auteur de la peine qu'il s'est donnée.

Ces leçons de Géométrie sont le résultat de la fusion en un seul cours, à l'Université de Rome, des cours traditionnels de Géométrie projective synthétique et de Géométrie analytique, fusion que recommandait déjà Cremona : elles s'adressent à un public d'étu-

diants qui, pour la plupart, se destinent à être ingénieurs. Dans ces conditions, les quelques raisons qu'on peut faire valoir contre la fusion des deux enseignements tombent d'elles-mêmes. Ces raisons, après tout, se réduisent à un certain goût pour la pureté des doctrines : un pareil goût est le fait de gens distingués qui, pour mieux les savourer, veulent boire dans des verres séparés les vins qui ne sortent pas de la même bouteille; sans trop s'embarrasser de ce goût raffiné, M. Castelnuovo cherche cependant à l'éveiller chez son lecteur; tout en mélangeant le métrique et le projectif, il montre qu'il est possible et préférable de les séparer et, par exemple, après avoir fait reposer, pour les formes géométriques de première espèce, la définition de la projectivité sur l'égalité du rapport anharmonique de quatre éléments et des éléments correspondants, il démontre le théorème de von Staudt d'après lequel une correspondance biunivoque entre deux formes de première espèce, pour laquelle à tout groupe harmonique de l'une des formes correspond un groupe harmonique de l'autre, est une projectivité; la portée de ce théorème, dont la démonstration est d'ailleurs fort simple et élégante, apparaît nettement, parce que l'auteur a fait ressortir auparavant le caractère graphique que l'on peut donner à la définition d'un groupe harmonique : il lui permettra plus tard de donner de la projectivité entre deux formes de seconde espèce, de la collinéation entre deux plans par exemple, une définition purement graphique, et d'établir que la correspondance ainsi définie entre les éléments de deux droites de deux plans est une projectivité. Cette méthode, où le maître se préoccupe d'abord de donner à tous ses élèves un enseignement aussi facile qu'il est possible, et saisit les occasions d'éveiller chez les meilleurs la réflexion philosophique et la curiosité de la Science, me semble un excellent procédé de culture, qui assure l'abondance et la qualité de la moisson.

Les leçons de M. Castelnuovo s'ouvrent par une introduction où sont définies tout d'abord les formes géométriques des diverses espèces, au sens de Steiner, et exposées plusieurs notions fondamentales. On y trouvera, en particulier, quelques pages sur les *éléments impropres* (point à l'infini dans une direction, droite de l'infini dans un plan, etc.), où l'introduction de ces éléments est justifiée par la cohérence qu'elle permet dans le langage géo-

métrique, qui ne semblent pas pouvoir être rédigées d'une façon plus courte et plus claire; j'en dirai autant de ce qui concerne le principe de dualité.

Le Livre est divisé en trois Parties : les formes de première espèce, la Géométrie analytique du plan, les courbes du second ordre.

Dans la première Partie, l'auteur traite d'abord des systèmes de coordonnées pour une forme de première espèce; on notera le soin avec lequel il a, tout d'abord, mis en évidence les postulats fondamentaux, la façon dont est présentée la notion du rapport anharmonique, la construction au moyen de la règle de tout point d'une droite dont l'abscisse est rationnelle, et cela par des constructions de quatrièmes harmoniques, etc. J'ai déjà parlé plus haut de la façon dont est définie la projectivité entre deux formes de première espèce; l'auteur ne manquera pas de remarquer qu'une telle projectivité peut s'obtenir au moyen d'une suite de projections et de sections. Un Chapitre est consacré à l'involution; je crois inutile d'insister sur l'art avec lequel sont traitées toutes les constructions.

A propos des éléments imaginaires, M. Castelnuovo signale la façon dont ils peuvent être définis d'après von Staudt : un point imaginaire peut, par exemple, être défini par une involution sur une droite réelle et un sens choisi sur cette droite, et cette conception permet, à son tour, de définir ce qu'il faut entendre, par exemple, par la droite qui joint un point réel à un point imaginaire. Les brèves indications que donne l'auteur sur ce sujet suffisent sans doute à faire pressentir au lecteur réfléchi les difficultés que présente une introduction claire et rigoureuse des éléments imaginaires dans la pure Géométrie, qui y répugne quelque peu. Mais, étant donné le caractère vraiment philosophique de son Livre, je ne puis m'empêcher de penser que M. Castelnuovo aurait pu insister davantage sur ces difficultés, même sans les lever. La pratique des examens m'a convaincu, pour ma part, que l'emploi des éléments imaginaires en Géométrie sert surtout à donner aux gens cette opinion qu'un raisonnement absurde, fait suivant certains modèles, conduit à la vérité, et je crois cette opinion dangereuse, même en dehors des Mathématiques. La plupart des étudiants, tout en maniant avec prestesse les éléments imaginaires, sa bornent à

parler de ces éléments comme s'ils étaient réels et ne se préoccupent pas d'autre chose. Aussi bien, dans l'ordre adopté par M. Castelnuovo, me semblerait-il naturel de renvoyer à la Géométrie analytique l'introduction des éléments imaginaires; là, les nombres, les formes et les équations sur lesquels on opère conservent une signification précise : encore conviendrait-il d'insister sur ce fait que les propriétés des éléments imaginaires que l'on traduit par un langage géométrique ne dépendent pas du choix des coordonnées, et que c'est précisément parce qu'elles ne dépendent pas de ces coordonnées qu'elles sont susceptibles d'être traduites dans un langage géométrique : ainsi, j'ai été quelque peu désappointé en voyant que M. Castelnuovo définissait les droites isotropes avant même d'avoir parlé de la transformation des coordonnées. Je demande pardon à l'éminent géomètre de ces critiques de détail, que la rare qualité de son Livre m'a donné le courage de formuler : les gens dont le métier est de réfléchir sur les matières de l'enseignement sont, de temps en temps, tourmentés par des idées fixes, dont ils essaient de se soulager en les exprimant : voilà qui est fait.

Trois Chapitres sont consacrés aux éléments de Géométrie analytique; ils se terminent par l'étude de quelques courbes particulières, algébriques ou transcendantes, et suffisent à donner au lecteur le sens des méthodes, ce qui est l'essentiel. Un important Chapitre, dont j'ai déjà eu l'occasion de dire un mot, se rapporte à la projectivité de deux formes géométriques de seconde espèce, en particulier à la collinéation de deux plans.

Enfin, les principales propriétés des coniques sont exposées dans six Chapitres, d'une lecture intéressante et facile.

Le lecteur sera heureux de retrouver dans ces *Leçons de Géométrie* le bel article (¹) sur la résolution des problèmes de Géométrie que M. Castelnuovo avait écrit jadis pour le recueil que M. Enriques a publié sous le titre *Questioni riguardanti la Geometria elementare*.

Enfin, il importe de signaler le nombre et l'intérêt des exercices dont M. Castelnuovo a enrichi les leçons, le soin avec lequel ils sont gradués : quelques-uns sont de simples exercices, dans le

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXIV, 1900, p. 170.

sens strict du mot; d'autres sont destinés à augmenter les connaissances du lecteur, s'il veut faire un effort dont il est assurément capable, au point où l'a mené l'auteur; l'intérêt de ces exercices est augmenté par les nombreux renseignements historiques dont ils sont accompagnés. J. T.



NIELSEN (Niels). — Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. 1 vol. in-8, xvi-408 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Il semble, à une époque où les Mathématiques se sont singulièrement développées dans le sens de la généralité et de l'abstraction, qu'un Livre consacré à des fonctions spéciales offre quelque chose de reposant. Ceux qui aiment les propositions précises, les formules élégantes, les belles identités, et les propriétés qui, sans doute, sont particulières, mais dont l'intérêt est dans leur particularité même et dans la façon dont elles caractérisent les fonctions individuelles qui les possèdent, liront avec plaisir le Livre de M. Niels Nielsen. Au reste, il faut reconnaître que les fonctions qu'il a choisies, pour en retracer l'histoire, sont particulièrement riches, et qu'il a notablement contribué à révéler cette richesse. Beaucoup des propriétés que contient ce manuel sont nouvelles, et les nombreuses propriétés que l'on connaissait déjà sont établies, généralisées, rattachées entre elles d'une façon qui appartient à l'auteur. Une longue liste de Mémoires, qui ne tient pas moins de seize pages et qui contient plus de cent cinquante noms, montre, à la fin du Livre, combien la matière a déjà été ouvrée, et quels services les outils qu'on en a tirés ont déjà rendus en Astronomie ou en Physique mathématique.

L'auteur développe successivement les propriétés fondamentales des fonctions cylindriques, des intégrales définies où elles figurent, les développements en séries de fonctions cylindriques des fonctions analytiques ou des fonctions arbitraires.

Bien que ce Livre soit consacré à des propriétés et à des fonctions particulières, c'est sous la forme la plus générale, et à la

lumière de principes généraux, que l'auteur développe les unes et étudie les autres. Son exposition y gagne en intérêt et en simplicité.

J. T.

BURKHARDT (H.). — Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen. Zweite, durchgesehene und teilweise umgearbeitete Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text. 1 vol. in-8°, XII-224 pages. Leipzig, v. Veit; 1903.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition de cet excellent Livre, court et pratique. La première remonte à 1897 (1). Celle-ci est améliorée sur quelques points. Bien que l'auteur reste fidèle, dans son exposition, à la doctrine de Weierstrass, il donne à la conception de Cauchy sur les intégrales prises entre des variables imaginaires une place importante, et il ne pouvait manquer de profiter des travaux récents qui ont montré comment cette conception supposait seulement l'existence de la dérivée de la fonction à intégrer. En adoptant la démonstration dont le principe essentiel est dû à M. Goursat, il n'avait plus besoin de la considération des intégrales doubles ; ce qui lui permettait de simplifier le chapitre où il avait rappelé (sans démonstration) la suite des propositions de la théorie des fonctions d'une variable réelle que le lecteur doit avoir présentes à l'esprit pour bien comprendre son Livre. D'un autre côté, la plupart de ces propositions ayant été établies dans son *Algebraische Analysis*, M. Burkhardt a été amené à remanier complètement cette partie de son Livre, où les démonstrations figurent maintenant.

J. T.

(1) Voir *Bulletin*, t. XXI, p. 179.

CAMPBELL (I.-E.). — INTRODUCTORY TREATISE ON LIE'S THEORY OF FINITE CONTINUOUS TRANSFORMATION GROUPS. 1 vol. in-8, XX-416 pages. Oxford, Clarendon Press, 1903.

Le titre même du Livre de M. Campbell dit assez son utilité et le besoin auquel il répond : les Ouvrages rédigés par Sophus Lie lui-même, ou sous son inspiration directe par M. Engels et M. Scheffers, si admirables qu'ils soient, sont de dimensions (¹) à effrayer un lecteur inexpérimenté; celui-ci a besoin d'un guide pour s'orienter dans ces régions nouvelles; c'est ce guide qu'a voulu fournir M. Campbell; après avoir étudié son Livre, les étudiants pourront recourir sans crainte aux Ouvrages et aux Mémoires originaux; ils se trouveront sur un terrain connu.

Voici, d'après M. Campbell lui-même, l'ordre de l'exposition :

Le premier Chapitre a le caractère d'une Introduction; on s'y efforce de donner au lecteur une idée générale de la théorie des groupes. Le second contient des illustrations élémentaires du principe de l'extension des transformations ponctuelles. Les théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes sont exposés dans les Chapitres III-V. Dans les Chapitres VI et VII on applique cette théorie aux systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. On s'occupe, dans le Chapitre VIII, des invariants associés aux groupes; dans le Chapitre IX, de la division des groupes en classes; puis, dans le Chapitre X, de la condition pour que deux groupes puissent être transformés l'un dans l'autre, et, dans le Chapitre suivant, de l'isomorphisme. Les Chapitres XII et XIII concernent la formation d'un groupe lorsqu'on connaît les constantes de structure. Le Chapitre XIV traite de l'équation de Pfaff et des intégrales d'une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du premier ordre. Le Chapitre suivant est consacré aux systèmes complets de fonctions homogènes. La théorie des transformations de contact est développée dans les Chapitres XVI-XIX; celle des invariants dif-

(¹) Sauf, toutefois, les *Differential-Gleichungen* de M. Scheffers.

férentiels, dans le Chapitre suivant. Dans les Chapitres XXI-XXIV, on montre que, lorsque le nombre de variables ne dépasse pas trois, tous les types de groupes peuvent être obtenus. Enfin, dans le Chapitre XXV, l'auteur étudie les relations entre les systèmes de nombres complexes et certains groupes linéaires.

Ce résumé, si sec qu'il soit, suffira pour montrer au lecteur combien la matière est riche. Les nombreux exemples traités par M. Campbell, la traduction, dans le langage géométrique, des théories abstraites, ne pourront manquer d'intéresser le lecteur.

J. T.

MÉLANGES.

RECHERCHE ANALYTIQUE SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE SECONDE ESPÈCE;

Par M. J. DOLBNIA.

(*Suite et fin.*)

II.

6. Considérons maintenant les intégrales réductibles de seconde espèce dépendant des radicaux des troisième, sixième et quatrième degrés.

Voici un exemple où la réduction s'effectuera à l'aide de la substitution entière. Soit donnée

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x^2+2bx+c)^2}} = u.$$

Il faut choisir la fonction $F(x)$ de manière que

$$(14) \qquad \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x^2+2bx+c)^2}} = \zeta(u, 0, g_3).$$

Posons

$$(15)\qquad x^2 + 2\alpha x + \beta = \lambda \wp'(u, 0, g_3).$$

Pour déterminer le degré k de la fonction $F(x)$, posons $x = \infty$ dans (14) et (15), nous avons alors

$$3k - 2 = 2, \qquad k = \frac{4}{3}.$$

De l'équation (15) nous obtiendrons

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + 2\alpha x + \beta = \lambda \Big(\wp'(u_0) &+ (u - u_0)\,\wp''(u_0) \\ &+ \frac{1}{2}(u - u_0)^2\,\wp'''(u_0) \\ &+ \frac{1}{1.2.3}(u - u_0)^3\,\wp^{\text{IV}}(u_0) + \ldots\Big). \end{aligned} \right.$$

Aux environs du point de ramification

$$x + a = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{3}{2}}.$$

Aux environs des points de ramification

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u'_0)^3.$$

Pour $x = \infty$ nous avons un développement avec la partie principale

$$u^{-\frac{3}{2}}.$$

A l'exception de ces valeurs, x est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan. Par cette raison, pour les valeurs

$$x + a = 0, \qquad x^2 + 2bx + c = 0,$$

nous devons avoir

$$\wp(u_0) = 0.$$

c'est-à-dire

$$p''(u_0) = 0, \qquad p'''(u_0) = 0, \qquad p^{\text{IV}}(u_0) \neq 0;$$

et nous avons

$$(17) \qquad x^2 + 2\alpha x + \beta = \lambda p'(u_0) + \frac{\lambda}{1.2.3}(u - u_0)^3 p^{\text{IV}}(u_0) + \ldots,$$

$$p'(u_0) = \pm\lambda\sqrt{-g_3}.$$

De l'équation (17) nous avons

$$x^2 + 2\alpha x + \beta + \lambda\sqrt{-g^3} = (x + a)^2,$$
$$x^2 + 2\alpha x + \beta - \lambda\sqrt{-g_3} = x^2 + 2bx + c.$$

D'où il suit que

$$\alpha = a = b, \qquad \beta + \lambda\sqrt{-g_3} = a^2, \qquad \beta - \lambda\sqrt{-g_3} = c;$$

par conséquent

$$\beta = \frac{a^2 + c}{2}, \qquad \lambda\sqrt{-g_3} = \frac{a^2 - c}{2}, \qquad \lambda^2 g_3 = -\frac{1}{4}(a - c)^2.$$

Comme $k = \frac{4}{3}$, il faut prendre

$$F(x) = \sqrt[3]{f(x)},$$

$f(x)$ étant une fonction rationnelle. Désignons par $(x - x_0)^\gamma$ un facteur de la fonction $f(x)$ et admettons que $x - x_0 = 0$ n'est pas un point de ramification. De l'équation (14) nous aurons un développement de la forme

$$(x - x_0)^{\frac{\gamma+3}{3}} = A_0(u - v)p(v) + \ldots.$$

et, comme $x - x_0$ doit être une fonction holomorphe aux environs du point

$$x - x_0 = 0,$$

nous devons avoir

$$\gamma = -2,$$
$$x - x_0 = B(u - v)^3 + \ldots.$$

Cette égalité est impossible, il s'ensuit que

$$x - x_0 = 0$$

doit être un point de ramification. En posant

$$x_0 = -a,$$

nous avons

$$\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \qquad \gamma = 2.$$

Admettant maintenant que x_0 est une racine quelconque de l'équation

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

nous devons avoir

$$\frac{\gamma}{3} - \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = 1.$$

Par conséquent

$$f(x) = (x + a)^2 (x^2 + 2bx + c);$$

donc

$$(18) \qquad \int \sqrt[3]{\frac{x - a}{x^2 + 2ax + c}}\, dx = \frac{9}{4} \zeta(u, g_2, g_3).$$

7. Donnons encore un exemple. Soit donnée

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2ax + b)(x^2 + 2rx + s)^2}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle façon que

$$(19) \qquad \int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2ax + b)(x^2 + 2rx + s)^2}} = A \zeta(u, 0, g_3).$$

L'équation (19) nous montre que, aux environs de chacun des points

$$x^2 + 2rx + s = 0,$$

nous aurons un développement de x avec la partie principale u^3. Pour cette raison nous poserons

$$(20) \qquad \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta}{x^2 + 2rx + s} = \lambda \wp'(u, 0, g_3).$$

De l'équation (19) on voit que, aux environs des points

$$x^2 + 2ax + b = 0,$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{\frac{2}{3}}.$$

L'équation (20) nous donne

$$\frac{x^2+2\alpha x+\beta}{x^2+2rx+s} = \lambda\wp'(v) + \lambda(u-v)\wp''(v) + \frac{\lambda}{1.2}(u-v)^2\wp''(v) + \ldots;$$

Il est clair que, aux environs des points

$$x^2+2ax+b=0,$$

nous devons avoir

$$\wp(v)=0, \qquad \wp''(v)=6\wp^2(v)=0, \qquad \wp'''(v)=12\wp(v)\wp'(v)=0;$$
$$\wp'(v)=\pm\sqrt{-g_3}, \qquad \wp^{\text{IV}}(v)\neq 0.$$

En désignant

$$\lambda\sqrt{-g_3}=h,$$

nous obtiendrons

$$x^2+2\frac{\alpha+hr}{1+h}x+\frac{\beta+hs}{1+h}=(x-x_1)^2,$$
$$x^2+2\frac{\alpha-hr}{1-h}x+\frac{\beta-hs}{1-h}=(x-x_2)^2,$$
$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2ax+b.$$

Par conséquent

$$\frac{\alpha+hr}{1+h}+\frac{\alpha-hr}{1-h}=2a,$$
$$\frac{\alpha^2-h^2r^2}{1-h^2}=b.$$

En outre

$$(\alpha+hr)^2=(1+h)(\beta+hs),$$
$$(\alpha-hr)^2=(1-h)(\beta-hs).$$

On peut présenter ces équations de la manière suivante

1° $\alpha-h^2r=a(1-h^2)$,

2° $2\alpha r=\beta+s$,

3° $\alpha^2+h^2r^2=\beta+h^2s$,

4° $\alpha^2-h^2r^2=b(1-h^2)$;

d'où il suit que

(I) $b+s=2ar, \qquad h^2=\dfrac{a-\alpha}{a-r}, \qquad 1-h^2=\dfrac{\alpha-r}{a-r};$

(II) $(\alpha-r)^2=\dfrac{(r^2-s)(\alpha-r)}{a-r}, \qquad \alpha=\dfrac{ar-s}{a-r};$

(III) $\beta=\dfrac{as-br}{r-a}, \qquad \lambda^2g_3=\dfrac{b-a^2}{(r-a)^2}.$

Enfin, faisant $x = \infty$ dans l'équation (20), nous trouvons

$$\lambda p' u = 1, \qquad 2(\alpha - a) = -6\lambda p^2(u);$$

d'où il suit que

$$\lambda = \frac{3^3}{2^4} \frac{1}{(r-a)(r^2-s)}.$$

Par conséquent

$$\frac{(a-r)x^2 - 2(ar-s)x + br - as}{x^2 + 2rx + s} = \frac{3^3}{2^4} \frac{p'(u, 0, g_3)}{(r-a)(r^2-s)}.$$

Il est facile de prouver :

1° Que le degré de $F(x)$ est

$$k = 2;$$

2° Que

$$F(x) = \sqrt[3]{f(x)},$$

où $f(x)$ est une fonction rationnelle;

3° Que $f(x)$ peut renfermer seulement des facteurs $(x - x_0)^\alpha$ pour lesquels $p(u_0) = 0$, c'est-à-dire des facteurs

(a) $$(x^2 + 2ax + b),$$

(b) $$(x^2 + 2rx + s).$$

Si $f(x)$ renferme un facteur $(x - x_0)^j$ du polynome (a), nous avons

$$\frac{j-1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \qquad j = 2.$$

Si $f(x)$ renferme un facteur $(x - x'_0)^i$ du polynome (b), nous avons

$$\frac{i-2}{3} + 1 = 2, \qquad i = 1;$$

donc

$$\int \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2rx + s}}\, dx = A\zeta(u, 0, g_3),$$
$$b + s = 2ar;$$

A est un facteur constant, facile à déterminer.

8. Considérons maintenant les intégrales dépendant des radi-

caux du sixième degré. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^2(x^2+2cx+e)^3}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle manière que

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^2(x^2+2cx+e)^3}} = A\zeta(u, 0, g_3).$$

Au voisinage du point de ramification

$$x-a=0$$

nous avons un développement avec la partie principale u^3; par cette raison supposons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \lambda p^3(u, 0, g_3),$$

$f(x)$ étant un polynome. Nous avons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lambda\left(p(u_0) + (u-u_0)p'(u_0) + \frac{1}{2}(u-u_0)^2 p''(u_0) + \ldots\right)^3.$$

Aux environs du point de ramification

$$x-b=0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u-u_0)^{\frac{3}{2}};$$

par conséquent, prenons

$$p(u_0)=0, \qquad f(x)=(x-b)^2;$$

alors

(21) $$\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2 = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

Aux environs des points de ramification

$$x^2+2cx+e=0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u-u_0)^2.$$

Par conséquent, en prenant

$$\wp'(u_0) = 0, \qquad \lambda \wp^3(u_0) = \frac{1}{4}\lambda g_3 = h,$$

nous aurons

$$\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda g_3 = \frac{3}{2}\wp^2(u_0)\wp''(u_0)(u-u_0)^2 + \ldots;$$

d'où il suit que

$$x^2 + 2\frac{ah-b}{1-h}x + \frac{b^2-a^2h}{1-h} = x^2 + 2cx - e,$$

$$\frac{ah-b}{1-h} = c, \qquad \frac{b^2-a^2h}{1-h} = e,$$

$$h = \frac{1}{4}\lambda g_3 = \frac{b+c}{a+c},$$

$$e = -(ab + bc + ac).$$

Pour $x = \infty$ nous aurons un développement avec la partie principale

$$(u-v)^{-1}.$$

D'autre part, l'équation (21) nous donne

$$(22) \qquad 1 - 2(a-b)\frac{1}{x} + \ldots = \lambda[\wp v + (u-v)\wp' v + \ldots]^3;$$

par conséquent

$$\lambda \wp^3(v) = 1, \qquad 3\lambda \wp^2(v)\wp'(v) = 2(b-a);$$

d'où

$$\lambda = \frac{3^9}{(a-b)^3(a-c)^3};$$

par conséquent

$$g_3 = \frac{2^2}{3^9}(a-b)^3(a-c)(b-c).$$

De l'équation

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^2(x^3-2cx-e)^3}} = A\zeta(u, 0, g_3)$$

nous aurons, pour $x = \infty$, un développement avec la partie principale

$$(u-v)^{\frac{1}{k-1}},$$

k étant le degré de la fonction $F(x)$. D'autre part, l'équation (22) nous donne un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{-1},$$

donc

$$k = 0.$$

L'équation (21) nous montre que x est une fonction holomorphe de u dans toute l'étendue du plan, sauf un seul point

$$x - b = 0,$$

pour lequel nous avons

$$p(u_0) = 0, \qquad p'(u_0) \neq 0.$$

En posant que $F(x)$ renferme le facteur $(x - b)^i$ nous devons avoir

$$i - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \qquad i = \frac{2}{3}.$$

En posant que $F(x)$ renferme le facteur $(x - a)^{i'}$, nous aurons

$$i' - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}, \qquad i' = -\frac{2}{3}.$$

Posons enfin que $F(x)$ renferme $(x^2 + 2cx + e)^{i''}$: alors

$$i'' - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \qquad i'' = 0.$$

Par conséquent

$$F(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{x - b}{x - a}\right)^2}.$$

$$\int \frac{1}{x - a} \sqrt[6]{\frac{(x - b)^2}{(x - a)^2 (x^2 + 2cx + e)^3}}\, dx = A\zeta(u, 0, g_3),$$

A étant une constante, facile à déterminer.

9. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x - a)(x - b)^3 (x - c)^2 x^2}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle sorte que

$$\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt[4]{(x - a)(x - b)^3 (x - c)^2 x^3}} = A\zeta(u, g_2, 0).$$

Aux environs du point $x - a = 0$ nous avons un développement de x avec la partie principale

$$u^{\frac{4}{3}}.$$

Par cette raison, supposons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lambda^2 p^2(u, g_2, 0),$$

$f(x)$ étant un polynome. Nous avons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lambda\left(p(u_0) - (u-u_0)p'(u_0) + \frac{1}{2}(u-u_0)^2 p''(u_0) + \ldots\right)^2.$$

Au voisinage du point $x - b = 0$ nous avons un développement avec la partie principale

$$(u-u_0)^4.$$

D'autre part, si nous prenons

$$p(u_0) = 0,$$

il vient

$$p'(u_0) = 0, \qquad p''(u_0) \neq 0.$$

et alors

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = (u-u_0)^4 \Phi(u),$$

$\Phi(u)$ étant une fonction holomorphe, et

$$\Phi(u_0) \neq 0.$$

Pour cette raison

$$f(x) = (x-b)f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynome. Au voisinage du point $x - c = 0$ nous devons avoir un développement de x avec la partie principale

$$(u-u_0)^2;$$

on peut donc prendre

$$p(u_0) = 0, \qquad p'(u_0) = 0, \qquad p''(u_0) \neq 0,$$
$$f_1(x) = (x-c)^2;$$

et alors nous avons

(23) $$\psi(x) = \frac{(x-b)(x-c)^2}{(x-a)^3} = \lambda p^2(u).$$

Si, dans cette équation, nous prenons

$$4p^2(v) = g_2,$$

il viendra

$$\psi(x) = \frac{1}{4}\lambda g_2 - (u-v)^2 \Phi_1(u),$$

$\Phi_1(u)$ étant une fonction holomorphe, et

$$\Phi_1(v) \neq 0.$$

En outre

$$\psi(x_0) + (x-x_0)\psi'(x_0)$$
$$- \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\psi''(x_0) + \ldots = \frac{1}{4}\lambda g_2 - (u-v)^2 \Phi_1(u).$$

Il est facile de voir que

$$\psi'(0) \neq 0,$$

car $x=0$ est un point de ramification. Il s'ensuit que

$$(x-b)(x-c)^2 - \frac{1}{4}\lambda g_2(x-a)^3 = x(x-\alpha)^2,$$

α étant la racine de l'équation

$$\psi'(x) = 0.$$

Il est facile de prouver que

$$\alpha = \frac{3bc - ac - 2ab}{b - 2c - 3a}.$$

Nous avons

1° $$\frac{1}{4}\lambda g_2 = \frac{bc^2}{a^3};$$

2° $$\frac{2(ac + 2ab - 3bc)}{b - 2c - 3a} = \frac{a(3bc^2 - a^2b - 2a^2c)}{a^3 - bc^2};$$

3° $$\frac{2ab - ac - 3bc}{(b + 2c - 3a)^2} = \frac{a^2c}{a^3 - bc^2}.$$

De ces équations on déduit l'égalité suivante

$$ab - 3bc - 4ac = 0$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante de la réductibilité de notre intégrale.

De l'équation (23) nous avons, pour $x = \infty$, un développement de la forme

$$1 - (3a - b - 2c)\frac{1}{x} + \ldots = \lambda \mathrm{p}^2(v) - 2\lambda \mathrm{p}(v)\mathrm{p}'(v)(u - v) + \ldots;$$

par conséquent

$$\lambda \mathrm{p}^2(v) = 1, \qquad (3a - b - 2c)^2 = 4\lambda^2 \mathrm{p}^2(v)[4\mathrm{p}^3(v) - g_2 \mathrm{p}(v)].$$

Il s'ensuit que

$$\lambda = \frac{2^8(a^3 - bc^2)^2}{a^6(b + 2c - 3a)^4},$$

$$g_2 = \frac{a^3 bc^2(b + 2c - 3a)^4}{2^6(a^3 - bc^2)^2}.$$

Nous avons

$$\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt[4]{(x - a)(x - b)(x - c)^2 x^2}} = \zeta(v) - (u - v)\,\mathrm{p}(v) + \frac{(u - v)^2}{1.2}\mathrm{p}'(v) + \ldots.$$

De ce qui précède on voit que x est une fonction holomorphe de u dans toute l'étendue du plan, sauf un seul point de ramification $x - a = 0$. En supposant que $\mathrm{F}(x)$ renferme le facteur $(x - a)^j$, nous aurons

$$j - \frac{1}{4} + 1 = -\frac{3}{4}, \qquad j = -\frac{3}{2}.$$

De même, il est facile de voir que $\mathrm{F}(x)$ renferme $(x - b)^{\frac{1}{2}}$ et $(x - c)$. Et comme le degré de $\mathrm{F}(x)$ est $k = 0$, nous aurons

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt[4]{\frac{(x - b)^2(x - c)^4}{(x - a)^6}}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\int \frac{1}{x - a}\sqrt[4]{\frac{(x - c)^2}{x^2(x - a)^3(x - b)}}\,dx = \lambda\zeta(u, g_2, 0).$$

Saint-Pétersbourg, 17-30 décembre 1903.

SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION SIMPLE FONDAMENTALE ET DE L'EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DES TEMPÉRATURES, DANS LE PROBLÈME DU REFROIDISSEMENT ;

Par M. J. BOUSSINESQ.

I. On sait comment Fourier, dans le problème du refroidissement des corps, a mis l'expression générale de leur température u sous la forme d'une série, dont les termes, dits *solutions simples*, sont, chacun, le produit d'une constante arbitraire, changeante avec l'état initial, par un facteur U, fonction des coordonnées x, y, z, et par une exponentielle décroissante, e^{-mt}, où figure le temps t, ces fonctions U et les coefficients d'extinction m dépendant uniquement de la configuration ainsi que de la nature du corps, et les valeurs de m étant de plus en plus grandes à mesure qu'on avance dans la série. D'ailleurs, si l'on se borne aux cas effectivement traités par Fourier et ses successeurs, il correspond toujours, à la valeur de *m la plus petite,* une fonction U *unique* et *de même signe* dans tout le corps, donnant ainsi une solution simple C U e^{-mt}, dite *fondamentale*, qui, à elle seule, *sans autre arbitraire que* C, exprime la température *asymptotiquement*, c'est-à-dire quand le temps t devient très grand : au contraire, pour les autres valeurs de m, le facteur U change de signe dans l'intérieur du corps et admet, *parfois,* plusieurs formes, ou donne *plusieurs* solutions simples comportant tout autant de constantes arbitraires, quoique à exponentielle e^{-mt} commune. Après un important Mémoire de M. Schwarz, où était traitée par une minutieuse et profonde analyse la question tout à fait analogue des vibrations transversales d'une membrane, M. Poincaré, en observant que la température u reste indéfiniment supérieure à zéro *partout* lorsqu'elle l'était au début, a fait voir, synthétiquement, qu'une telle solution simple, *à signe invariable*, existe, en effet, pour tout corps, et y correspond *à la plus petite valeur de m.* D'autre part, M. Picard a démontré, dans le cas d'une plaque mince, athermane, homogène et isotrope, à bases imperméables, ayant son contour maintenu à la température zéro, que

deux solutions distinctes, pour cette valeur de m la plus petite, sont impossibles, par suite de ce fait, établi au moyen d'une délicate analyse, que l'enlèvement d'une fraction quelconque de la plaque ferait croître cette valeur m ; car, si deux solutions simples étaient possibles pour la valeur de m la plus petite, l'une d'elles devrait, comme on sait, changer de signe, en *s'annulant*, sur une certaine surface tracée dans le corps, suivant laquelle on pourrait, dès lors, le limiter *sans faire croître m*.

Mais une démonstration générale et simple de cette unicité de la solution fondamentale paraissait manquer encore. Je me propose de la donner ici, pour tout corps, hétérogène, à contexture symétrique (c'est-à-dire admettant un potentiel des flux de chaleur), et à surface ou intérieur rayonnants. Je supposerai même d'abord, fonctions non seulement de x, y, z, mais aussi du temps t, les divers coefficients spécifiques, savoir, la capacité ρ, les six conductibilités intérieures a, b, c, d, e, f, la conductibilité superficielle k et le pouvoir rayonnant k_1 (1).

II. On aura comme équation indéfinie du problème

$$\frac{d.\rho u}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} - k_1 u, \tag{1}$$

où les trois flux F_x, F_y, F_z recevront les expressions

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= a\frac{du}{dx} + f\frac{du}{dy} + e\frac{du}{dz}, \\ F_y &= f\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + d\frac{du}{dz}, \\ F_z &= e\frac{du}{dx} + d\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et où, d'ailleurs, par suite de ce fait que la chaleur traverse les

(1) Cette hypothèse, de propriétés calorifiques variables avec le temps, ne serait, peut-être, guère utile dans la question proprement dite du refroidissement; mais elle est indispensable dans des problèmes analogues offerts par la théorie de la *filtration*. On peut *voir*, à ce sujet, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1904 (pages 49 et 63), les paragraphes IX et X de mes *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources;* une Note du paragraphe X (page 69) contient l'indication de la démonstration que je donne ici.

surfaces isothermes en allant du côté chaud au côté froid, le potentiel des flux de chaleur,

$$(3) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left(F_x \frac{du}{dx} + F_y \frac{du}{dy} + F_z \frac{du}{dz}\right),$$

sera un polynome, homogène en $\frac{du}{d(x, y, z)}$, *essentiellement positif.*

Si l'on mène, *de l'intérieur*, sous la surface σ du corps, une petite normale dn à un élément $d\sigma$ quelconque, et que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ soient les trois cosinus directeurs de celle-ci, le flux F_n de chaleur qui pénétrera du dehors, à travers $d\sigma$, admettra, par unités d'aire et de temps, l'expression

$$(4) \qquad F_n = F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma,$$

et, la température extérieure restant nulle, l'on aura, si k désigne la conductibilité superficielle de cet élément $d\sigma$, la relation définie spéciale

$$(5) \qquad F_n = -ku \qquad \text{(à la surface)}.$$

Enfin la capacité calorifique ρ sera positive. Quant aux deux coefficients k, k_1, ils le seront également : mais les démonstrations suivantes subsisteraient quand même ils deviendraient négatifs.

III. Rappelons d'abord comment on reconnaît qu'il existe, pour u, certaines valeurs à signe uniforme dans tout le corps et invariable de $t = 0$ à $t = \infty$, positif par exemple, ou, en d'autres termes, des valeurs ne s'annulant nulle part dans le corps, si ce n'est *asymptotiquement,* pour t infini. Il suffit, à cet effet, d'imaginer que, pour $t = 0$, la température u, alors arbitraire, soit choisie partout positive. Elle ne pourrait, à un moment donné, *s'abaisser* jusqu'à zéro, au point du corps où elle descendrait *le plus*, sans que ce point, dès lors entouré d'autres plus chauds, ou de surfaces isothermes à températures croissantes de l'une à l'autre, en reçût de la chaleur. Le produit ρu serait donc en train d'y croître, et non d'y arriver à zéro. Le raisonnement s'applique même au cas où le point du corps le plus refroidi, et censé ainsi atteindre au zéro, appartiendrait à la superficie σ, ou ne serait plus, par suite, entouré *complètement* de surfaces isothermes à

températures croissantes; car, du côté du dehors où ces surfaces se trouveraient interrompues, aucune perte de chaleur ne pourrait se produire (quel que fût le signe de k), puisque la température extérieure est constamment nulle.

Nous appellerons *fondamentale*, et nous représenterons par u', une telle solution du système (1) et (5), continue et différente de zéro (positive par exemple) dans tout le corps. Le quotient de toute autre solution, u, par celle-là u', sera donc une fonction v de x, y, z, t *partout finie et continue* comme u' et u eux-mêmes, *contrairement à ce qui arriverait si u' n'était pas une solution fondamentale* et que, par suite, v devînt *infini* sur les surfaces *intérieures* où u' s'annulerait.

IV. Cela posé, appelons F'_x, F'_y, F'_z, φ', F'_n ce que deviennent F_x, F_y, F_z, φ, F_n quand on y remplace u par u'; puis retranchons, des deux relations (1) et (5) multipliées par u', les relations analogues en u', multipliées par u. Si l'on observe que, vu la manière dont se présente deux fois, dans (2), chacune des conductibilités indirectes d, e, f, l'on a identiquement

$$(6)\qquad F_x\frac{du'}{dx}+F_y\frac{du'}{dy}+F_z\frac{du'}{dz}=F'_x\frac{du}{dx}+F'_y\frac{du}{dy}+F'_z\frac{du}{dz},$$

il viendra

$$(7)\quad\begin{cases}\varphi\left(u'\dfrac{du}{dt}-u\dfrac{du'}{dt}\right)\\ \qquad=\dfrac{d(u'F_x-uF'_x)}{dx}+\dfrac{d(u'F_y-uF'_y)}{dy}+\dfrac{d(u'F_z-uF'_z)}{dz},\\ u'F_n-uF'_n=0\qquad\text{(à la surface).}\end{cases}$$

Or, introduisons, au lieu de u, dans les expressions (2) et (4) de F_x, F_y, F_z, F_n, le quotient v de u par u'; et appelons $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, $\mathfrak{F}_n$ ce que deviennent alors ces expressions. Il est clair que les différences $u'F_x-uF'_x$, ..., $u'F_n-uF'_n$ auront précisément les valeurs $u'^2\mathfrak{F}_x$, ..., $u'^2\mathfrak{F}_n$; en sorte que les équations (7), amenées à contenir v au lieu de u, s'écriront

$$(8)\quad\varphi u'^2\frac{dv}{dt}=\frac{d.u'^2\mathfrak{F}_x}{dx}+\frac{d.u'^2\mathfrak{F}_y}{dy}+\frac{d.u'^2\mathfrak{F}_z}{dz},\ \text{(à la surface)}\quad u'^2\mathfrak{F}_n=0.$$

Multiplions la première (8), équation indéfinie, par la fonction

partout continue v, et par l'élément $d\varpi$ de volume; puis intégrons les résultats à la manière ordinaire, dans toute l'étendue ϖ du corps, en tenant compte de la seconde équation (8); nous aurons, grâce à d'évidentes intégrations par parties dans le second membre, et en appelant ψ ce que devient le potentiel φ des flux de chaleur quand on y substitue v à u,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\varpi} \rho u'^2 \frac{d.v^2}{dt}\, d\varpi \\ &= -\int_{\varpi} u'^2 \left(\bar{\mathfrak{F}}_x \frac{dv}{dx} + \bar{\mathfrak{F}}_y \frac{dv}{dy} + \bar{\mathfrak{F}}_z \frac{dv}{dz}\right) d\varpi = -2\int_{\varpi} u'^2 \psi\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

V. Le dernier membre de cette équation est essentiellement négatif et, en outre, de grandeur notable tant que ψ n'y devient pas voisin de zéro, c'est-à-dire tant que v a ses dérivées en x, y, z sensibles dans une portion notable quelconque du corps. Or, le premier membre, égal, montre qu'alors la fonction v^2 sera tenue d'avoir la valeur moyenne (convenablement définie) de sa dérivée en t, négative et de grandeur sensible. Donc, le quotient v tend à avoir ses dérivées en x, y, z nulles, ou à être constant dans tout le corps, son carré v^2 ne pouvant continuer indéfiniment à décroître, en moyenne, avec une rapidité notable, sans s'abaisser au-dessous de zéro, qui est pourtant sa limite inférieure.

Il y a, d'ailleurs, corrélation stricte entre l'annulation de ψ, ou la proportionnalité de u à u' dans tout le corps, et la constance, à toute époque, du coefficient v de cette proportionnalité; car, dans le premier membre de (9), alors nul comme le troisième et où v^2 est indépendant de x, y, z, la dérivée de v^2 en t sort du signe $\int$; et l'équation, résolue par rapport à cette dérivée, lui attribue la valeur zéro. En conséquence, dès que le *mode de distribution* des valeurs de u devient, sensiblement, celui des valeurs de u', u et u' ne peuvent manquer de varier, à très peu près, pareillement en fonction de t, comme il était, du reste, évident par les équations mêmes (1) et (5) du problème.

Soit donc γ la valeur uniforme, dès lors invariable, dont v finit ainsi par ne différer qu'extrêmement peu; et l'on aura, *asymptotiquement*,

$$(10)\qquad v = \gamma \qquad \text{ou} \qquad u = \gamma u' \qquad (\text{pour } t \text{ très grand}).$$

Supposons, maintenant, qu'on ait pu décomposer l'intégrale particulière u' en solutions *simples*, classées d'après leur rapidité d'évanouissement de plus en plus grande [1]; et soit u_1 la première d'entre elles, c'est-à-dire la plus lente à s'éteindre, ou la seule relativement perceptible pour t assez grand. Il viendra bien, comme expression asymptotique de l'intégrale quelconque u,

$$u = \gamma u_1 \qquad \text{(pour } t \text{ très grand)}, \tag{10 bis}$$

à moins que, toutefois, l'état initial *choisi* n'annule la constante γ et ne laisse le rôle prédominant à quelque solution simple plus rapidement évanouissante que u_1.

Cette formule (10 *bis*), en tant qu'impliquant seulement, pour t assez grand, de très petites erreurs *relatives* sur u quand γ n'est pas nul, subsisterait même si la conductibilité superficielle k et le pouvoir rayonnant k_1 de l'intérieur étaient négatifs. Alors la moyenne des valeurs de u_1 aux divers points du corps s'éloignerait de zéro, au lieu d'y tendre, puisque le corps recevrait, du milieu froid ambiant, d'autant plus de chaleur qu'il serait déjà plus chaud. La première solution simple au moins, c'est-à-dire u_1, serait donc croissante avec t : autrement dit, dans le cas usuel où les propriétés calorifiques sont indépendantes du temps et où les solutions simples ont la forme $\mathrm{CU}e^{-mt}$, le premier et plus grand, au moins, des coefficients $-m$ du temps dans les exponentielles successives e^{-mt}, serait positif.

VI. La démonstration devient justement plus précise dans ce cas, savoir, quand les paramètres spécifiques ρ, a, b, c, d, e, f, k, k_1 sont indépendants du temps t et quand, de plus, u' se réduit à la solution simple u_1, alors produit d'une exponentielle en t, $e^{-m_1 t}$, par une fonction U_1 des coordonnées. Le facteur commun $e^{-2m_1 t}$ peut être supprimé des trois membres de (9), et la formule

[1] On réussit parfois à former ces solutions simples, quoiqu'elles ne soient plus, en général, le produit d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées. On peut voir à ce sujet, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1904 (Fascicule I), les nos 36 à 43 de mes *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources*.

subsistante revient à

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\varpi} \rho U_1^2 \frac{v^2}{2}\, d\varpi = -2\int_{\varpi} U_1^2 \psi\, d\varpi.$$

L'intégrale qui figure au premier membre ne pouvant s'abaisser au-dessous de son minimum nul, on voit que ψ tendra nécessairement vers zéro, ou v vers une valeur γ uniforme et dès lors constante; d'où suivra bien la formule asymptotique (10 *bis*).

La tendance de la fonction v vers la valeur fixe γ exprime, au point de vue physique, l'*égalisation finale* de températures intérieures prises initialement égales à v, qui se produirait, conformément au principe de l'équilibre de température, si la surface σ devenait imperméable aux radiations calorifiques. Car les deux équations (8), en v, où l'on remplacera u'^2 par $e^{-2m_1t}U_1^2$, avec suppression, partout, du facteur commun e^{-2m_1t}, sont les équations mêmes régissant la température, dans le corps censé privé des deux pouvoirs rayonnants k_1, k de ses particules tant intérieures que superficielles, mais où la capacité ρ et les conductibilités internes a, b, c, d, e, f se trouveraient multipliées par U_1^2.

En d'autres termes, *quand on suppose les propriétés calorifiques indépendantes du temps, la substitution du quotient v à u, comme fonction inconnue, dans les équations du refroidissement, ramène ce problème général du refroidissement à la question plus particulière du nivellement de la température dans un certain corps géométriquement identique au proposé, mais athermane et à surface imperméable* [1].

VII. L'équation (11) et, par suite, la formule (10 *bis*) qui s'en

[1] L'analogie entre les deux tendances respectives du quotient v vers une valeur uniforme constante, et des températures à s'égaliser dans un corps isolé calorifiquement, disparaît quand la capacité ρ devient fonction du temps t. Car, alors, la double hypothèse de l'athermanéité du corps et de l'imperméabilité de sa surface n'entraîne plus l'uniformité et la constance finales de sa température : en effet, ce nivellement existât-il à une époque donnée t, que les températures u continueraient à varier, l'équation (1) annulant, alors, non pas la dérivée en t de u, mais seulement celle de la quantité de chaleur ρu, possédée par l'unité de volume. Et, cependant, l'équation (9) astreint bien, même dans ce cas, autant qu'on peut en juger, les intégrales u à tendre vers une forme symptotique commune, indiquée par (1

déduit, s'étendent, presque sans modification, au cas un peu plus général où la capacité ρ serait le produit d'une fonction τ du temps, initialement égale à 1, par une fonction des coordonnées, et où les conductibilités a, b, c, d, e, f, k, ainsi que le pouvoir rayonnant k_1, seraient également les produits d'une autre fonction, τt, du temps, commune à ces paramètres physiques, par tout autant de fonctions des coordonnées. En appelant $\rho\tau$ et aτt, bτt, cτt, dτt, eτt, fτt, $k\tau$t, $k_1\tau$t, ces quantités où ρ, a, b, c, d, e, f, k, k_1 pourraient être censées les fonctions de mêmes noms du cas précédent, et en écrivant aussi $\tau t F_x$, $\tau t F_y$, $\tau t F_z$, $\tau t F_n$ les flux de chaleur, où F_x, F_y, F_x, F_n et, par suite, φ, garderaient dès lors les expressions respectives (2), (4) et (3), on aurait évidemment comme équations du problème, au lieu de (1) et (5), après division par τt :

$$(12)\qquad \frac{\rho}{\tau t}\frac{d.\tau u}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} - k_1 u,$$

$$(13)\qquad F_n = -ku \qquad \text{(à la surface)}.$$

Et l'on y satisferait, à partir d'un état initial donné, en remplaçant simplement, dans la solution générale en série, $u = \Sigma C e^{-mt} U$, censée obtenue dans le cas précédent pour le même état initial, l'exponentielle e^{-mt} par la fonction T du temps dont l'expression est

$$T = \frac{1}{\tau} e^{-m\int_0^t t\,dt},$$

fonction à valeur initiale 1 comme e^{-mt} mais vérifiant, au lieu de l'équation différentielle $T' = -mT$, celle-ci un peu moins simple

$$(14)\qquad \frac{d.\tau T}{dt} = -m t \tau T.$$

Il est clair, en effet, que la série $u = \Sigma CTU$ aura la valeur initiale voulue ΣCU, qu'elle satisfera, en outre, par chacun de ses termes, à la condition (13), restée la même, après suppression du facteur commun T, que dans le cas où τ, t, T se réduisent à 1, 1, e^{-mt}, enfin que, grâce à (14), chacune des solutions simples CTU, ou simplement TU, réduira le premier membre de (12) à $-m\rho TU$,

et rendra cette équation, divisée finalement par T, identique à ce qu'elle est quand τ et t ont la valeur 1.

Dès lors, si l'on appelle T_1 la première valeur de T, celle qui remplace $e^{-m_1 t}$, la substitution de $T_1 U_1$ à u', dans (9) où ρ et ψ seront devenus $\tau\rho$ et $\tau \mathrm{t} \psi$, donnera, après suppression des facteurs communs aux deux membres,

$$(15) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\varpi} \rho U_1^2 \frac{v^2}{2}\, d\varpi = -2\mathrm{t}\int_{\varpi} U_1^2 \psi\, d\varpi.$$

Telle sera donc l'équation qui remplacera (11) : elle comporte évidemment la même conséquence (10 *bis*).

Remarquons encore que, si l'on appelle θ la fonction primitive $\int_0^t \mathrm{t}\, dt$ de t, l'expression ΣCTU de u, multipliée par τ, devient $\Sigma C e^{-m\theta} U$, c'est-à-dire identique, sauf le remplacement de t par θ, à celle de u dans le cas précédent, où le corps avait ses propriétés calorifiques indépendantes du temps. Ainsi, le cas actuel s'y ramène par les simples substitutions de τu à u et de θ à t. On l'aurait, du reste, immédiatement reconnu sur les équations (12) et (13), multipliées par τ, en y remplaçant $\mathrm{t}\, dt$ par $d\theta$: ce qui aurait dispensé des précédents calculs.

VIII. Revenant maintenant au cas de propriétés calorifiques indépendantes du temps, supposons que l'intégrale u soit elle-même une solution simple, dès lors de la forme $e^{-mt}U$: v sera le produit $e^{-(m-m_1)t}\frac{U}{U_1}$; et, si l'on appelle Ψ ce que devient ψ par la substitution de $\frac{U}{U_1}$ à v, l'équation (11) prendra, presque immédiatement, la forme

$$(16) \qquad (m - m_1)\int_{\varpi} \rho U^2\, d\varpi = 2\int_{\varpi} U_1^2 \Psi\, d\varpi.$$

Pour toute fonction U distincte de U_1, c'est-à-dire ne réduisant pas leur quotient à une constante ou n'annulant pas Ψ, il est clair que cette formule donnera $m > m_1$. Ainsi, au premier coefficient m_1 d'extinction, il correspond bien la fonction unique U_1.

IX. Observons, enfin, que la formule générale (9) permet-

trait de traiter avec toute la netteté désirable, dans le cas général de propriétés calorifiques dépendant du temps, la question de l'unité de la solution que comporte le problème du refroidissement à partir d'un état initial donné, ou, ce que l'on sait revenir au même, la démonstration de ce fait que, si, à l'époque $t = 0$, la fonction u est nulle dans tout le corps, elle ne pourra cesser, à aucun moment ultérieur, de s'y annuler. En effet, le quotient v est alors supposé nul, identiquement, pour $t = 0$; et son carré v^2 ne pourrait cesser de l'être, au point quelconque (x, y, z) du corps, qu'en devenant positif, c'est-à-dire en ayant sa dérivée en t positive. Donc, les deux membres de l'égalité (9), s'ils s'écartaient de zéro, devraient prendre signes contraires, savoir, signe positif au premier membre et signe essentiellement négatif au second : ce qui est impossible.

Cette démonstration est préférable à celle, un peu plus simple, que j'ai donnée au n° 99 de mes *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, etc. (t. I, p. 184 à 187), parce que, la conductibilité extérieure k et le pouvoir rayonnant k_1 ne figurant pas dans (9), elle comprend le cas où ces coefficients seraient négatifs [1].

---

[1] La présente Note, dont un extrait a été inséré, le 15 février 1904, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. CXXXVIII, p. 402), complète, comme on voit, par ses n°s IV à VIII, la question de l'unicité de la solution fondamentale, que j'avais discutée, mais sans la résoudre d'une manière générale, vers la fin de la XVIe de ces Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (t. I, p. 254) : elle remplacerait avantageusement leur page 255.

On remarquera que la démonstration, donnée dans la XVe des mêmes Leçons (t. I, n°s 123 et 124, p. 238 à 243), de la forme $e^{-mt}U$ des solutions simples, est indépendante, comme les équations (8) en v, des deux pouvoirs *rayonnant* et *émissif* k_1 et k : elle s'applique donc quels que soient leurs signes, ainsi que nous l'avons admis ci-dessus, à la fin du n° V.



BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Braunmühl (A. v.). — *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* 2e Partie. Von der Erfindg. der Logarithmen bis zur Gegenwart. Gr. in-8°, xi-264 p. avec 39 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

Encyklopadie *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* III. Bd. *Geometrie.* Red. von W. Fr. Meyer. 2e Partie, 1er fascicule. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. 80 pf.

Guldberg (N.-S.). — *Sur la résolution des équations trinomes.* In-8°. Christiania, Dybwad. 1 kr. 20 ö.

Millar (W.-J.). — *Latitude and longitude, how to find them.* 2e éd. In-8°, 64 p. avec diagr. London, Griffin. 5 sh.

Mitteilungun *der mathematischen Gesellschaft in Hamburg.* 4 Bd. 1. Heft. Redig. von Repsold, Schröder u. Busche. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

Reynolds (O.). — *Papers on mechanical and physical subjects. Sub-Mechanics of the Universe.* In-8°, 272 p. London, Clay. 10 sh. 6 d.

Strutt (J.-W.) — (Lord Rayleigh). *Scientific Papers.* Vol IV (1892-1901). In-8°, 618 p. avec portrait. London, Clay. 15 sh.

Baur (Emil). — *Chemische Kosmographie.* Vorlesungen. Gr. in-8°. 228 p. avec fig. München, Oldenbourg. 4 m. 50 pf.

Bouvart (C.) et A. Ratinet. — *Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales.* 2e éd. In-8° obl., 128 p. Paris, Hachette et Cie. 2 fr.

Forsyth (A.-R.). — *Treatise on differential equations.* 3e édit. In-8°, 528 p. London, Macmillan. 14 sh.

Jouffret (E.). — *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et Introduction à la Géométrie à n dimensions.* In-8°, xxx-216 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 7 fr. 50.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung II. Theil : Integral Rechnung. 1 vol. in-8°, xx-666 pages. Hanovre, Helwingsche Buchhandlung, 1903.

Il nous suffira évidemment de signaler cet Ouvrage dont le mérite est suffisamment attesté par ce fait qu'il est parvenu à sa 8e édition. L'auteur a apporté à cette nouvelle édition un grand nombre d'améliorations de détail; il l'a aussi enrichie de Tables nouvelles, parmi lesquelles nous signalerons celles qui donnent les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

G. D.

MARCOLONGO (R). — Teoria mathematica dell' equilibrio dei corpi elastici. 1 vol. in-12, xiv-366 pages. Milan, Ulrico Hoepli, 1904.

La collection des manuels Hoepli vient de s'enrichir d'un nouveau Volume qui sera très utile aux personnes qui cultivent la Physique mathématique et aux étudiants en Sciences appliquées.

En quelques pages très claires bien qu'un peu condensées, l'auteur a su présenter les principes fondamentaux d'une théorie d'une importance capitale pour les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs auxquels est nécessaire la connaissance des principes rigoureux de la théorie de l'Élasticité.

Trois Chapitres d'introduction mathématique rendent la lecture du livre possible et fructueuse pour ceux qui n'ont pu acquérir des connaissances étendues en Analyse et en Mécanique. Une réunion de nombreuses données numériques et une abondante bibliographie des travaux et des mémoires originaux accroissent la valeur de ce petit Volume qui figurera dignement dans la collection Hoepli.

BEGHIN (A.). — Règle a calculs. Instruction, applications numériques, Tables et formules. 3e édition, 1 vol. in-8°; XI-128 pages. Paris, Béranger, 1904.

La règle à calcul de M. Beghin, qui, d'après l'auteur, donne une approximation deux fois plus grande que les règles ordinaires, se compose d'une règle proprement dite, d'une réglette mobile et d'un curseur en verre.

La règle porte deux échelles : une allant de 10^n à 10^{n+1}, l'autre de $10^n\sqrt{10}$ à $10^{n+1}\sqrt{10}$. La réglette possède les mêmes échelles et de plus une échelle placée en son milieu, identique à l'échelle inférieure, mais renversée, c'est-à-dire graduée de 10^{n+1} à 10^n. Le revers de la réglette comprend aussi trois échelles ; deux donnent les arcs dont les sinus ou les tangentes sont les nombres de l'échelle inférieure et une troisième porte les carrés des nombres figurés sur les échelles de la règle. Les logarithmes des nombres de l'échelle inférieure sont inscrits sur la tranche non biseautée de la règle ainsi que les diviseurs d'un usage courant.

Le Volume dont nous annonçons la troisième édition contient, outre la description qu'on vient de lire, d'intéressants détails sur le maniement de l'instrument et sur son application à une foule de questions tant théoriques que pratiques. Ces dernières se rapportent principalement à la comptabilité, aux mesures usuelles, à la mécanique appliquée, à l'électricité industrielle, aux industries textiles. A la fin du Volume on trouvera diverses Tables, des listes de nombres usuels, des Tableaux de formules pratiques.

J. T.

FORT (O.) et SCHLÖMILCH (O.). — Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erstes Teil. Analytische Geometrie der Ebene. Siebente Auflage, besorgt von *H. Heger*. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. 1 vol. in-8, XVII-268 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Cette septième édition d'un Livre élémentaire qui se recommande par ses qualités de clarté et de simplicité a été revue par

M. Heger, qui, sans changer le caractère du Livre de MM. Fort et Schlömilch, a apporté plusieurs améliorations de détail.

J. T.

ROBIN (G.). — Œuvres scientifiques, réunies et publiées, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par *L. Raffy* : Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre. 1 vol in-8°, vi-215 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Gustave Robin n'était pas seulement un excellent mathématicien, mais un esprit ouvert et cultivé; peut-être tenait-il plus à ses vues philosophiques, à la façon dont il était parvenu à grouper ses idées et à concevoir l'ensemble de la Science qu'à ses travaux particuliers, dont la rare distinction a cependant frappé tous ceux qui les ont étudiés. Qu'il ait été préoccupé de constituer, au moins pour lui, une exposition logique et claire des principes de l'Analyse, qu'il ait, aussi nettement que qui que ce soit, vu que le concept de nombre entier devait être l'élément essentiel de cette exposition, c'est ce qui n'a rien d'étonnant.

Il n'a toutefois rien écrit de lui-même sur ce sujet. Pendant les vacances de 1894, il s'est plu à en exposer les diverses parties à M. Raffy, à l'ami qui devait lui survivre et consacrer tant de piété active à publier ses œuvres. Nous avons sûrement, dans la *Théorie nouvelle des fonctions*, la pensée de Robin fidèlement recueillie, disposée dans un ordre logique, intelligemment interprétée et réalisée, en quelque sorte, dans les détails, dont je ne m'arrêterai pas à louer la perfection. Au reste, ce n'était pas la première fois que ce sujet revenait dans la conversation des deux amis, et M. Raffy nous dit, dans l'Avertissement, que, dès le lycée, où ils étaient camarades, ils étaient d'accord sur ce principe que « l'Analyse mathématique doit être constituée avec la seule idée de nombre, c'est-à-dire avec les entiers et les fractions, et que les prétendus nombres irrationnels, purs symboles de grandeurs géométriques incommensurables, doivent en être exclus ». Le travail de Robin sera lu avec un vif intérêt par les philosophes qui ont

une suffisante culture mathématique, comme par les mathématiciens qui ont le goût de la rigueur et qui sont assez philosophes pour aimer à suivre une pensée jusqu'au bout.

En raison même du respect avec lequel j'entends parler de ce travail, je ne dois pas cacher ici que je ne suis pas d'accord avec les auteurs sur le but à atteindre : j'estime comme eux que l'Analyse doit reposer sur l'idée de nombre entier, étant bien entendu que l'idée de nombre entier implique cette proposition « la suite des nombres entiers est illimitée » et cette possibilité de répéter indéfiniment une même opération ou un même raisonnement sur laquelle M. H. Poincaré a si vigoureusement insisté dans le premier Chapitre de *La Science et l'hypothèse*. Je laisse de côté, parce que cela me mènerait trop loin et jusqu'à un point où je ne serais pas assuré de m'exprimer clairement, les réserves que je suis disposé à faire sur la façon dont les auteurs ont rejeté tout infini actuel. Mais, en admettant leur point de départ, je regarde comme légitime et souhaitable de poursuivre l'adaptation parfaite du nombre à notre intuition du temps et de l'espace, tout en montrant que cette intuition, qui nous guide en fait, n'est pas logiquement indispensable à la constitution de l'analyse, qu'on peut substituer une pensée purement numérique au langage géométrique et que, en conservant ce langage, on peut arriver à ne penser qu'en nombres, de même que le géomètre, tout en s'aidant de la figure grossière qu'il a tracée, sait raisonner sur une figure idéale. De ce point de vue, l'Analyse et la Géométrie apparaissent comme une science unique, se servant des mêmes mots, avec des significations dont on ne saurait dire qu'elles sont essentiellement différentes, puisqu'elles se recouvrent mutuellement, qu'on peut traduire exactement l'une dans l'autre, lorsque l'on est en possession du dictionnaire. Le développement de l'Analyse reste conforme à son origine historique; mais son point de départ est maintenant si simple, et la liaison d'une proposition à celle qui la suit si rigoureuse, que rien n'en peut être contesté. A son tour, grâce à son absolue précision, l'Analyse nous permet d'inventorier sans erreur les richesses obscures de notre intuition spatiale, d'en démêler les postulats; elle distingue et purifie notre concept de l'espace géométrique, déjà si purifié de nos sensations visuelles et tactiles.

S'il est vrai que la parfaite adaptation du nombre à la grandeur soit le but, il convient d'accepter les formes de langage qui facilitent cette adaptation, de rejeter celles qui la compliquent ou l'éloignent; de ne pas regarder uniquement le nombre en lui-même, de ne pas tout sacrifier aux apparences logiques que suggère cette contemplation exclusive. On ne sort pas du domaine du pur nombre parce que l'on se laisse guider dans ce domaine; je veux bien qu'il y ait à cela quelque modestie, mais, même avec un guide, on peut être sûr de soi.

Les auteurs ne veulent pas prononcer le mot de nombre irrationnel; ils introduisent, à peu près comme le fait M. Méray, des suites convergentes, formées de nombres rationnels : les unes auront une limite rationnelle; les autres, non. Ils appellent ces dernières des suites irrationnelles et, partout où d'autres emploieraient le mot « nombre irrationnel », ils remplacent le défini par la définition. Cela, à coup sûr, est légitime, et cela a cet avantage que le lecteur ne risque pas d'oublier la définition et de se payer de mots. Voudra-t-on, pour cet avantage, rejeter toutes les définitions? La rédaction deviendrait bien difficile et il a fallu ici tout le talent de celui qui s'en est chargé pour que cette rédaction ne fût pas alourdie.

Mais les auteurs ne veulent pas que la suite définisse le nombre irrationnel, parce que celui-ci n'a pas d'existence propre, et qu'il n'est rien en dehors de la suite. Je le veux bien; la définition du nombre irrationnel sera la définition, non d'un objet, mais d'un mot; moins que cela encore, elle sera l'explication de la façon dont il convient d'employer ce mot, de l'usage légitime qu'on peut en faire, de son entrée dans une langue qui ne le comportait pas d'abord et dont les formes habituelles ne seront pas troublées par cette introduction; elle sera l'explication et la justification d'une notation commode. Parce qu'une notation n'est jamais nécessaire, est-ce une raison pour dire que l'étude d'une notation est sans objet?

Quel inconvénient y a-t-il à employer le mot « nombre irrationnel », s'il est entendu que toutes les fois qu'on parle d'un nombre irrationnel, c'est à une suite qu'il faut penser et aux suites équivalentes à celles-là? Pourquoi refuser de dire que la suite a une *limite,* s'il est entendu que, toutes les fois que, pour parler

le langage des auteurs, cette suite est irrationnelle, on veut dire simplement qu'elle est convergente et qu'elle n'a pas de limite rationnelle?

Les auteurs rejettent la notion de limite parce qu'elle a, disent-ils, une origine géométrique. En fait, cela n'est guère douteux, mais, en fait aussi, aurions-nous la notion du nombre, même du nombre entier, si nous n'avions pas la notion de l'espace et du temps? Une fois la notion de nombre acquise et, en quelque sorte, individualisée, séparée de ce qui lui a donné naissance, ou seulement l'occasion de naître, la notion de suite convergente est aisée à construire, en dehors de toute géométrie; on y est conduit par des problèmes purement numériques, et si l'on ne met rien de plus sous le mot « limite » que sous les mots « suite convergente », il n'y a pas à se préoccuper de l'origine géométrique de la notion de limite.

Ce n'est pas la crainte puérile d'un mot qui a pu faire reculer un penseur comme Robin, c'est la crainte de l'*infini*, qui est autrement sérieuse. Dans toute suite, les auteurs tiennent à s'arrêter; à s'arrêter aussi loin qu'il voudront, mais enfin à s'arrêter; il leur faudra, pour cela, remplacer par des inégalités les égalités que l'on prétend que le soi-disant nombre irrationnel vérifie, en vertu de la définition des opérations à effectuer sur ce nombre, ou plutôt sur les termes de la suite dont il est le nom. Qu'à cela ne tienne! Ce n'est pas, en fait, sur un nombre irrationnel que l'on calcule, mais bien sur des valeurs approchées; en fait, ce n'est pas à des égalités qu'on a affaire, mais à des inégalités; en ne parlant jamais que de celles-là, les auteurs estiment donc qu'ils se rapprochent de la réalité.

Il est à peine besoin de dire que cette vue est parfaitement juste, qu'elle a sa place dans toute théorie correcte des nombres irrationnels, et qu'une égalité, telle que

$$(\sqrt{2})^2 = 2,$$

par exemple, remplace une infinité d'inégalités; c'est là, à mon avis, en quoi elle est *économique;* mais enfin, il en est ici comme plus haut des définitions : il est toujours légitime de substituer la définition au défini.

Malgré moi, je suis ramené au sujet que je m'étais interdit;

même en essayant de me placer au point de vue des auteurs, je ne puis m'empêcher de trouver excessive leur crainte de réaliser l'infini ou de paraître le réaliser en parlant d'une limite, en mettant sous un mot la suite tout entière. Je ne reviens pas sur ce que j'ai déjà laissé entendre, que le pas est peut-être déjà fait dès qu'on parle d'une *suite*; je me garde bien d'ajouter qu'en se réservant de s'arrêter aussi loin qu'ils veulent dans une suite donnée, les auteurs supposent par cela même quelque existence à la suite tout entière. Cette objection ne vaudrait que contre ceux qui ne craignent pas de parler d'une suite déterminée, sans rien spécifier sur cette détermination. Ce n'est pas le cas, cela va sans dire, pour Robin et M. Raffy; ils ne parlent que de suites de nombres rationnels dont on sait effectivement calculer un terme lorsque l'on connaît son rang. Dès lors, il n'entre plus, dans la conception de la suite, que la règle même qui permet de calculer le $n^{\text{ième}}$ terme, connaissant n, règle qui s'applique aussi bien au $(n+1)^{\text{ième}}$. S'il en est ainsi, je ne crois pas me tromper en disant que les auteurs, sans rien changer au fond de leur exposition, auraient pu la présenter sous une forme tout aussi claire et tout aussi rigoureuse, en s'écartant moins qu'ils n'ont fait du langage ordinaire. Que l'Analyse, ainsi constituée, suffise aux applications, cela n'est pas douteux et l'on sait assez, depuis M. Klein, qu'il serait très désirable de voir se constituer, si elle pouvait être suffisamment simple et étendue, une mathématique où toutes les propositions seraient vraies, en ne gardant jamais, par exemple, que les sept premiers chiffres significatifs des nombres qui y figurent. Que, d'une part, l'Analyse constituée sur la seule base que je viens de dire conduise ou non à un concept parfaitement équivalent à celui de la grandeur continue; que, d'autre part, il soit permis, ou non, de parler d'une suite infinie, dans sa totalité, comme ayant une réalité autre que la règle qui permet d'en calculer chaque terme, c'est là d'autres points dont, décidément, je ne veux pas parler davantage.

Aussi bien ce n'est pas par les sujets dont j'ai parlé que la conception de Robin me semble se distinguer foncièrement des habitudes, mais bien par la façon dont il conçoit la fonction.

« Si à l'un quelconque des nombres x qui appartiennent à un intervalle (a, b) on fait correspondre une suite convergente

connue, ainsi que toutes les suites équivalentes à celle-là, on dit que l'ensemble de toutes ces suites définit une fonction de la variable x dans l'intervalle (a, b).

. . . .

» On représente par $f(x)$ un terme quelconque, pris à partir d'un rang *suffisamment élevé* dans l'une des suites qui correspondent à x; réciproquement, on dit que chacune de ces diverses suites *définit* la valeur $f(x)$ de la fonction pour la valeur x de la variable. Cette valeur est unique, en effet, les résultats devant être, dans chaque question, calculés avec un nombre déterminé de décimales. Si $f(x)$ doit être connu avec r décimales, par exemple, dans l'une des suites convergentes qui définissent $f(x)$, on choisira le premier terme qui diffère de tous les suivants de moins de 10^{-r}, et l'on ne prendra de ce terme $f_r(x)$ que la partie entière et les r premières décimales. On trouvera ainsi un nombre parfaitement déterminé y; c'est lui qui répond à la question.... »

Je n'ai poussé si loin la citation que pour montrer comment, ainsi que je l'ai dit plus haut, les auteurs entendent toujours s'arrêter dans les suites convergentes qu'ils considèrent; mais ce n'est pas le point sur lequel je vais insister maintenant.

En parlant des *nombres* qui appartiennent à l'intervalle (a, b), les auteurs entendent uniquement les nombres entiers et les fractions à termes entiers compris entre a et b; pour parler le langage ordinaire, leur fonction $f(x)$ n'est définie que dans l'ensemble des nombres rationnels. D'où une différence profonde avec la notion ordinaire; $y = f(x)$ peut être défini par une suite convergente (irrationnelle), mais non la variable x. La variable indépendante est, en quelque sorte, plus restreinte que la fonction, d'où un désaccord manifeste avec les habitudes.

« Pour rétablir l'accord, on devrait définir autrement les fonctions. Ce n'est pas seulement à tout nombre déterminé x, mais à toute suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, comprise dans l'intervalle (a, b), qu'il faudrait faire correspondre le nombre que nous appelons la *fonction*. Mais ce serait sortir du domaine du nombre pur, où nous voulons nous tenir. En effet, si la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ était irrationnelle, en appelant $f(x)$ le nombre

qu'on lui ferait correspondre, on ne désignerait par x aucun des termes de cette suite, ni même aucun nombre, et ce qu'on mettrait sous ce symbole ne serait pas autre chose, en réalité, qu'une grandeur. »

Je ne puis admettre cette conclusion, l'emploi de la lettre x, pas plus que l'emploi des mots « nombre irrationnel » ou « limite » n'implique qu'on ait affaire à une *grandeur*. La lettre x me fait penser à la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, puis le symbole $f(x)$ à la suite $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, que je sais déduire de la précédente par des calculs plus ou moins compliqués, et qui définit $f(x)$ à son tour. Je vois là une suite convergente que l'on déduit d'une autre suite convergente, je ne vois pas de *grandeur*.

Quoi qu'il en soit, les définitions sont libres et le désaccord entre les propositions qui se succèdent dans la *Théorie nouvelle des fonctions* et celles qu'on trouve ailleurs n'est pas tel qu'on ne puisse en prendre son parti. Il portera essentiellement sur la notion de continuité ; celle-ci pourra être définie comme d'ordinaire, soit dans un intervalle, soit pour une valeur de x (rationnelle) appartenant à cet intervalle. Mais l'une des définitions ne reviendra plus à l'autre, lors même que la fonction sera continue pour toutes les valeurs (rationnelles) de x appartenant à cet intervalle.

Selon les auteurs, la fonction $\frac{1}{x^2-2}$ est continue pour toute valeur de x ; elle n'est pas continue dans l'intervalle (1,4 ; 1,5). Ils ne manquent pas de mettre en lumière toutes ces différences, et je crois même qu'ils y ont éprouvé quelque plaisir, tant est vif chez eux le goût de la franchise.

Il me reste à dire quels sujets ils ont traités et jusqu'où ils sont allés ; le lecteur verra qu'ils sont allés assez loin et se convaincra que l'exposition de l'Analyse, dans l'ordre d'idées où ils ont voulu se tenir, est parfaitement possible. A la vérité, ils ne parlent pas des variables complexes, mais le fait d'introduire deux variables, au lieu d'une, n'a rien qui soit essentiel.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés à l'étude des suites convergentes et à la notion de fonction ; le second se termine par la définition de l'oscillation moyenne d'une fonction, finie dans un intervalle.

A cette notion de l'oscillation moyenne sont rattachées de la

façon la plus intéressante, dans le Chapitre suivant, la notion d'intégrale définie, d'après Riemann ; les notions de continuité et de discontinuité, de fonctions à oscillation totale limitée, de fonctions rectifiables qui, à la fois, sont continues et ont leur oscillation totale limitée.

Dans le Chapitre IV, les auteurs traitent de la définition des fonctions inverses ; ils montrent comment se pose, dans l'ordre d'idées où ils sont placés, le problème des racines d'une équation $f(x) = 0$, dont le premier membre est une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b). Ce problème revient, comme pour tout le monde, à la recherche d'une suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de nombres appartenant à l'intervalle (a, b), telle que la suite $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$, ait pour limite 0 ; s'il existe une telle suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ils diront que l'équation admet une racine dans cet intervalle et que la fonction $f(x)$ s'annule dans cet intervalle. Tout cela est très franchement expliqué ; mais, si la suite est irrationnelle, la racine n'est pas un nombre de l'intervalle, puisqu'il est entendu qu'il n'y a pas d'autres nombres que les nombres rationnels. Ce n'est pas pour une valeur de la variable que la fonction s'annule. Je ne puis m'empêcher de le dire à nouveau : pourquoi dire « racine » quand on n'a pas voulu dire « limite », et si l'on ne craint pas d'employer le mot *racine* pour rappeler l'existence d'une certaine suite convergente, pourquoi craindre d'employer une lettre pour rappeler la même chose et pourquoi rejeter le symbolisme ordinaire ? Ils se sont résignés sans doute à des habitudes de langage, qu'il faut bien respecter quand on écrit pour être compris.

Quoi qu'il en soit, ils montrent comment, dans le cas d'une fonction croissante ou décroissante, le problème de la détermination de la fonction inverse est susceptible d'une solution précise ; ils étudient enfin les fonctions exponentielle et logarithmique avec tout le soin que mérite l'importance de ces fonctions.

Le Chapitre suivant est consacré aux dérivées ; l'attention est particulièrement attirée sur les fonctions *uniformément différentiables*.

« Une fonction $f(x)$ est dite uniformément différentiable dans un intervalle (a, b) si, étant donnée une fraction positive ε, aussi

petite que l'on veut, on peut déterminer un nombre positif α tel que, pour deux nombres x, x' appartenant à l'intervalle et différant de moins de α, le rapport

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

diffère de moins de ε de tous les rapports analogues que l'on peut former avec deux autres nombres quelconques pris dans le petit intervalle α auquel appartiennent x et x'. »

Bon nombre des propositions fondamentales de la théorie des dérivées se démontrent d'une façon plus simple quand on suppose que l'on a affaire à une fonction uniformément différentiable. C'était d'autant plus le droit des auteurs de se borner à ces fonctions, comme ils l'ont fait dans le Chapitre VI, que, bien évidemment, la classe des fonctions uniformément différentiables contient toutes celles que l'on a à considérer dans les éléments, et le fait, établi dans le Chapitre suivant, que, si les termes d'une série sont des fonctions uniformément différentiables et si la série formée par les dérivées de ces termes est uniformément convergente, cette série est la dérivée de la série proposée, achève de montrer l'importance de la notion sur laquelle ils ont insisté. Notons encore la façon vraiment simple et élégante dont est expliquée la formation de fonctions continues sans dérivée.

Le Chapitre VIII est consacré aux propriétés essentielles des séries entières; les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont déterminées par les équations fonctionnelles qui expriment les théorèmes d'addition pour ces fonctions.

Le Chapitre IX contient diverses propositions importantes concernant les intégrales et l'établissement de la série de Fourier dans le cas d'une fonction à oscillation totale limitée, ne comportant qu'un nombre fini de discontinuités.

Le dernier Chapitre, enfin, contient quelques définitions et propositions relatives aux fonctions de deux variables, dont on ne peut guère se passer, lors même que l'on veut traiter spécialement des fonctions d'une variable; il se termine par la démonstration de l'existence d'une solution à l'équation différentielle du

premier ordre, démonstration qui est faite dans l'ordre d'idées où s'est placé M. Lipschitz.

La *Théorie nouvelle des fonctions* se recommande à tous ceux qui goûtent la clarté, la précision et la suite dans les idées.

J. T.

MÉLANGES.

SUR L'AIRE DU PARALLÉLOGRAMME DES PÉRIODES POUR UNE FONCTION pu DONNÉE;

Par M. Jules TANNERY.

M. Borel a bien voulu appeler mon attention sur l'intérêt que pourraient présenter, dans certaines recherches, des limitations de l'aire du parallélogramme des périodes d'une fonction pu dont on connaît les invariants g_2 et g_3. C'est de ces limitations que je vais m'occuper ici.

Je me permettrai, pour les formules ou les résultats dont j'aurai besoin, de renvoyer le lecteur aux *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* que j'ai publiés avec M. Molk et, en particulier, au Tableau [1] de formules qu'ils contiennent; au reste, il trouvera les unes et les autres dans le formulaire de M. Schwarz, principalement aux Articles 27, 35, 40, 41, 54 et 55.

Désignons par e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

rangées dans l'ordre que déterminent les inégalités

$$|e_2 - e_3| \leqq |e_1 - e_2| \leqq |e_1 - e_3|,$$

---

[1] Je profite de l'occasion pour y relever une faute : Dans le second membre de la formule CXVI$_6$, Θ_1 doit être remplacé par H_1.

et soient

$$x = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad 1 - x = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3};$$

on aura, en vertu des inégalités précédentes,

$$x \leqq |1 - x| \leqq 1.$$

En désignant par φ une variable réelle comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et en choisissant pour les radicaux

$$\sqrt{1 - x \sin^2 \varphi}, \quad \sqrt{1 - (1 - x) \sin^2 \varphi}$$

les déterminations pour lesquelles les parties réelles sont positives, les quantités $2\omega_1$, $2\omega_3$ constitueront pour la fonction pu un couple de périodes primitives si l'on fait [1]

$$\omega_1 = \frac{X(x)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega_3 = \frac{X'(x)}{\sqrt{e_1 - e_3}} i,$$

$$X(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x \sin^2 \varphi}}, \qquad X'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - x) \sin^2 \varphi}};$$

posons en outre

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{i X'(x)}{X(x)}, \qquad q = e^{\tau \pi i};$$

on aura

$$X(x) = \frac{\pi}{2} \mathfrak{D}_3^2(0) = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2.$$

On trouve immédiatement, pour l'aire du parallélogramme construit sur les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$

$$A = \frac{4 |X^2(x)|}{\pi |e_1 - e_3|} \log \left|\frac{1}{q}\right| = \frac{\pi |\mathfrak{D}_3^4(0)|}{|e_1 - e_3|} \log \left|\frac{1}{q}\right|,$$

et c'est de la quantité

$$B = |\mathfrak{D}_3^4(0)| \log \left|\frac{1}{q}\right| = \frac{A |e_1 - e_3|}{\pi}$$

que je m'occuperai tout à l'heure.

---

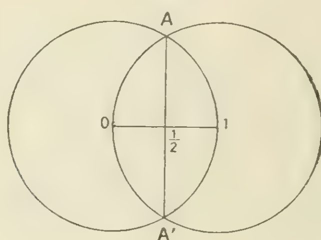
(1) *Éléments*, CXIX$_3$. Les quantités x, $X(x)$, $X'(x)$ sont les mêmes que k^2, K, K'; je réserve ces dernières notations pour désigner des fonctions de τ. La lettre x remplace ici la lettre $\varkappa$ qui figure dans les *Éléments*.

Auparavant, je dois rappeler quelques résultats connus relatifs aux régions où doivent se trouver les points τ, q quand le point x reste dans la région (I), définie par les inégalités

$$0 \leq |x| \leq |1 - x| \leq 1.$$

Tout d'abord, cette région même est la moitié de la région commune aux deux cercles C_0, C_1 décrits, avec le rayon 1, des

Fig. 1.



points 0 et 1 comme centres, qui est à gauche de la corde commune AA′.

L'affixe du point τ, correspondant au point x de la région (I) par la relation

$$\tau = \frac{i X'(x)}{X(x)},$$

peut être représentée par la formule

$$\tau = \sin t + (h + \cos t) i,$$

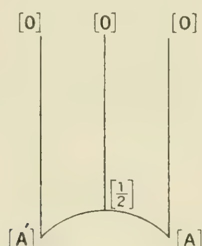
t et h étant des nombres réels satisfaisant aux conditions

$$0 \leq h, \qquad -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6},$$

en sorte que la région où se trouve le point τ, située tout entière au-dessus de l'axe des quantités réelles, est limitée en bas par un arc de cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à 1, et limité aux points [A] et [A′], images des points A, A′ de la figure 1; les affixes des points [A] et [A′] sont $\pm \sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6}$; l'arc de cercle est l'image de la corde AA′ de la figure 1. La même région est délimitée à droite et à gauche par deux parallèles à

l'axe des quantités imaginaires qui partent des points [A], [A′]; ces parallèles sont les images respectives des arcs du cercle C_1

Fig. 2.



de la figure 1 qui vont l'un du point A au point O, l'autre du point A′ au même point O.

Le lecteur retrouvera très aisément ces derniers résultats, s'il veut bien se rappeler la façon dont le plan des x fait son image sur le plan des τ (¹), et faire les observations suivantes.

Quand le point x de la figure 1 est sur l'arc AOA′ du cercle C_1, la quantité

$$\beta = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - x}}{1 + \sqrt[4]{1 - x}},$$

où la détermination du radical est telle que l'argument trigonométrique de $\sqrt[4]{1 - x}$ soit compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, est purement imaginaire; le coefficient de i a le même signe dans β et dans x; il en est de même pour q, comme le montre la relation (²)

$$q = \frac{\beta}{2} + 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\beta}{2}\right)^9 + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\tau = \frac{i}{\pi} \log \frac{1}{q},$$

en prenant pour le logarithme la détermination principale; pour

(¹) *Éléments*, t. IV, p. 264.
(²) *Éléments*, $CXXI_4$.

ces valeurs de τ la partie réelle est donc $\pm\frac{1}{2}$ suivant que x est sur l'arc AO ou sur l'arc A′O.

Aux points A, A′ correspondent les valeurs (¹) de q

$$q = \pm\, i e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}},$$

et par conséquent les valeurs de τ, affixes des points [A], [A′]

$$\tau = \pm \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6};$$

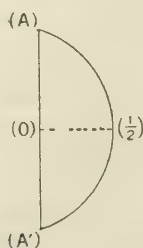
lorsque le point x est sur la corde commune AA′, les nombres x et $1 - x$ sont conjugués, il en est de même de $X(x)$, $X'(x)$; il en résulte que τ doit se trouver sur un cercle de centre O et de rayon 1; à la corde AA′ correspond l'arc de cercle qui joint les deux points [A], [A′]; le milieu de cet arc qui correspond au point $\frac{1}{2}$ a pour affixe i.

Il résulte de ce qui précède que, lorsque x reste dans la région (I), q prend les valeurs données par la formule

$$q = e^{-\pi(h+\cos t)+i\pi\sin t},$$

où h et t ont les mêmes significations que plus haut; la région où le point q doit rester est représentée dans la figure 3 : je la désignerai par (Q). La correspondance avec la figure 1 est marquée par l'emploi des mêmes lettres, entourées de parenthèses. La droite sur laquelle se trouvent les points (A), (A′), dont les

Fig. 3.



(¹) *Éléments*, CXXI₃.

affixes sont $\pm ia$, en posant

$$a = e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} = 0{,}0658287\ldots,$$

est l'axe des quantités imaginaires; c'est l'image de l'arc AOA' du cercle C_1; l'image de la droite AA' est la courbe qui passe par les points (A), $\left(\frac{1}{2}\right)$, (A'), définie par l'équation

$$q = e^{-\pi\cos t + i\pi\sin t},$$

quand t varie de $-\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{6}$; l'affixe du point $\left(\frac{1}{2}\right)$ est $e^{-\pi}$.

Je poserai dans la suite

$$q = re^{i\alpha},$$

r étant un nombre positif compris entre 0 et a et α un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

J'arrive enfin à l'étude de la fonction

$$B = |\mathfrak{S}_3^4(0)| \log\left|\frac{1}{q}\right|.$$

Il est clair que lorsque x reste dans la région (I) et q dans la région (Q), B est une fonction continue, sauf pour le point $x = 0$ ou $q = 0$. La formule (¹)

$$q = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + \ldots$$

donne d'ailleurs

$$\log\frac{1}{q} = \log\frac{16}{x} + \log\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \varphi(x)},$$

en posant

$$\varphi(x) = \frac{21}{64}x^2 + \ldots.$$

Si l'on attribue à $\log\frac{1}{q}$, $\log\frac{16}{x}$ leurs déterminations principales, dans lesquelles les coefficients de i ont entre eux une différence

(¹) *Éléments*, $CXXI_2$.

moindre que $\frac{\pi}{2}$, ainsi qu'il résulte clairement des figures 1 et 3, il faudra attribuer aussi sa détermination principale au second terme du second membre; ce second terme, quand x est très petit en valeur absolue, est lui-même très petit en valeur absolue; il en est de même de la différence $\log\frac{1}{q} - \log\frac{16}{x}$ et, par conséquent, de la partie réelle de cette différence, c'est-à-dire de $\log\left|\frac{1}{q}\right| - \log\left|\frac{16}{x}\right|$.

D'ailleurs la fonction $\vartheta^4(0)$, regardée, soit comme fonction de q, soit comme fonction de x, est égale à 1 pour $q = 0$ ou $x = 0$; comme elle est régulière, on voit de suite que la différence

$$C = |\vartheta^4(0)| \log\left|\frac{1}{q}\right| - \log\left|\frac{16}{x}\right|,$$

si on lui attribue la valeur 0 pour $x = 0$, est continue quand x reste dans la région (I) et sur son contour; elle admet un minimum, dont on montrera qu'il est nul, et un maximum, pour lequel je me bornerai à prouver qu'il est plus petit que 1.

Je mettrai pour cela C sous la forme

$$C = [|\vartheta^4(0)| - 1] \log\frac{1}{q} - 4 \log\left|\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{x}\right|,$$

On a (¹)

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^{25} + \ldots}{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots};$$

par conséquent, puisque q est, en valeur absolue, au plus égal à a, l'erreur que l'on commet en remplaçant le second membre par $\frac{1+2q}{1+q^2}$, à savoir

$$q^4 \frac{(1+q^2)(2+2q^{21}+\ldots) - (1+2q)(q^2+q^8+\ldots)}{(1+q^2)(1+q^2+q^6+\ldots)}$$

est moindre que

$$r^4 \frac{2+a^2+(1+a^2)(2a^{21}+\ldots)+(1+2a)(a^8+\ldots)}{(1-a^2)(1-a^2-a^6-\ldots)};$$

(¹) *Éléments*, XXXVII$_1$.

il est aisé de calculer une valeur approchée du coefficient de r^4; on trouve successivement

$$\left|\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right| = \left|\frac{1+2q}{1-q^2}\right| + \varepsilon r^4,$$

$$\log\left|\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right| = \frac{1}{2}\log\frac{1+4r\cos\alpha+4r^2}{1+r^2\cos 2\alpha+r^4} + \varepsilon_1 r^4,$$

ε et ε_1 étant des nombres qui diffèrent très peu et dont il est aisé de reconnaître qu'ils sont l'un et l'autre moindres que 2,0219, en valeur absolue. On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\frac{1+4r\cos\alpha+4r^2}{1+r^2\cos 2\alpha+r^4} &= \frac{2r}{1}\cos\alpha - \frac{(2r)^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{(2r)^3}{3}\cos 3\alpha - \ldots \\ &\quad - \frac{r^2}{1}\cos 2\alpha + \frac{r^4}{2}\cos 2\alpha - \frac{r^6}{3}\cos 6\alpha + \ldots \\ &= 2r\cos\alpha - 3r^2\cos 2\alpha + \varepsilon_3 r^3,\end{aligned}$$

et l'on déduit de là sans peine

$$\log\left|\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right| = 2r\cos\alpha - 3r^2\cos 2\alpha + \varepsilon_2 r^3,$$

$$|\varepsilon_2| < \frac{8}{3(1-2a)} + \frac{a}{2(1-a^2)} - 2,0219\,a < 3,2372.$$

On trouve de la même façon

$$|\mathfrak{I}_3^4(0)| - 1 = (4r\cos\alpha + 4r^2)(2 + 4r\cos\alpha + 4r^2) + \eta_1 r^4,$$
$$|\eta_1| < 11,595,$$

et, par suite,

$$C = C' + \eta_1' r^3,$$

en faisant

$$\begin{aligned}C' &= 8r\left(\log\frac{1}{r} - 1\right)\cos\alpha \\ &\quad + 8r^2(1 + 2\cos^2\alpha + 2r\cos\alpha + 4r^2)\log\frac{1}{r} + 12r^2\cos 2\alpha,\end{aligned}$$

$$\eta_1' = \eta_1 r\log\frac{1}{r} - 4\varepsilon_2.$$

Lorsque r croît de 0 à a les produits de $\log\frac{1}{r}$ par r, r^2, r^3, r^4 vont en augmentant. On voit tout d'abord que η_1' est moindre en

valeur absolue que

$$|\tau_1|\, a^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} < 12,9488 < 15,0254.$$

D'un autre côté, lorsque r reste fixe et que α croît de o à $\frac{\pi}{2}$, il est clair que C' va en décroissant, on a donc

$$C > r^2\left(8\log\frac{1}{r} + 12 - 15,0254\, r\right).$$

Le coefficient de r^2, dans le second membre, est positif, car la plus petite valeur de $8\log\frac{1}{r}$ correspond à $r = a$; elle dépasse 21. La valeur minimum de C correspond à $x = 0$.

D'un autre côté, lorsque l'on regarde α comme fixe et que l'on fait croître r, C' augmente; en effet, la dérivée de $\frac{C'}{4}$ par rapport à r peut s'écrire

$$2(\cos\alpha - 2r)\left(\log\frac{1}{r} - 2\right) + 4r^2(\cos\alpha + 2r)\left(3\log\frac{1}{r} - 1\right)$$
$$+ 8r\cos^2\alpha\left(1 + \log\frac{1}{r}\right) + 8r^3\log\frac{1}{r};$$

elle est positive, puisque la plus petite valeur de $\log\frac{1}{r}$ est

$$\log\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = 2,72\ldots.$$

Il résulte de là que le maximum de C' a lieu quand le point q est sur la courbe qui limite à droite la région (Q). Sur cette courbe, r et α sont des fonctions de la variable t définies par les relations

$$r = e^{-\pi\cos t}, \qquad \alpha = \pi\sin t,$$

C' devient une fonction de t dont on pourrait se proposer de chercher la plus grande valeur; il est bien aisé de reconnaître qu'il y a un maximum, pour $t = 0$, ($q = e^{-\pi}$). Au degré d'approximation auquel je me suis borné, il semble que l'effort qu'il faudrait pour constater qu'il n'y a pas d'autre maximum soit assez vain; la proposition n'offrirait quelque intérêt que si elle concernait la fonction C elle-même, dont la valeur, pour $q = e^{-\pi}$,

$x = \frac{1}{2}$, est

$$C = 0,5292\ldots.$$

Je me suis contenté de vérifier que le maximum d'une partie de C', pour laquelle cette vérification est aisée, a lieu en effet pour $t = 0$; il s'agit de l'ensemble des termes

$$8r\left(\log\frac{1}{r} - 1\right)\cos\alpha + 16r^2\log\frac{1}{r}\cos^2\alpha + 12r^2\cos 2\alpha,$$

dont la dérivée par rapport à t peut s'écrire

$$\begin{aligned}&-8\pi r\left[\left(\pi\cos t - \frac{3}{2}\right)\sin(\alpha - t) - \frac{1}{2}\sin(\alpha + t)\right]\\ &-\pi r^2[\cos\alpha\cos t\sin(\alpha - t) + \sin t\cos^2\alpha]\\ &-2\pi r^2\sin(2\alpha - t).\end{aligned}$$

Or, lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, α reste plus grand que t et l'on reconnaît de suite que l'expression précédente reste négative. Dès lors, en remplaçant dans C la somme des termes précédents par son maximum, et les autres termes par des nombres manifestement plus grands, on trouve

$$\begin{aligned}C < 8(\pi - 1)e^{-\pi} + 8\pi e^{-2\pi} + 12e^{-2\pi}\\ + 8a^2(1 - 2a + 4a^2)\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + 15,0254a^3 < 0,923.\end{aligned}$$

En résumé, l'aire du parallélogramme des périodes s'exprime par la formule

$$A = \frac{\pi}{|e_1 - e_3|}\left[\log\left|\frac{16}{x}\right| + C\right],$$

C étant un nombre dont on sait qu'il est compris entre 0 et 1.

SUR UNE FORME NOUVELLE, LINÉAIRE, DE L'ÉQUATION DONT DÉPEND LA DÉTERMINATION DES SURFACES QUI ONT UN ÉLÉMENT LINÉAIRE DONNÉ;

PAR M. JULES DRACH, à Poitiers.

1. La recherche des surfaces S qui admettent pour élément linéaire

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

peut être faite par la méthode suivante : on détermine d'abord les rotations p, q, p_1, q_1 du trièdre (T), attaché à l'une de ces surfaces comme l'a indiqué M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces,* Livre V, Chap. II), puis les cosinus directeurs α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' de trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ par rapport au trièdre mobile (T). Les coordonnées X, Y, Z de l'origine du trièdre (T), c'est-à-dire les coordonnées d'un point de l'une des surfaces cherchées, sont alors données par des quadratures, ainsi qu'il résulte des formules

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \alpha\xi_1 + \beta\eta_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

où les quantités ξ, η, ξ_1, η_1 sont les translations du trièdre (T) assujetties seulement à satisfaire aux trois équations

$$E = \xi^2 + \eta^2, \qquad F = \xi\xi_1 + \eta\eta_1, \qquad G = \xi_1^2 + \eta_1^2.$$

La détermination des rotations p, q, p_1, q_1 exige l'intégration du système simultané :

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, \end{cases}$$

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1, \\[2mm] \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - \xi r_1, \\[2mm] p\eta_1 + \xi q_1 - \eta p_1 - q\xi_1 = 0, \end{cases}$$

où les inconnues sont p, q, p_1, q_1, r, r_1.

Les deux premières équations du système (II) définissent r et r_1 en partant des translations; les dernières équations de chacun des deux systèmes déterminent alors sans difficulté p et p_1 au moyen des inconnues q et q_1.

Si l'on porte ces expressions dans les deux premières équations (I), on obtiendra un système de *deux équations du premier ordre aux inconnues q et q_1*.

L'intégration de ce système simultané paraît, à un premier examen, dépendre de celle d'un système *à une seule inconnue* formé d'équations *dont l'ordre est supérieur au second*. C'est, par exemple, un système de cette nature qu'on obtient en éliminant l'une des inconnues ou encore en prenant pour nouvelle fonction inconnue une fonction quelconque de q et q_1.

Nous nous proposons de montrer qu'*on peut ramener cette intégration à celle d'une seule équation du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes de la fonction inconnue.*

Avant de passer à cette démonstration, il convient de remarquer que la recherche des quantités p, q, p_1, q_1 est simplement celle de la représentation sphérique de l'une des surfaces (S), ainsi que cela résulte de l'expression de l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = (p\,du + p_1\,dv)^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2;$$

on sait d'ailleurs que lorsque cette représentation sphérique est connue la surface est entièrement déterminée, à un déplacement près. Il est cependant nécessaire d'intégrer encore une équation de Riccati pour obtenir les cosinus directeurs des axes mobiles (T).

Cette remarque met immédiatement en évidence les liaisons du système qui définit p, q, p_1, q_1 avec celui qui définit les quantités D, D′, D″, puisque l'on a

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = {} & \frac{G}{H^4}(D\,du + D'\,dv)^2 \\ & - \frac{2F}{H^4}(D\,du + D'\,dv)(D'\,du + D''\,dv) + \frac{E}{H^4}(D'\,du + D''\,dv)^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que le système que nous étudions est aussi celui qui définit les éléments D, D′, D″ en partant de l'élément linéaire.

2. Nous ferons observer que les trois équations (I) qui lient les rotations expriment simplement (*Cf.* Darboux, *loc. cit.*, Livre I, Chap. VI) que les deux équations de Riccati

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= a + 2b\,\sigma + c\,\sigma^2, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= a_1 + 2b_1\sigma + c_1\sigma^2, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$a = \frac{q - ip}{2}, \qquad 2b = -ir, \qquad c = \frac{q + ip}{2}, \qquad \ldots,$$

ont une solution commune dépendant d'une constante arbitraire.

Le système (I) transformé par le choix des éléments a, b, c, ... s'écrit sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} - \dfrac{\partial a_1}{\partial u} + 2ba_1 - 2ab_1 = 0, \\ \dfrac{\partial b}{\partial v} - \dfrac{\partial b_1}{\partial u} + ca_1 - ac_1 = 0, \\ \dfrac{\partial c}{\partial v} - \dfrac{\partial c_1}{\partial u} + 2cb_1 - 2bc_1 = 0, \end{cases}$$

et la dernière des équations (II) deviendra

$$(3) \qquad c(\eta_1 - i\xi_1) + a_1(\eta + i\xi) - c_1(\eta - i\xi) - a(\eta_1 + i\xi_1) = 0.$$

Convenons de prendre, comme inconnue, la fonction σ qui satisfait aux deux équations (1); ces deux relations nous donneront les expressions de a et a_1 au moyen de c, c_1 et σ.

Portons ces expressions dans l'équation (3) et dans la seconde des relations (2), nous aurons deux équations *linéaires* en c et c_1 qui détermineront ces deux quantités au moyen de σ et de ses dérivées premières.

Les expressions de c et c_1 ainsi obtenues devront vérifier les deux autres relations (2), mais nous savons déjà qu'on n'obtiendra ainsi qu'une seule équation [cela résulte de l'interprétation du système (I) rappelée plus haut]. Nous n'avons par suite qu'à porter les expressions de c et c_1 dans l'équation

$$\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u} + 2cb_1 - 2bc_1 = 0$$

et nous obtiendrons manifestement une *équation aux dérivées partielles du second ordre* pour déterminer σ, équation qui sera *linéaire par rapport aux dérivées secondes*.

Le calcul, qui se fait sans difficulté, donnera c et c_1 par les

formules

$$\left\{\begin{aligned}\Delta c &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right)[\eta - i\xi + \sigma^2(\eta + i\xi)] - (\eta_1 - i\xi_1)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} - 2b\sigma\right)^2 \\ &\quad - (\eta + i\xi)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} - 2b\sigma\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - 2b_1\sigma\right) \\ \Delta c_1 &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right)[\eta_1 - i\xi_1 + \sigma^2(\eta_1 + i\xi_1)] - (\eta_1 + i\xi_1)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} - 2b\sigma\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - 2b_1\sigma\right) \\ &\quad - (\eta + i\xi)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - 2b_1\sigma\right)^2\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\Delta = &\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - 2b_1\sigma\right)[\eta - i\xi + \sigma^2(\eta + i\xi)] \\ &- \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} - 2b\sigma\right)[\eta_1 - i\xi_1 + \sigma^2(\eta_1 + i\xi_1)];\end{aligned}$$

nous désignerons l'équation du second ordre en σ qui en résulte et dont l'écriture est un peu compliquée par la notation

$$(5)\qquad A(\sigma) = 0.$$

3. Supposons que l'on connaisse une solution de l'équation linéaire du second ordre (5) que nous venons de former; que reste-t-il à faire pour obtenir la surface correspondante?

Montrons qu'*on parvient à l'expression des coordonnées* X, Y, Z *de l'un de ses points, par de simples quadratures.*

Désignons par σ_0 la solution connue de l'équation en σ; les expressions de a, c, a_1, c_1 sont entièrement déterminées et la solution générale du système

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial u} &= a + 2b\sigma + c\sigma^2 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= a_1 + 2b_1\sigma + c_1\sigma^2\end{aligned}\right.$$

dont nous connaissons la solution particulière σ_0, s'obtiendra par deux quadratures.

Posons par exemple

$$\Omega = \int (c\sigma_0 + b)\,du + (c_1\sigma_0 + b_1)\,dv$$

et

$$\Phi = -\int e^{-2\Omega}(c\,du - c_1\,dv),$$

nous aurons pour expression générale de σ

$$(7)\qquad \sigma = \sigma_0 - \frac{e^{-2\Omega}}{\Phi - k},$$

en désignant par k la constante d'intégration [1].

Soient, d'une manière générale, x et y deux solutions du système (6) correspondant aux valeurs λ et μ de la constante k; on en déduit immédiatement les expressions des cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i\,\frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y}$$

d'une direction fixe, par rapport au trièdre mobile (T). Soient de même x_1, y_1 deux autres solutions du système (6), λ_1, μ_1 les valeurs de la constante k; les cosinus correspondants seront

$$\alpha' = \frac{1 - x_1 y_1}{x_1 - y_1}, \qquad \beta' = i\,\frac{1 + x_1 y_1}{x_1 - y_1}, \qquad \gamma' = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}.$$

Pour que les deux directions soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$(x + y)(x_1 + y_1) - 2xy - 2x_1 y_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport anharmonique des quatre quantités x, y, x_1, y_1 soit égal à -1. Mais la solution générale σ est liée à la constante k par une relation homographique; il en résulte que la relation précédente se réduit à la relation analogue

$$(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) - 2\lambda\mu - 2\lambda_1\mu_1 = 0$$

entre les valeurs de la constante d'intégration.

Pour obtenir trois directions α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' formant

---

[1] Il convient d'ajouter que σ est en même temps que σ_0 une solution de l'équation

$$(5)\qquad A(\sigma) = 0$$

qui admet ainsi en elle-même une transformation curieuse. Cette transformation n'altère pas non plus les valeurs de c, c_1 données par les relations (4).

un trièdre trirectangle, il faut donc donner à la constante k trois couples de valeurs λ, μ; λ_1, μ_1; λ_2, μ_2 satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) - 2\lambda\mu - 2\lambda_1\mu_1 &= 0,\\
(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) - 2\lambda_1\mu_1 - 2\lambda_2\mu_2 &= 0,\\
(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) - 2\lambda_2\mu_2 - 2\lambda\mu &= 0,
\end{aligned}$$

et former les cosinus correspondant à chacun de ces couples. On voit qu'on peut prendre arbitrairement les trois quantités λ, μ, λ_1 par exemple.

On peut d'ailleurs se proposer d'exprimer toutes ces quantités λ, μ, ... en fonction *rationnelle* de trois paramètres. Pour y parvenir, nous remarquerons que les équations précédentes demeurent vérifiées quand on fait subir aux λ, μ la même transformation projective

$$\lambda = \frac{Ml + N}{Pl + Q}, \qquad \mu = \frac{Mm + N}{Pm + Q};$$

il suffira donc de trouver pour l, m; l_1, m_1; l_2, m_2 un système particulier quelconque de valeurs numériques satisfaisant aux relations qui lient les trois couples λ, μ.

En prenant, par exemple

$$l = 0, \qquad m = \infty; \qquad l_1 = 1, \qquad m_1 = -1; \qquad l_2 = i, \qquad m_2 = -i,$$

on obtient les formules

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{N}{Q}, & \mu &= \frac{M}{P};\\
\lambda_1 &= \frac{M + N}{P + Q}, & \mu_1 &= \frac{M - N}{P - Q};\\
\lambda_2 &= \frac{Mi + N}{Pi + Q}, & \mu_2 &= \frac{M + Ni}{P + Qi}.
\end{aligned}$$

Ajoutons que ce raisonnement s'applique évidemment aux quantités x, y qui vérifient les mêmes relations que les λ, μ; on est ainsi conduit aux formules d'Euler (*Cf.* Darboux, *loc. cit.*, Livre I, Chap. III, n° 27).

Nous venons de montrer que les cosinus directeurs des trois axes fixes OX, OY, OZ s'obtiennent rationnellement à l'aide de l'intégrale générale du système (6), intégrale que nous avons

obtenue par deux quadratures; trois quadratures nouvelles donnent, comme on sait, l'expression des coordonnées (X, Y, Z) de l'origine du trièdre mobile (T).

4. La solution que l'on vient de présenter conduit en général à des expressions complexes pour les rotations p, q, p_1, q_1 et pour les cosinus directeurs α, β, γ, ...

Si, partant d'un élément linéaire *réel, à discriminant positif*

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 - 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

on se propose de déterminer des fonctions réelles X, Y, Z des variables u et v qui satisfassent à l'équation

$$ds^2 = d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2.$$

les cosinus directeurs α, β, γ, ... et les rotations p, q, p_1, q_1 doivent aussi être des fonctions réelles de u, v. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car les translations ξ, η, ξ_1, η_1 et les rotations r, r_1 peuvent toujours être choisies parmi les grandeurs réelles quand E, F, G sont réels et $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ positif.

Lorsque les rotations p, q, p_1, q_1 sont réelles, les deux équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= a + 2b\,\sigma - c\,\sigma^2 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= a_1 - 2b_1\sigma + c_1\sigma^2 \end{aligned} \right.$$

admettront toujours, en même temps que la solution complexe x, la solution $\frac{-1}{x_0}$ où x_0 désigne la quantité conjuguée de x. Il suffit d'ailleurs que ces équations admettent deux solutions, telles que x et $\frac{-1}{x_0}$, pour que a et c, d'une part, a_1 et c_1, d'autre part, soient imaginaires conjuguées, c'est-à-dire pour que les rotations soient réelles.

On conclut de là que les expressions des rotations formées avec une solution σ de l'équation du second ordre

$$\mathrm{A}(\sigma) = 0$$

ne changent pas si l'on remplace σ par l'expression $\frac{-1}{\sigma_0}$, et encore

que la fonction $\frac{-1}{\sigma_0}$ est, en même temps que σ, solution de l'équation précédente.

Si nous partons, par conséquent, d'une solution σ de l'équation

$$A(\sigma) = 0$$

qui satisfait en même temps aux relations du premier ordre exprimant que c et c_1 ne changent pas quand on remplace σ par $\frac{-1}{\sigma_0}$, les rotations p, q, p_1, q_1 seront réelles. Considérons le système

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial u} = a - 2b\, s - c\, s^2 \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial v} = a_1 - 2b_1 s - c_1 s^2 \end{cases}$$

et soient x, $\frac{-1}{x_0}$ un couple de solutions complexes de ce système, les cosinus définis par les équations

$$\alpha = \frac{x + x_0}{1 + x x_0}, \qquad \beta = i\,\frac{x_0 - x}{1 + x x_0}, \qquad \gamma = \frac{x x_0 - 1}{x x_0 + 1}$$

seront également réels. Il reste donc simplement à examiner comment on déterminera trois solutions x, y, z du système (8), de façon que les directions correspondant aux couples x, $\frac{-1}{x_0}$; y, $\frac{-1}{y_0}$; z, $\frac{-1}{z_0}$ soient deux à deux orthogonales.

Désignons par σ, $\frac{-1}{\sigma_0}$ le couple qui a servi à obtenir les rotations réelles p, q, p_1, q_1 et par x, $\frac{-1}{x_0}$ un autre couple quelconque de solutions du système (8); la solution générale S de (8) peut être définie par la formule

$$\frac{S - x}{1 + S x_0} = C\sqrt{\frac{x}{x_0}}\, e^{-\int \left(\frac{1 + x x_0}{2}\right)\left[\left(\frac{q - ip}{x} - \frac{q + ip}{x_0}\right) du + \left(\frac{q_1 - ip_1}{x} - \frac{q_1 + ip_1}{x_0}\right) dv\right]},$$

où C désigne la constante arbitraire et où la quadrature porte sur une imaginaire *pure* [1].

Soit C′ la détermination de la constante qui donnera la solu-

---

[1] Il est bien entendu que l'on pourra prendre aussi $x = \sigma$ de telle sorte que

tion $\frac{-1}{S_0}$; on aura immédiatement

$$\frac{C}{C'} = \frac{(S-x)}{1+Sx_0} : \frac{\left(\frac{-1}{S_0} - x\right)}{1 - \frac{1}{S_0}x_0} = -\frac{(S-x)(S_0-x_0)}{(1+Sx_0)(1+S_0x)}$$

et

$$\operatorname{mod} CC' = \operatorname{mod} \frac{(S-x)(1+S_0x)}{(S_0-x_0)(1+Sx_0)} = 1,$$

d'où l'on conclut

$$C' = \frac{-1}{C_0},$$

en désignant toujours par C_0 la quantité conjuguée de C.

La condition d'orthogonalité des directions qui correspondent aux couples x, $\frac{-1}{x_0}$; y, $\frac{-1}{y_0}$, qui s'écrit

$$\left(x - \frac{1}{x_0}\right)\left(y - \frac{1}{y_0}\right) + 2\frac{x}{x_0} + 2\frac{y}{y_0} = 0,$$

peut donc s'écrire aussi

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda_0}\right)\left(\mu - \frac{1}{\mu_0}\right) + 2\frac{\lambda}{\lambda_0} + 2\frac{\mu}{\mu_0} = 0,$$

en désignant par λ et μ les constantes qui définissent respectivement x et y.

On obtiendra, par suite, les valeurs les plus générales de trois constantes λ, μ, ν correspondant à trois directions orthogonales en exécutant sur un système particulier, par exemple sur le système

$$l = 0, \qquad m = 1, \qquad n = i,$$

la substitution projective la plus générale qui change deux quantités complexes

$$\omega \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\omega_0},$$

en deux quantités complexes

$$\Omega \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\Omega_0}.$$

---

l'intégration du système (6) dont on connaît les solutions σ et $\frac{-1}{\sigma_0}$ n'exige qu'une seule quadrature.

Cette substitution s'obtient sans difficulté; elle s'écrit

$$\Omega = \frac{a\omega + e^{i\beta}}{\omega - a_0 e^{i\beta}},$$

en désignant par a une quantité complexe quelconque et par β une quantité réelle. On a donc simplement

$$\lambda = \frac{-1}{a_0}, \qquad \mu = \frac{a + e^{i\beta}}{1 - a_0 e^{i\beta}}, \qquad \nu = \frac{ai + e^{i\beta}}{i - a_0 e^{i\beta}},$$

ou bien encore

$$(9) \qquad \lambda = a, \qquad \mu = \frac{a - e^{i\beta}}{a_0 e^{i\beta} + 1}, \qquad \nu = \frac{a + i e^{i\beta}}{1 - a_0 i e^{i\beta}}.$$



BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HELMHOLTZ (H. v.). — *Vorlesungen über theoretische Physik.* Herausgegeb. von A. König, O. Krigar-Menzel, Frz Richarz, C. Runge, t. VI. Gr. in-8°. Leipzig, Barth. 16 m.; relié, 17 m. 50 pf.

Contenu : Vorlesungen über Theorie der Wärme. Herausgeg. von Frz Richarz. XII-419 p. avec 40 fig.

KŒNIGSBERGER (LEO). — *Hermann v. Helmholtz.* T. III. Gr. in-8°. X-142 p. avec 4 portraits et 1 fac-similé de lettre. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 4 m.; cart. toile, 4 m.; demi-rel., 7 m.

DUCRETET (P.). — *Traité élémentaire de télégraphie et de téléphonie sans fil.* (Applications militaires et maritimes.) In-8°, 89 p. avec fig. Paris, Chapelot et Cie.

RODET (J.) — *Distribution de l'énergie par courants polyphasés.* 2e édit. In-8°, XI-561 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

ABHANDLUNGEN, *astronomische, als Ergänzungshetfe, zu den astro-*

nomischen Nachrichten. Herausgeg. von H. Kreutz. N° 4. Gr. in-4°, Hambourg, Mauke Söhne. 2 m. 50 pf.

Contenu : I. *Mello e Simas,* Definitive orbit elements of comet 1900 II. — II. *Merfield,* Definitive orbit element of comet 1900 I. IV-28 p.

Abhandlungen. *mathematische, aus dem Verlage mathemat. Modelle von Martin Schilling in Halle a. S.* N°s 4 et 5. Gr. in-8°. Halle, Schilling. 2 m. 40 pf.

Contenu : H. Grassmann, die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. 51 p avec fig. 1 m. 60 pf. — *W. Boy,* über die Abbildg. der projectiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche. 80 pf.

Abhandlungen *zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von M. Cantor. 16. Heft. 1. Thl. Gr. in-8°, Leipzig, Teubner. 14 m.; relié, 15 m.

Contenu : E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. Systemat. Verzeichnis der wichtigsten deutschen u. ausländ. Lehrbücher u. Monographien des 19. Jahrh. auf den Gebieten der mathem. Wissenschaften. (In 2 Thln.) 1. Thl. Reine Mathematik, XXXVI-416 p.

Bucherer (A.-H.). — *Elemente der Vector-Analysis mit Beispielen aus d. theoret. Physik.* Gr. in-8°. Leipzig, Teubner, relié, 2 m. 40 pf.

Buchholz (Hugo). — *Die Gyldén'sche horistiche Integrationsmethode des Problems der drei Körper u. ihre Convergenz.* (Abhandlgn. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie d. Naturforscher. 81. Bd. n° 3.) Gr. in-4° avec portrait. Leipzig, Engelmann. 8 m.

Burkhardt (Heinr.). — *Funktionen theoretische Vorlesungen.* 1. Bd. 1. Heft. *Algebraische Analysis.* Gr. in-8°, XII-195 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 5 m. 20; relié, 6 m. 20.

Cantor (Mor.). — *Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens.* 2e édit. Gr. in-8°, X-156 p. Leipzig, Teubner. Relié, 1 m. 80 pf.

Croy (Frdr.). — *Lehrbuch der niederen Geodäsie.* Gr. in-8°. XXIV-728 p. avec fig. et 3 planches. Leipa, Künstner. Relié, 18 m.

Delaporte (L.-J.). — *Essai philosophique sur les géométries non euclidiennes.* In-8°, 143 p. avec fig. Paris, Naud.



1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOCHHEIM (A.). — AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN DER EBENE. Heft I : DIE GERADE LINIE, DER PUNKT, DER KREIS. Dritte, vermehrte Auflage, bearbeitet von *F. Hochheim*. 1 vol. in-8; VI-98 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

Ce recueil contient 772 problèmes sur les éléments de la Géométrie analytique (point, droite, cercle). Beaucoup de ces problèmes sont purement numériques, et la plupart sont des applications immédiates de ce que les élèves doivent savoir : ceci n'est nullement une critique, car il est certain que les étudiants doivent faire de tels exercices, en assez grand nombre, pour se familiariser avec les méthodes de la Géométrie analytique. Beaucoup de questions, en même temps qu'elles sont simples, sont intéressantes. On en rencontre quelques-unes qu'il semble que l'auteur aurait dû éviter, la sixième par exemple, où l'on demande combien de points sont donnés par deux équations (en x, y) dont l'une est du $p^{\text{ième}}$, l'autre du $q^{\text{ième}}$ degré.

Ce n'est pas là un *exercice* ni une question à poser aux élèves auxquels s'adressent les questions voisines. J. T.



RUSSELL (Bertrand), M. A. — THE PRINCIPLES OF MATHEMATICS. vol. I. XXIX-534 pages in-8°. Cambridge, University Press, 1903.

On connaît les recherches critiques auxquelles, depuis 30 ou 40 ans surtout, les mathématiciens ont soumis les principes de leur science ; elles ont entraîné une refonte logique de la plupart des anciennes théories, et la création de doctrines nouvelles, comme la théorie des ensembles. Mais ces recherches, poussées en sens divers par des auteurs indépendants et de tendances diverses,

appelaient une systématisation et une synthèse. C'est cette synthèse que M. Russell nous apporte aujourd'hui ; de tous les travaux des mathématiciens-logiciens il a dégagé la philosophie qui y était impliquée d'une manière latente. Ce n'est pas seulement une nouvelle philosophie des mathématiques qui ressort de cette étude, c'est aussi et avant tout une logique nouvelle : car, en approfondissant et en éclaircissant les principes de leur science, les mathématiciens ont été amenés à analyser avec plus de finesse et de rigueur qu'on ne l'avait jamais fait les opérations de l'esprit et les procédés de raisonnement. Leibniz disait déjà que les mathématiciens sont les vrais maîtres dans l'art de raisonner ; les mathématiciens contemporains ont brillamment vérifié cette pensée, car c'est à eux que la Logique moderne doit presque tous ses progrès. Par cette double évolution, la Logique, en se développant, et la Mathématique, en remontant à ses principes, sont arrivées à se rejoindre et à se souder : et il est apparu que la Mathématique n'a pas d'autres principes et d'autres notions premières que les notions premières et les principes de la Logique même. Telle est la thèse fondamentale de l'Ouvrage de M. Russell. Il est parvenu à la démontrer en appliquant à l'analyse des propositions et des déductions mathématiques la Logique mathématique de M. Peano. A vrai dire, cette démonstration formelle se trouvera seulement dans le Volume II, que l'auteur prépare avec le concours de M. Whitehead ; mais l'enchaînement des idées et des propositions est suffisamment marqué dans le Volume I pour qu'on puisse l'apprécier, quand on connaît déjà les théories spéciales édifiées par M. Peano [1] et par M. Whitehead [2].

Nous pouvons nous dispenser de résumer les principes de la Logique mathématique, car nous les avons déjà exposés ici même en rendant compte du *Formulaire* de M. Peano [3]. Nous devons toutefois ajouter que M. Russell a perfectionné cette Logique dans une partie essentielle, la Logique des relations, qui sert précisé-

(1) *Formulaire de Mathématiques*, t. IV (Turin, Bocca, 1903) ; *Aritmetica generale e Algebra elementare* (Turin, Paravia, 1902).

(2) *A treatise on universal Algebra*, Vol. I (Cambridge, 1898) ; *On cardinal numbers* (*American Journal of Mathematics*, t. XXIV, 1902).

(3) *Bulletin des Sciences mathématiques*, octobre 1901.

ment de base aux Mathématiques [1], et qu'il a inventé pour cela un symbolisme très simple et très commode, bien préférable à l'Algèbre des relations de Schröder [2]. Au surplus, nous avons publié ailleurs une analyse de cette Logique nouvelle [3], et l'on nous permettra d'y renvoyer le lecteur. Nous nous attacherons ici de préférence aux théories mathématiques de l'auteur.

Si l'idée de nombre n'est pas, comme on le croit souvent, l'unique objet des Mathématiques pures, elle en est du moins le premier, le plus essentiel et le plus simple. Cette idée paraît même tellement simple à beaucoup de mathématiciens, qu'ils la considèrent comme intuitive et indéfinissable. Par là, ils se dispensent d'une recherche bien plus difficile qu'ils ne pensent, et ils tranchent sans s'en douter de graves problèmes philosophiques, dont la solution est de grande conséquence. C'est déjà une grosse question que de savoir lequel, du nombre cardinal ou du nombre ordinal, est logiquement antérieur à l'autre ; c'est une question encore plus délicate que de savoir comment il faut les définir, et elle n'a été résolue que tout récemment.

Le nombre cardinal peut se définir *par abstraction* ou *par postulats*. La définition par abstraction consiste à dire : deux classes (ensembles) ont *le même nombre* lorsqu'elles sont équivalentes, c'est-à-dire lorsqu'on peut établir entre leurs éléments respectifs une correspondance univoque et réciproque. Cette définition ne constitue pas un cercle vicieux, comme on pourrait le croire [4], car on peut, grâce à la Logique des relations, définir la correspondance univoque et réciproque en termes purement logiques, sans faire appel à la notion de nombre, ni même à celle du nombre *un*. Le nombre cardinal est donc l'idée qu'on obtient par abstraction en considérant un ensemble de classes *équiva-*

---

(1) V. RUSSELL, *Sur la Logique des relations* (*Revue de Mathématiques* de M. PEANO, t. VII, p. 115-148, 1901) et *Théorie générale des séries bien ordonnées* (*Revue de Mathématiques*, t. VIII, p. 12-43, 1902).

(2) Que nous avons analysée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* d'avril 1900.

(3) *Les principes des Mathématiques* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, janvier 1904).

(4) Et comme nous l'avons soutenu dans notre Ouvrage : *De l'Infini mathématique*, p. 306.

lentes; et comme dans le calcul logique chaque concept est représenté par la classe qui forme son extension, on peut dire que le nombre cardinal d'une classe est la classe des classes équivalentes. On obtient ainsi la définition *nominale* du nombre.

La définition par postulats ([1]) consiste à poser trois notions indéfinissables : o (zéro), N (nombre entier) et seq (suivant de), et cinq axiomes ou postulats qui établissent entre ces trois notions les relations fondamentales d'où dérivent toutes leurs propriétés, à savoir :

1° Zéro est un nombre entier ;

2° Zéro n'est le suivant d'aucun nombre entier ;

3° Le suivant d'un entier est un entier ;

4° Deux entiers sont égaux quand leurs suivants le sont ;

5° Si une classe est telle qu'elle contient o, et que, si elle contient un nombre entier, elle contient aussi le suivant, alors elle contient tous les nombres entiers (ce dernier axiome constitue la *loi d'induction*).

Ces cinq axiomes sont indépendants, donc nécessaires ; et l'on peut en déduire tous les théorèmes de l'Arithmétique des nombres finis, donc ils sont suffisants. Mais une définition par postulats est logiquement imparfaite, car elle n'établit ni l'existence, ni l'unicité des objets définis. Aussi y a-t-il intérêt à ramener cette définition à une définition nominale. C'est ce qu'ont fait MM. Russell et Whitehead en définissant comme suit les trois notions premières :

« Zéro est le nombre cardinal de la classe nulle (définie en Logique) » ;

« Le suivant d'un nombre n est la somme de n et de 1 » (l'addition arithmétique étant définie en fonction de l'addition logique) ;

« N (nombre entier fini) est la classe des nombres cardinaux ([2]) qui appartiennent à toute classe s qui contient o, et qui contient $(n+1)$ dès qu'elle contient n. »

([1]) Peano, *Formulaire de Mathématiques*.

([2]) N'oublions pas que le nombre cardinal a été précédemment défini d'une manière absolument générale.

Comme on le voit, la loi d'induction est impliquée dans la définition nominale des nombres entiers *finis*, c'est elle qui les distingue des autres nombres cardinaux, c'est-à-dire des nombres entiers *infinis*. Elle sert donc en quelque sorte à définir négativement ceux-ci.

On connaît une autre définition des ensembles infinis, et par suite des nombres infinis : « Un ensemble infini est un ensemble qui est *équivalent* à une partie intégrante de lui-même. » M. Whitehead [1] est parvenu à déduire cette propriété de la définition précédente, et par suite à supprimer un axiome de la théorie des nombres infinis. Il a d'ailleurs démontré rigoureusement, par le calcul logique, les propositions fondamentales de la théorie des nombres infinis, et cela, sans faire aucun appel à l'idée d'ordre. Il est donc établi désormais que le nombre cardinal est indépendant de l'idée d'ordre, et par suite du nombre ordinal.

La définition du nombre ordinal est analogue à celle du nombre cardinal. De même que celle-ci repose sur la considération des *classes équivalentes*, celle-là repose sur la considération des *suites semblables*. On appelle *suite* une classe dont les éléments sont rangés suivant un ordre linéaire tel que chacun d'eux (sauf un peut-être) ait un consécutif, et un seul. (On définira plus loin l'ordre linéaire.) Deux suites sont *semblables*, si l'on peut établir entre leurs éléments respectifs une correspondance univoque et réciproque telle que, si dans l'une l'élément b_1 suit l'élément a_1, dans l'autre l'élément b_2 suit l'élément a_2, a_2 et b_2 étant les correspondants respectifs de a_1 et b_1. Le nombre ordinal d'une suite est la propriété qu'elle a en commun avec toutes les suites semblables, ou, si l'on se place au point de vue de l'extension, c'est la classe des suites semblables à cette suite. Plus exactement, la relation de similitude existe, non pas entre les suites, mais entre les *relations ordonnatrices* qui déterminent l'ordre de chacune d'elles. Dès lors, un nombre ordinal est une classe de relations, de même qu'un nombre cardinal est une classe de classes ; M. Russell conçoit ainsi des nombres-relations, et la possibilité d'une *Arithmétique des relations* analogue à l'Arithmétique des nombres cardinaux.

---

[1] *On cardinal numbers*, Section III.

Nous avons dû invoquer l'idée d'ordre, et la supposer définie. C'est encore là une idée fondamentale des Mathématiques, qu'on se dispense en général de définir sous prétexte qu'elle est intuitive et simple, et en réalité parce qu'elle est assez complexe et difficile à analyser. M. Russell a catalogué *six* manières différentes de définir un ordre; nous ne les énumérerons pas, car elles se ramènent à deux *relations génératrices* : l'une est la relation d'*entre*, qui porte sur trois termes (exemple : b est entre a et c); l'autre est la relation de *séparation*, qui porte sur quatre termes, ou plutôt sur deux couples de termes (exemple : les termes a et c sont séparés par les termes b et d.) La première engendre les suites *ouvertes* (l'ordre linéaire), la seconde les suites *fermées* (l'ordre circulaire); M. Russell montre que toutes les deux peuvent se ramener en dernière analyse à une relation asymétrique transitive entre deux termes (*précède* ou *suit*). *Asymétrique*, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir à la fois « x précède y » et « y précède x »; *transitive*, c'est-à-dire que « x précède y » et « y précède z » entraîne nécessairement « x précède z ». Par suite de cette réduction, la distinction de l'ordre linéaire et de l'ordre circulaire ne paraît pas essentielle; toute suite fermée peut se ramener à une suite ouverte, si on la « coupe » avant ou après un terme quelconque. On voit que c'est la Logique des relations qui a permis d'analyser et de définir exactement l'idée d'ordre aussi bien que l'idée de nombre.

C'est encore elle qui va permettre de définir les diverses espèces de nombres sans commettre les fautes de logique qui entachent en général la généralisation du nombre (notamment quand on introduit les nouveaux nombres comme solutions de problèmes *impossibles*). Dans la suite naturelle des nombres entiers, il y a une relation R entre deux nombres consécutifs quelconques. On peut définir ses puissances successives : si $x\text{R}y$ et $y\text{R}z$, on a $x\text{R}^2z$; et ainsi de suite. On peut définir aussi sa relation converse : $x\breve{\text{R}}y = y\text{R}x$, et cette relation converse aura elle aussi ses puissances successives, converses des puissances homologues de R. L'ensemble des puissances de R et de $\breve{\text{R}}$ est ce qu'on appelle l'*ensemble des nombres entiers qualifiés* (positifs, négatifs et nul). Ce ne sont pas à proprement parler des nombres, mais des relations (des intervalles ou des distances) entre les nombres. Cette con-

ception des nombres qualifiés n'est nullement paradoxale, elle est conforme au sens commun : $+3$ signifie qu'on *avance* de 3 rangs, -5 qu'on *recule* de 5 rangs dans la suite naturelle, à partir d'un quelconque de ses termes ; $+3-5=-2$ signifie que l'exécution des deux opérations équivaut à l'opération -2, c'est-à-dire à un recul de 2 rangs. Comme on le voit, on ne *crée* pas de nouveaux nombres destinés soi-disant à compléter la suite naturelle, et l'on n'*identifie* pas les nombres positifs aux nombres entiers, ce qui serait contradictoire.

De même, les nombres fractionnaires ne sont pas des nombres, mais des relations entre les nombres entiers ; cette espèce de relation est bien connue des mathématiciens sous le nom de *rapport*. Si un nombre est un multiple d'un autre : $a=bx$, il a avec cet autre une certaine relation X : $a X b$. Les mathématiciens ont l'habitude de parler d'*opérations* plutôt que de *relations* : X est une relation multiplicative, c'est l'opération par laquelle on passe de a à b. La relation ou opération inverse s'appelle $\bar{X}$. Supposons maintenant que l'on ait : $c=by$, ou : $c Y b$, ou enfin $b \bar{Y} c$. En combinant les deux relations $a X b$, $b \bar{Y} c$, on obtient une relation qui est le *produit* des deux premières : $a X \bar{Y} c$. Celle-ci signifie que, pour passer de a à c, il faut multiplier par x, puis diviser par y. La relation complexe $X\bar{Y}$ exprime donc le *rapport* de a à c. On pourra la représenter par le symbole $\times x/y$, ou simplement : x/y, et retrouver ainsi les fractions ordinaires. Mais il ne faut pas oublier qu'une fraction n'est qu'un symbole *opératoire* (l'indication d'une multiplication suivie d'une division), conformément à la conception de M. Méray [1] ; il ne faut donc pas considérer les fractions comme des nombres homogènes aux précédents, ni *identifier* les fractions de dénominateur 1 aux nombres entiers, ce qui serait un paralogisme : la fraction $3/1$ désigne, non le nombre entier 3, mais le *rapport* du nombre 3 au nombre 1, tout comme $3/2$ désigne le rapport de 3 à 2. Encore ici, on constate que cette conception est conforme au sens commun ; car qu'est-ce que prendre les $2/3$ d'une pomme, si ce n'est la *diviser* par 3 et *multiplier* le résultat par 2 ? Mais ce qu'il importe sur-

---

(1) *Les fractions et les quantités négatives*, 1890.

tout de remarquer, c'est que, grâce à cette conception, les fractions s'appliquent aussi bien aux grandeurs qu'aux nombres : car un *rapport* est toujours le même, quelle que soit la nature de ses termes, ou celle des unités qui les constituent. Seulement il ne faut plus considérer les fractions comme des nombres *concrets*, et dire : 2/3 de mètre, 2/3 de litre ; il faut dire : telle longueur est au mètre, telle capacité est au litre, dans le rapport de 2 à 3 [1]. On aperçoit dès lors comment les nombres rationnels (y compris les nombres dits *entiers*) peuvent s'appliquer à la mesure des grandeurs des espèces les plus diverses.

Pour les nombres irrationnels, on comprend, d'après ce qui précède, que M. Russell ne veuille ni les créer arbitrairement, ni les définir comme limites de suites ou de séries qui n'ont pas de limite (rationnelle). Il les conçoit (suivant une suggestion de M. Peano) comme des *segments* : un segment est un ensemble de nombres rationnels qui ne contient pas tous les nombres rationnels, mais qui contient tous les nombres rationnels plus petits que l'un quelconque de ses éléments, et tel que chacun de ses éléments est plus petit qu'un autre de ses éléments (de sorte qu'aucun d'eux n'est le plus grand). En somme, cette définition est voisine de la conception de M. Dedekind : au lieu de considérer deux classes, l'une inférieure, l'autre supérieure, on n'en considère qu'une, l'inférieure, qu'on nomme *segment* et qu'on définit par ses propriétés intrinsèques (on pourrait tout aussi bien prendre la classe supérieure pour jouer le rôle de segment) ; mais, au lieu de créer par convention un nombre pour combler la *coupure*, l'intervalle des deux classes, on identifie le nombre irrationnel au segment qui le « définit », de manière que les questions d'existence et d'unicité ne se posent plus. C'est là d'ailleurs le but principal de toutes ces définitions du nombre généralisé : il importe, pour la pureté logique de la théorie, qu'aucune entité ne soit introduite arbitrairement, car cela obligerait à admettre des postulats d'existence qui rompraient l'enchaînement logique des propositions à partir des principes premiers. Un nombre irrationnel n'est rien de

---

[1] Il en est de même, d'ailleurs, pour les nombres entiers : 2 mètres, 3 litres, ne désignent pas réellement des nombres cardinaux, mais le rapport d'une grandeur à l'unité de même espèce.

plus qu'un ensemble de nombres rationnels : par suite, les nombres irrationnels existent dès qu'existent les nombres rationnels, et au même titre qu'eux. Ici encore, on peut montrer que cette conception n'est pas contraire au sens commun : car les nombres irrationnels (quelle que soit leur définition) n'ont d'autre rôle que de traduire (de mesurer) les grandeurs incommensurables : or qu'est-ce qu'une grandeur incommensurable, sinon une grandeur dont la mesure donne lieu à une suite infinie de nombres rationnels plus grands les uns que les autres, et dont aucun n'est le plus grand, parce qu'aucun n'épuise la grandeur à mesurer? Il est donc naturel de prendre pour mesure de cette grandeur l'ensemble même des nombres rationnels qui en sont les mesures indéfiniment approchées par défaut. Cela dispense de tout postulat relatif à l'existence d'une *limite*. C'est, au contraire, *après* que les nombres irrationnels ont été, non pas créés, mais trouvés et définis, qu'on peut définir la limite d'une manière générale, et démontrer que toute suite convergente a une limite.

On est ainsi amené à la notion du continu. Il importe de remarquer que cette notion est désormais *purement ordinale*, c'est-à-dire qu'on peut la définir uniquement par des relations d'ordre, sans faire aucun appel à l'idée de grandeur : et c'est un des résultats les plus intéressants des travaux de Georg Cantor. La première définition qu'il avait donnée du continu (ensemble *parfait* et *bien enchaîné*) impliquait la notion de grandeur ou de distance, et postulait l'existence de points-limites en dehors de l'ensemble considéré (un ensemble *parfait* devant contenir tous ses points-limites). Par suite, c'était une définition *relative*, puisqu'elle définissait un ensemble continu par rapport à un espace (arithmétique) préexistant où il était en quelque sorte plongé. Il fallait trouver une définition *intrinsèque* de l'ensemble continu, qui ne supposât rien en dehors de l'ensemble même et qui reposât uniquement sur les relations internes de ses éléments. Pour cela, on part du type d'ordre η de l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1; ce type d'ordre est entièrement défini par les propriétés suivantes :

1° C'est un ensemble dénombrable ;

2° Il n'y a ni premier ni dernier terme ;

3° Entre deux termes quelconques il y en a un autre (ce qu'on exprime en disant que l'ensemble est *compact* [*überall dicht*]).

Ces propriétés sont purement ordinales, car, la première (la seule pour laquelle cela n'est pas évident), équivaut à dire qu'on peut ranger autrement les termes de l'ensemble de manière à en faire une *progression* [1].

Cela posé, on considère dans cet ensemble des *suites fondamentales* (ascendantes ou descendantes), telles que leurs termes successifs se suivent (ou se précèdent) dans le même ordre au sein de l'ensemble. Une suite fondamentale a pour limite un élément m de l'ensemble, si cet élément est le *premier* après tous les éléments de la suite [2]. Un ensemble est *condensé en soi*, si tous ses éléments sont des limites de suites fondamentales; il est *fermé*, si toutes les suites fondamentales qu'il contient ont des limites [3]; et il est *parfait*, s'il est à la fois fermé et condensé en soi. On peut maintenant définir le type d'ordre θ du continu linéaire comme suit :

« L'ensemble θ est parfait et contient un ensemble ordonné E dénombrable, et tel qu'il y a un de ses éléments entre deux éléments quelconques de θ. »

On peut démontrer que l'ensemble E ainsi caractérisé possède le type d'ordre η. Ainsi l'ensemble θ est à l'ensemble η ce que l'ensemble des nombres réels (compris entre 0 et 1) est à l'ensemble des nombres rationnels. Cette définition est un peu plus compliquée que l'ancienne, parce qu'elle exige, comme intermédiaire, la définition du type d'ordre η, qui sert en quelque sorte de charpente ou de carcasse au type d'ordre θ : mais elle est philosophi-

(1) Une progression est une suite semblable à la suite naturelle des nombres entiers, mais qui peut être définie directement, sans invoquer l'idée de nombre, par ses propriétés ordinales (RUSSELL, *op. cit.*, p. 240).

(2) On remarquera que cette définition de la limite n'implique plus aucune notion de distance ni de grandeur.

(3) Inutile d'ajouter : « en lui », puisque, l'ensemble n'étant pas conçu comme contenu dans un autre ensemble, les suites fondamentales ne peuvent avoir de limites hors de lui.

quement plus simple, ou du moins plus pure, puisqu'elle n'invoque que l'idée d'ordre (¹).

C'est un résultat considérable, et quelque peu paradoxal, que d'avoir pu affranchir la notion de continu de toute immixtion de l'idée de grandeur, alors que, suivant une tradition philosophique séculaire, la continuité semblait l'attribut propre et caractéristique de la grandeur. Et cela nous fait présumer (ce que M. Russell ne dit pas) qu'on réussira peut-être à définir la grandeur au moyen de l'idée d'ordre. En tout cas, on a pu définir d'une manière purement ordinale l'ensemble des nombres réels, qui est en quelque sorte le décalque de l'idée de grandeur. Or, comme le remarque M. Russell (²), si les applications des Mathématiques sont fondées sur les propriétés cardinales (ou logiques) du nombre entier, ce sont ses propriétés ordinales qui seules entrent en jeu dans les Mathématiques pures : les nombres n'y sont considérés que comme les termes d'une progression (³). Par conséquent, ce n'est pas sur l'idée de nombre que repose l'édifice entier des Mathématiques pures, c'est sur l'idée d'ordre : nous laissons au lecteur le soin d'apprécier l'importance philosophique de cette conclusion.

Nous ne nous arrêterons pas aux Chapitres où M. Russell traite de l'infini et du continu ; ils sont surtout utiles pour les philosophes qui s'attardent encore à discuter les antinomies de Kant. Aucun mathématicien ne trouve plus de difficulté à concevoir les nombres infinis ; aucun non plus ne croit à l'existence (même idéale) des infiniment petits. Selon la remarque ingénieuse et juste de l'auteur (⁴), l'infiniment petit a perdu, dans la philosophie des Mathématiques, tout le terrain que l'infini proprement dit a gagné. Le Calcul dit *infinitésimal* ne repose nullement sur l'idée d'infini : et en revanche, celle-ci se présente dans les théories élémentaires et fondamentales des ensembles et des nombres. Tel est le résultat

---

(¹) G. Cantor, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* (1895-1897), traduction Marotte (Paris, Hermann, 1899).

(²) *Op. cit.*, p. 241.

(³) C'est ce qui explique que d'éminents mathématiciens (Helmholtz, Kronecker, Dedekind) aient considéré le nombre ordinal comme antérieur au nombre cardinal.

(⁴) *Op. cit.*, n° 2[illegible]0.

curieux de la refonte logique de la Science, à laquelle est attaché le nom de Weierstrass. Un autre résultat, non moins important, est que les notions d'infini et de continu peuvent être définies au moyen des seules idées de nombre et d'ordre, sans aucun appel à l'intuition (spatiale ou temporelle), et même sans immixtion de l'idée de grandeur; en outre, le continu numérique ainsi défini suffit à fonder, non seulement l'Analyse entière, mais encore la Géométrie et la Mécanique, ce qui permet de purifier celles-ci de toute donnée intuitive et empirique, et de les constituer comme sciences mathématiques *pures*.

Il convient, à ce propos, d'expliquer ce qu'il faut entendre par *Mathématiques pures*. D'après M. Russell, la Mathématique pure est l'ensemble des propositions de la forme : « p implique q », p et q étant des propositions qui contiennent les mêmes variables, et qui ne contiennent pas d'autres constantes que les constantes logiques. Cette définition paradoxale se justifie par ce qui précède. Elle signifie, en somme, que toutes les vérités mathématiques sont des jugements hypothétiques de la forme : « si p est vrai, q est vrai », et cela, tout mathématicien l'accordera, car il est habitué à énoncer avec le plus grand soin les hypothèses moyennant lesquelles chaque théorème est valable. Chacun sait qu'on ne peut rien démontrer sans supposer ou postuler quelque chose : ce qui constitue proprement une vérité mathématique, ce n'est pas la *thèse*, c'est-à-dire la proposition démontrée, mais la relation nécessaire qui unit cette thèse à l'*hypothèse*. Or (et ceci achève de justifier la définition susdite) cette relation est purement *logique*, attendu que toutes les entités mathématiques peuvent se définir en fonction des constantes logiques, et, par suite, toutes les propositions mathématiques peuvent se déduire des principes de la Logique. La Mathématique apparaît en définitive comme un prolongement de la Logique, comme l'application de la Logique à certaines espèces de relations; et inversement, la Logique n'est plus que l'ensemble des principes généraux de la Mathématique pure. Ainsi se trouve consommée la fusion de la Logique et de la Mathématique, que leur analogie et leurs affinités secrètes avaient fait prévoir à quelques grands esprits, comme Platon et Leibniz.

On comprend maintenant dans quel sens la Géométrie peut

rentrer dans les Mathématiques pures : ce n'est pas en tant que science de l'espace actuel que nous habitons, mais en tant que science de tous les espaces possibles. A ce point de vue, c'est une science purement formelle, *a priori* et *hypothétique,* au sens qui vient d'être défini ; si tels ou tels axiomes sont vérifiés, telle ou telle géométrie sera vraie et s'appliquera à l'espace actuel. Mais c'est à l'expérience de nous apprendre si tels ou tels axiomes sont vérifiés, et par suite la Géométrie de l'espace actuel sera empirique, tout en conservant la forme déductive de la Géométrie pure, de manière à ne faire appel à l'intuition que pour la vérification de ses axiomes, mais nullement pour l'enchaînement des propositions qui en découlent.

Sous le bénéfice de ces explications, la Géométrie pure peut être définie : *la science des suites à plusieurs dimensions*. Elle repose donc, elle aussi, sur les notions d'ordre et de relation. Cette définition ne surprendra pas trop les mathématiciens, qui sont habitués à dépouiller les entités géométriques de toute propriété spatiale et intuitive, et à les définir uniquement par leurs relations. Que ces relations seules importent, et que la nature de leurs termes soit indifférente et étrangère à la construction logique de la Science, c'est ce que prouve la *dualité* de la Géométrie projective, où les mêmes propositions valent pour les points et pour les plans.

La considération des suites à plusieurs dimensions justifie seule la création des nombres complexes en général, et en particulier des nombres dits *imaginaires*. En effet, on ne peut pas logiquement définir les nombres imaginaires comme racines d'équations algébriques qui n'ont pas de racines « réelles », et, en tout cas, on ne peut pas démontrer l'existence de telles racines ; on ne peut que les créer par convention [1]. Nous n'avons pas besoin de dire ici comment on définit les nombres complexes, leur égalité et leurs opérations ; c'est seulement lorsque la théorie de ces nombres est constituée qu'on peut constater et prouver qu'ils servent à résoudre les équations algébriques insolubles en nombres réels. Mais, remarquons-le bien, les équations qu'ils résolvent ne sont pas identiques aux équations insolubles (ce qui serait une contradiction) ; elles sont seulement analogues, car tous leurs coefficients doivent être

(1) Cf Borel et Drach, *Théorie des nombres et Algèbre supérieure*.

considérés comme des nombres complexes : $\sqrt{-1}$ n'est pas la racine carrée du nombre *réel* — 1 (laquelle n'existe pas), mais bien celle du nombre *complexe* (— 1, 0). Par conséquent, il importe de distinguer radicalement l'ensemble *total* des nombres complexes de l'ensemble des nombres réels, et il n'est pas permis d'identifier ceux-ci à une partie de ceux-là. Cela prouve en même temps que la conception algébrique des imaginaires est illogique, puisqu'elle ne peut les définir que par rapport aux nombres réels. Reste une seule difficulté : on conçoit d'ordinaire un nombre complexe général comme l'ensemble de *n* nombres réels rangés dans un ordre déterminé, autrement dit, comme une *suite* de *n* nombres réels. Or deux ou plusieurs de ces nombres peuvent être égaux, c'est-à-dire identiques, de sorte qu'ils deviennent indiscernables. Ce qui définit le nombre complexe, c'est une relation *uniforme* entre les *n* premiers nombres entiers et les nombres entiers ; on peut donc considérer une telle relation comme *étant* le nombre complexe lui-même ([1]). Cette conception supprime en même temps toute difficulté relativement à l'existence et à l'unicité du nombre défini.

M. Russell distingue trois espèces de géométrie, qui diffèrent par leurs notions premières et par leurs axiomes. Elles admettent toutes trois comme notion première l'idée de point; mais les points étant simplement les termes des relations géométriques, leur nature n'importe pas. La plus simple des relations étant celle qui existe entre deux points, c'est par la notion de la ligne droite que les trois géométries se séparent. La Géométrie *projective* considère la ligne droite (dans sa totalité) comme l'ensemble des points déterminés par deux points donnés. La Géométrie *descriptive* considère, au contraire, soit le *segment* fini déterminé par deux points, soit le *rayon* constitué par une demi-droite infinie. La Géométrie *métrique*, enfin, considère le segment fini déterminé par deux points comme une grandeur, une *distance*.

Les axiomes de la Géométrie projective ont été formulés par

([1]) RUSSELL, *op. cit.*, n° 360. Rappelons que M. Peano définit les nombres imaginaires comme des substitutions de nombres complexes : or une substitution est une espèce de relation : la multiplication des substitutions est identique à la multiplication des relations.

M. Pieri [1], en s'inspirant des travaux de Staudt et de M. Pasch. Ils aboutissent à la construction du quadrilatère de Staudt, et à l'introduction des coordonnées projectives. L'uniformité de la construction du quadrilatère (c'est-à-dire l'unicité du quatrième point d'une rangée harmonique) ne peut être démontrée qu'au moyen de la troisième dimension.

La Géométrie descriptive formulée par MM. Pasch et Peano repose sur la relation d'*entre* (un point est situé entre deux autres sur une droite) qui n'est pas projective. Un segment ab est l'ensemble des points situés entre deux points différents a et b; le segment $a'b$ est l'ensemble des points c tels que b est entre a et c (prolongement de ab au delà de b) et le segment ab' est l'ensemble des points c tels que a est entre b et c (prolongement de ab au delà de a). La ligne droite complète (infinie) se compose des segments ab, $a'b$, ab' et des points a et b. On peut aussi concevoir, avec M. Vailati, la droite comme le champ d'une relation symétrique transitive qui existe entre deux quelconques de ses points, cette relation étant définie par 8 axiomes qui suffisent à fonder la géométrie de la ligne droite. On peut ensuite définir le plan par la même méthode. Il est intéressant de comparer les deux sortes d'espaces que construisent respectivement la Géométrie projective et la Géométrie descriptive. L'espace projectif est elliptique (une droite y est une ligne fermée; deux droites s'y rencontrent toujours); l'espace descriptif, au contraire, est euclidien ou hyperbolique. Si l'on supprime de l'espace projectif tous les points d'un plan, ou tous les points situés d'un côté d'une quadrique fermée, on obtient un espace descriptif (euclidien ou hyperbolique, respectivement).

La Géométrie métrique est caractérisée par l'introduction de la notion de *distance* entre deux points. (La définition *projective* de la distance, comme relation entre 4 points, n'est qu'un artifice verbal qui ne réussit pas à déduire réellement la Géométrie métrique de la projective). Cette grandeur est définie par les axiomes suivants :

1° Chaque couple de points a une distance et une seule ;

---

(1) *I Principii della Geometria di posizione, composti in sistema logico deduttivo* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*). Turin, Clausen, 1898.

2° La distance est une relation symétrique (une grandeur absolue);

3° Sur une droite donnée il y a deux points, et deux seulement, qui soient à une distance donnée d'un point donné de cette droite;

4° Il n'y a pas de distance maximum;

5° La distance d'un point à lui-même est zéro;

6° Il n'y a pas de distance minimum entre deux points distincts;

7° Si d et δ sont des distances données, et si $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont des points distincts d'une droite tels que la distance de deux consécutifs soit δ, il y a des valeurs de n pour lesquelles $A_0 A_n$ est plus grande que d (axiome d'Archimède);

8° Si A_0, A_n sont deux points quelconques, il existe sur leur droite (quel que soit n) $n - 1$ points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, tels que toutes les distances $A_0 A_1, A_1 A_2, \ldots, A_{n-1} A_n$ sont égales [axiome de divisibilité (1)].

Moyennant ces axiomes, les distances seront mesurables. Pour achever de fonder la Géométrie métrique, il faut encore définir la mesure des angles, et d'abord définir exactement le concept d'angle. Un angle est une *Strecke* (*stretch*) de rayons, autrement dit, l'ensemble continu des rayons d'un faisceau compris entre deux d'entre eux (ce qui implique la relation ordinale d'*entre*). On comprend mieux cette définition quand on pense à la relation projective qui existe entre un faisceau de rayons (plan) et une série de points (droite), et qu'on se rappelle que l'ensemble continu des points d'une droite situés entre deux points donnés est ce qu'on appelle une *Strecke* (2).

Quant à la définition projective des distances et des angles (par des rapports anharmoniques), elle n'a qu'une valeur technique; car elle fait intervenir, outre les deux éléments dont on mesure la distance, deux éléments de référence qui ne sont nullement impliqués dans la notion de distance. Par suite, la Géométrie

(1) Que M. Russell appelle: *axiome de linéarité*.

(2) Il est facile de reconnaître l'insuffisance de la définition classique de l'angle (figure formée par deux droites qui se coupent), quand on considère qu'elle ne permet pas de concevoir la *somme* de deux angles, c'est-à-dire qu'elle ne définit pas l'angle comme grandeur.

métrique dépasse la Géométrie projective, qui d'ailleurs en est indépendante.

L'auteur montre par des exemples qu'on peut définir les différents espaces d'une manière purement formelle et analytique ; et que la continuité attribuée à l'espace n'est pas autre que la continuité arithmétique ordinale définie par G. Cantor. Puis il discute la théorie kantienne de l'espace, et certains arguments philosophiques dirigés contre la conception de l'espace comme composé de points. Il en tire des conclusions en faveur de la notion d'espace absolu, c'est-à-dire indépendant des objets qu'il contient et de leurs relations (¹).

L'auteur tient d'autant plus à justifier l'espace absolu, que celui-ci est, comme le temps absolu, un postulat de la Dynamique. Celle-ci suppose en outre la matière ; mais cette matière n'est pas la matière physique, c'est simplement le sujet ou substratum du mouvement destiné à établir une relation entre l'espace et le temps. Un point matériel n'a d'autre fonction que d'occuper un certain point à un certain instant ; l'impénétrabilité de la matière se réduit à ceci, que deux points matériels ne peuvent occuper le même point au même instant. D'autre part, un même point matériel ne peut occuper deux points au même instant. Enfin, le mouvement d'un point matériel doit être continu. Toutes ces conditions peuvent se résumer comme suit : étant donné un continu à une dimension (le temps) et un continu à trois dimensions (l'espace), il existe entre eux un ensemble de relations uniformes et continues telles que le produit logique de deux quelconques d'entre elles est nul. Telle est la définition logique d'un monde « cinématique ». Le mouvement consiste dans le fait qu'une entité occupe une suite continue de points en une suite continue d'instants.

Peut-on bannir de la Dynamique l'idée de causalité, comme le veut l'école « descriptive » et phénoméniste (Kirchhoff, Mach) ? La Dynamique suppose tout au moins que, dans un système matériel indépendant, les configurations à *deux* instants impliquent la configuration à un troisième instant quelconque (passé ou futur). Telle est la formule logique du principe de causalité. Le monde

---

(¹) *Cf* les articles de M. Russell dans la *Bibliothèque du Congrès de Philosophie* (t. III ; A. Colin, 1900) et dans le *Mind*, N. S., nº 39.

« dynamique » dépasse donc le monde « cinématique », contrairement à la thèse de l'école descriptive. Cette conception de la causalité diffère notablement de la conception courante ; d'abord, elle exclut la notion de force, qui est « une fiction mathématique », attendu que la vitesse et l'accélération elles-mêmes n'ont pas de réalité physique selon notre auteur, car ce ne sont pas des *états*, elles n'existent pas dans l'*instant* : il faut deux états successifs pour déterminer la vitesse et trois pour déterminer l'accélération. Ensuite, elle implique la considération de *trois* états successifs, et non pas de *deux* seulement, comme on le croit d'ordinaire quand on parle de *la* cause et de l'effet et qu'on les considère comme équivalents. Enfin, elle exclut la notion vulgaire de la causalité particulière, c'est-à-dire d'un enchaînement causal entre *un* événement et un autre : il faut tenir compte de l'état total du système aux divers instants considérés ; si l'on peut parler de *causes* et d'*effets* particuliers, c'est par une abstraction approximative, et en tant que certains systèmes sont sensiblement indépendants du milieu ambiant. Tel est le cas, notamment, pour les lois de la gravitation, qui ont présidé à la constitution de la Dynamique classique. Les fameuses « lois du mouvement » de Newton n'ont aucune valeur nécessaire et, *a priori*, elles sont, comme les axiomes de la Géométrie, soit une définition d'un univers matériel possible, soit des postulats de *notre* univers actuel, vérifiables empiriquement (donc approximativement). La Dynamique *pure* n'a pas d'autres principes *a priori* que ceux de la Logique : et ces principes dominent également la dynamique de Newton et la dynamique de Hertz.

Ainsi s'achève la démonstration de la thèse soutenue dans tout le cours de l'Ouvrage. Nous n'avons ni la place, ni l'ambition de la discuter ici. Il nous suffit d'avoir donné, par une analyse sommaire, une idée du contenu de ce grand travail, de son ampleur et de son originalité. Son importance philosophique est considérable, car il apporte une nouvelle doctrine, mise au courant des transformations de la Science et de ses derniers progrès, et destinée à remplacer les conceptions surannées et périmées qui ont encore cours chez les philosophes [1]. Lors même que toutes

[1] *Cf* notre article sur la *Philosophie des Mathématiques de Kant* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1904.)

les conclusions de l'auteur (dont quelques-unes sont hardies et paradoxales) ne prévaudraient pas définitivement, elles fournissent une matière à réflexion et à discussion, et donnent à l'esprit l'impulsion nécessaire pour s'affranchir des préjugés de la tradition et de la routine. Même au point de vue de l'enseignement, les théories de M. Russell seront utiles, en contribuant à éclaircir et à préciser les principes des Mathématiques, qui en sont encore (malgré tant d'efforts méritoires) la partie la plus difficile, la plus obscure et la moins bien traitée. Il faut espérer qu'elles réussiront à y répandre la lumière, à y faire régner une rigueur absolue et à réconcilier enfin ces deux sœurs trop longtemps séparées et parfois même opposées : la Logique et la Mathématique.

Louis Couturat.

HUMBERT (G.) — Cours d'analyse professé a l'École Polytechnique. Tome II: Compléments de Calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles. 1 vol. xviii-493 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Il n'est guère utile de dire que les qualités du premier Volume de ce *Cours d'Analyse* se retrouvent dans celui-ci : même rigueur sans sécheresse, même clarté et même élégance, même mesure dans le développement de chaque sujet : l'auteur sait dire ce qui est vraiment essentiel. Si l'on regrette parfois qu'il n'aille pas plus loin, ce regret même est un hommage involontaire à la perfection des explications qu'on vient de lire et, lorsqu'on est parvenu à la fin du Livre, on se dit qu'il ne pouvait guère être plus heureusement mesuré et composé.

Dans la préface qu'il a mise en tête de ce second Volume, M. Humbert a cru devoir s'expliquer sur le caractère de son enseignement à l'École Polytechnique et je crois que, à un moment où il est question de modifier les programmes d'entrée de cette illustre maison, il est bon que ceux qui auront la responsabilité de ces changements veuillent bien méditer ce qu'il dit. Il parle de

l'enseignement de seconde année, dont la matière est celle-là même qui est traitée dans le Volume dont nous aurons à parler.

« La place la plus importante y est due aux Théories fondamentales dont la Mécanique, la Physique, l'Art de l'Ingénieur ou du Constructeur font un perpétuel usage ; j'ai donc consacré la moitié de mes Leçons aux équations différentielles, qui interviennent dans la plupart des problèmes que nous posent les sciences appliquées, et dont l'étude est donc la question maîtresse de l'Analyse ; j'ai insisté spécialement sur les procédés d'intégration et de réduction, en les éclairant par des exemples variés ; j'ai donné enfin une idée des méthodes employées pour l'étude directe des solutions, principalement dans le cas particulier des équations linéaires. En vertu des mêmes principes, j'ai développé avec soin la théorie des intégrales multiples, si utile à l'Électricien ; j'en ai fait des applications à la Géométrie, à la Mécanique ; j'y ai rattaché, en quelques pages, les intégrales eulériennes.

» Mais le but de l'Institution polytechnique n'eût pas été atteint si le *Cours d'Analyse* n'avait dépassé ce cadre un peu étroit, mesuré aux besoins actuels des écoles d'ingénieurs ; en vue des perfectionnements possibles de l'application, il était indispensable d'aller au delà, en introduisant dans le Cours des notions mathématiques d'un ordre plus élevé, simplifiées cependant par l'effort continu des Géomètres et mûres pour l'utilisation pratique.

« Ce développement de l'instruction a un autre avantage. On ne possède en effet la méthode et la sûreté qui sont nécessaires pour plier à une application nouvelle une théorie d'Analyse, même élémentaire, que si l'on est maître de celle-ci : il convient dès lors de l'avoir dépassée, de connaître ses liens avec les théories voisines qui la prolongent et qui l'illuminent... »

Voilà de sages paroles, dignes de celui qui enseigne et de ceux qui reçoivent ses leçons ; et si l'enseignement est donné dans cet esprit à l'École Polytechnique, c'est dans le même esprit que les élèves doivent y être préparés, que les candidats doivent être jugés. C'est sans doute ce qui est *utile* qu'on doit avoir en vue, mais non pas seulement ce qui est immédiatement utile ; la véritable intelligence de la Science, de la puissance de ses méthodes, voire même le sens de sa beauté, ne sont pas inutiles à ceux qui

seront appelés à diriger, à perfectionner, à renouveler les industries scientifiques, et l'enseignement qui les prépare à ces fonctions ne doit pas consister dans un recueil de recettes, lors même que celles-ci pourraient suffire à des gens dont toute l'initiative scientifique consistera à modifier dans une formule les données numériques.

La division du second Volume du *Cours d'Analyse* est nettement indiquée par le sous-titre.

Les compléments de Calcul intégral commencent par la notion de l'intégrale multiple. Une aire plane, limitée par un contour rapporté à des axes obliques, est définie d'une façon précise par la décomposition du plan en petits losanges et l'évaluation de la somme des losanges contenant des points du contour; il est ensuite aisé de montrer que l'aire ainsi définie ne dépend pas de la direction des axes. Une fois la notion d'aire précisée, l'intégrale double se rapportant à une aire plane déterminée se définit, d'une façon rigoureuse, par un procédé identique à celui qui a servi pour l'intégrale simple. La même méthode, en remplaçant les aires par les volumes, s'applique aux intégrales triples.

Ces notions générales acquises, l'auteur met le plus grand soin à expliquer comment l'on procède effectivement au calcul d'une intégrale double ou triple, ou plutôt comment l'on ramène ce calcul à celui de deux ou de trois quadratures; il ne laisse aucune obscurité ni sur la façon de procéder, ni sur la légitimité de la méthode. Il donne ensuite bon nombre d'applications (volumes, centres de gravité, moments d'inertie), judicieusement choisies de manière que les calculs soient simples: lorsqu'on veut faire comprendre une méthode sur des applications, il ne faut pas que l'attention soit détournée de la méthode par la complication ou la difficulté des calculs intermédiaires.

Le changement de variables est d'abord expliqué en toute rigueur pour le passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires; l'auteur fait voir ensuite comment la méthode de décomposition du champ de l'intégrale employée dans ce cas se généraliserait pour le cas où l'on aurait à faire un changement de variables tel que

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

et conduirait à la décomposition du plan en petits parallélogrammes curvilignes dont on prévoit sans peine l'évaluation, en se bornant à la partie principale ; il indique rapidement les difficultés qu'il y aurait à présenter sous une forme rigoureuse cette méthode que, toutefois, les étudiants doivent connaître, parce qu'elle est intuitive et qu'elle ne s'oublie pas ; puis il établit la formule du changement de variables en changeant successivement les deux variables ; la méthode une fois bien comprise s'étend immédiatement aux intégrales triples. De nombreux exemples achèvent de l'éclairer.

M. Humbert évite les difficultés relatives à la définition géométrique de l'aire d'une surface courbe, en adoptant pour la définition même de cette aire l'intégrale double

$$\int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

où E, F, G sont les coefficients du carré de l'élément linéaire ; il prend soin d'établir que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées curvilignes.

Il passe ensuite à l'extension de la notion d'intégrale multiple au cas d'un *champ infini* ou *d'une fonction à intégrer discontinue*. Cette extension est légitime lorsqu'une certaine intégrale double $\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$, relative à un champ fini, où il n'y a pas de discontinuités, tend vers une limite finie, dans les conditions que l'on sait : l'auteur prend soin d'insister de suite sur la différence essentielle entre ce cas et celui des intégrales simples ; il est nécessaire ici que l'intégrale $\int\int_R |f(x, y)|\, dx\, dy$ ait une limite. Les cas simples où l'on reconnaît de suite l'existence de cette limite sont ensuite traités. Signalons l'exemple de l'intégrale

$$\int\int \frac{d\sigma}{P^\alpha Q^\beta R^\gamma},$$

où P, Q, R sont trois fonctions linéaires de x, y, prise à l'intérieur du triangle formé par les droites $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, lorsque α, β, γ sont des nombres plus petits que 1.

L'auteur traite ensuite des intégrales de lignes et de surfaces. Les définitions une fois précisées, il établit successivement les

formules de Green et de Stokes, en insistant comme il convient, pour la formule de Green, sur le cas d'une intégrale double (Riemann); ce sera, plus tard, le fondement de la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires.

La détermination des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx,$$

la généralisation, d'après Abel, du problème des tautochrones, la réduction des intégrales eulériennes de première espèce et de l'intégrale de Dirichlet aux intégrales eulériennes de seconde espèce, fournissent de belles illustrations des règles relatives à l'intégration sous le signe somme ou au changement de variables.

Signalons encore, dans le Chapitre qui concerne les intégrales eulériennes, l'évaluation de $\Gamma(x)$ pour x très grand, et la démonstration, d'après M. Hilbert, de la transcendance de e.

Les fonctions analytiques $P(x, y) + i\,Q(x, y)$ ont été définies, dans le premier Volume, par les conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$

l'intégrale prise entre des limites imaginaires est définie comme une intégrale curviligne et le théorème fondamental de Cauchy est, comme je l'ai déjà dit plus haut, fondé sur la formule de Green. On sait assez combien cette voie est simple et naturelle; elle ne met pas en évidence, à la vérité, l'inutilité de l'hypothèse relative à la continuité de la dérivée et l'on sait aussi qu'il est possible de présenter les choses d'une façon très simple, en se donnant la satisfaction de ne point faire cette hypothèse. Les applications du théorème de Cauchy aux séries de Taylor, de Laurent, de Fourier, les propositions fondamentales de la théorie des fonctions analytiques, en particulier des fonctions entières et des fonctions méromorphes sont établies avec toute la clarté et la simplicité qu'on peut désirer. Signalons en particulier la façon dont est présentée la démonstration du théorème de MM. Mittag-Leffler sur le développement d'une fonction méromorphe, qui ne tient que quelques lignes: c'est à ce théorème qu'est rattaché

celui de Weierstrass sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires.

La détermination des intégrales définies

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

l'application de l'intégrale

$$\int \frac{\cot \pi z}{z(z-a)}\,dz$$

prise le long du contour d'un carré qui grandit indéfiniment, à l'établissement de la formule

$$\cot u = \frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2-\pi^2} + \frac{2u}{u^2-4\pi^2} + \ldots,$$

suffisent à montrer quel puissant outil de transformation constitue l'intégrale de Cauchy : l'étude des cas les plus simples des intégrales de la forme

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

où $f(z)$ est une fonction algébrique de z

$$\left[f(z) = \frac{1}{1-z}, \frac{1}{1+z^2}, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{1}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \right],$$

montrera de même comment elle permet de découvrir, de la façon la plus simple, les propriétés de la fonction définie par l'intégrale, ou plutôt de la fonction inverse. Dans les premiers cas le caractère univoque de la fonction inverse est connu, puisque cette fonction inverse est connue elle-même, et la considération des *lacets* fait apparaître immédiatement le caractère périodique de la fonction $\sin u$, par exemple.

Il me semblerait désirable d'ajouter à ces conditions si importantes deux mots sur la définition de la fonction

$$\operatorname{arc\,sin} z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

considérée comme une fonction univoque de z dans le plan où l'on

a pratiqué deux coupures le long de l'axe des abscisses de 1 à ∞, de -1 à $-\infty$, et de dire, par exemple, que la partie réelle de cette fonction est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; j'ai observé, plus d'une fois, combien les étudiants étaient embarrassés quand on leur demandait d'évaluer numériquement une intégrale rectiligne telle que

$$\int_0^{1-i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

lors même qu'ils savaient bien manier le théorème de Cauchy relatif à des contours fermés. Une observation analogue s'applique à la fonction arc tang z.

Pour ce qui est du caractère univoque de la fonction inverse de la fonction

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

M. Humbert renvoie le lecteur à la théorie des équations différentielles, où ce point sera établi en toute rigueur. C'était, comme on sait, la voie ouverte par Briot et Bouquet, et l'on ne saurait en contester la valeur, puisqu'elle se relie à des méthodes générales qui se sont montrées singulièrement fécondes : c'est M. Picard qui a montré le premier, dans ce *Bulletin*, comment on pouvait combler la lacune qui subsiste dans la démonstration de Briot et Bouquet ; dans la démonstration, d'ailleurs très simple, qu'a adoptée M. Humbert, intervient le caractère algébrique de l'intégrale de l'équation d'Euler. Pour le moment, il n'est question bien entendu que de la détermination des périodes au moyen des intégrales prises le long des côtés du triangle formé par les racines.

L'auteur consacre un peu plus de quatre-vingts pages à la théorie et aux applications des fonctions elliptiques. On est vraiment émerveillé de tout ce qu'il a fait tenir dans ces pages, qui restent cependant d'une lecture attrayante et facile.

Après avoir établi les propriétés générales les plus importantes (théorèmes de Liouville, etc.), il introduit les fonctions ζu et pu par les séries doubles ; la périodicité de pu se déduit de celle de $p'u$, qui se lit sur la série ; la fonction σu est définie par la

formule

$$\sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du},$$

d'où il est aisé de déduire son caractère de fonction entière; la relation entre pu et $p'u$ est obtenue en formant une combinaison de ces fonctions qui n'ait plus de pôle. La formule de décomposition en éléments simples est obtenue en montrant comment on peut détruire la partie infinie du développement d'une fonction elliptique relative à un pôle a en en retranchant une combinaison linéaire de la fonction $\zeta(u-a)$ et de ses dérivées : cette méthode, que Riemann employait systématiquement dans son enseignement pour des cas particuliers, semble plus naturelle que la méthode si élégante que Ch. Hermite a donnée pour établir sa formule.

Celle-ci appliquée à l'expression

$$\begin{aligned} f(u) &= C\,\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)} \\ &= C\,\frac{\dfrac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}{\sigma^n(u-a)}}{\dfrac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma^n(u-a)}} \end{aligned}$$

où l'on suppose

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = na,$$

conduit immédiatement à la forme

$$f(u) = \frac{\beta + \beta_1 p(u-a) + \beta_2 p'(u-a) + \ldots + \beta_{n-1} p^{(n-2)}(u-a)}{\alpha + \alpha_1 p(u-a) + \alpha_2 p'(u-a) + \ldots + \alpha_{n-1} p^{(n-2)}(u-a)},$$

qu'a fait connaître M. Painlevé, et dont il a montré l'utilité, en particulier, pour l'étude des courbes elliptiques.

L'auteur développe ensuite le théorème d'addition et les propriétés des fonctions $\sqrt{pu - e_\alpha}$, auxquelles il rattache la « vieille » fonction sn$u$. Je suis persuadé que M. Humbert a le plus grand respect pour la vieillesse.

Jusque-là la fonction p a été définie au moyen des périodes; pour la définir au moyen des invariants g_2, g_3, on a admis antérieurement que, en posant

$$Z = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$$

et en définissant les demi-périodes au moyen des intégrales

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

prises le long des côtés du triangle dont les sommets sont les points e_1, e_2, e_3, la fonction z de u définie par l'égalité

$$u = \omega_1 + \int_{e_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

était holomorphe ; il n'y a maintenant aucune difficulté à montrer qu'elle coïncide avec la fonction pu construite au moyen des périodes calculées comme on vient de le dire. Soit en ramenant d'abord, ainsi qu'on l'a expliqué dans le premier Volume, le polynome sous le radical à être du troisième degré, soit par la substitution birationnelle que l'on sait, le problème de l'intégration des différentielles elliptiques se résout ensuite très aisément, sauf les petites difficultés qui concernent la détermination précise des logarithmes qu'introduisent les intégrales de troisième espèce, difficultés que l'auteur ne soulève pas.

Quelques pages très intéressantes se rapportent aux courbes du troisième ordre, au pendule simple, aux polygones de Poncelet, à l'arc de la lemniscate : elles suffisent à faire comprendre le parti qu'on peut tirer des fonctions elliptiques dans des ordres d'idées très divers.

Un dernier Chapitre concerne les calculs numériques. Jusqu'ici, la fonction thêta n'a pas paru ; il faut bien arriver à elle pour le calcul numérique. Les facilités extraordinaires qu'elle y apporte persuaderont sans doute le lecteur qu'elle n'est pas bonne seulement pour cet objet ; ces facilités mêmes tiennent aux propriétés de cette admirable fonction, comme les facilités qui résultent de l'emploi d'une table de logarithmes tiennent aux propriétés de la fonction logarithmique, plus « vieille » encore que la fonction sn u. Quoi qu'il en soit, en se bornant au cas où les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles et en les rangeant dans un ordre tel que q soit plus petit que $e^{-\pi}$, la convergence rapide des fonctions $\mathfrak{S}$ permet de calculer très aisément, comme le montre l'auteur, la quantité q par des approximations successives, puis les différents éléments ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3, puis pu connaissant u, ou u connaissant pu.

Tout cela est présenté sous une forme brève et vraiment utilisable.

J'arrive maintenant à la troisième Partie, aux équations différentielles.

Après avoir montré la signification de l'équation du premier ordre, de la solution générale et de la solution singulière; après avoir montré comment d'ordinaire les courbes intégrales n'ont pas d'enveloppe, l'auteur passe en revue les types classiques d'équations qu'on sait intégrer; à chaque fois, il a grand soin de signaler les propriétés géométriques des courbes intégrales qui résultent de la nature de l'équation différentielle qui les définit. Un paragraphe est consacré au facteur intégrant, au changement de variable, et à ce procédé qui consiste à combiner d'une façon heureuse l'équation différentielle proposée et celle qu'on en déduit par dérivation.

Ces méthodes sont appliquées à divers problèmes concernant les trajectoires, les lignes de courbures, les lignes asymptotiques, etc. Un paragraphe est consacré à l'intégration algébrique de l'équation d'Euler, fondée sur les mêmes considérations géométriques qui ont permis l'étude des polygones de Poncelet.

L'auteur passe ensuite aux cas de réductibilité immédiate d'une équation de l'ordre n, et donne de nombreuses applications géométriques : la plus importante se rapporte aux lignes géodésiques, dont l'équation différentielle est donnée en coordonnées curvilignes, sous la même forme que l'on obtient, en Mécanique, lorsque l'on écrit les équations de Lagrange.

Les propriétés des lignes géodésiques sont rattachées, pour une bonne partie, au cas où le ds^2 de la surface est mis sous la forme $du^2 + G\,dv^2$. Les lignes géodésiques de l'ellipsoïde, leurs belles propriétés relatives aux ombilics fournissent un exemple très intéressant.

Jusqu'ici, les « théorèmes d'existence » ont été laissés de côté et cela était d'autant plus légitime qu'il s'agissait des procédés qui permettent de ramener aux quadratures l'intégration d'une équation différentielle et qui, ainsi, fournissent la solution générale de l'équation, solution dont on n'a donc pas à prouver l'existence. Le théorème fondamental de Cauchy est établi dans le cas de deux équations différentielles simultanées du premier ordre, mises sous forme canonique et la démonstration est présentée de manière à

s'étendre immédiatement au cas général. De la démonstration même il résulte clairement que les points critiques des intégrales d'un système d'équations différentielles ne sont généralement pas fixes : l'auteur établit immédiatement, à cet égard, la propriété des systèmes linéaires. Il indique en général comment une solution d'un système peut être *prolongée*, et comment on peut être arrêté dans ce prolongement.

Ces propositions sont, comme je l'ai dit plus haut, appliquées à démontrer le caractère univoque de la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

Après avoir établi les propositions classiques qui concernent les équations différentielles linéaires, M. Humbert consacre un Chapitre à l'étude des intégrales d'une telle équation, supposée du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0.$$

Ici encore les démonstrations sont présentées de manière à pouvoir se généraliser aisément.

L'auteur établit d'abord la forme des intégrales aux environs d'un point a qui est pôle ou point singulier essentiel pour les fonctions $p_1(x)$, $p_2(x)$. Cherchant ensuite la condition pour qu'il y ait deux solutions distinctes de la forme

$$z_1 = (x-a)^{r_1} H_1(x), \qquad z_2 = (x-a)^{r_2} H_2(x),$$

où H_1, H_2 sont des fonctions holomorphes autour du point a, il montre que a doit être pour $p_1(x)$ un pôle d'ordre 1 au plus, pour $p_2(x)$ un pôle d'ordre 2 au plus; il est ainsi amené à l'équation *déterminante* relative au point a, et à la discussion, fondée sur la nature des racines de cette équation, qui conduit aux conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions appartiennent au type considéré. Application est faite à la recherche des équations différentielles linéaires du second ordre dont l'intégrale générale est méromorphe, entière ou rationnelle, puis à l'équation de Lamé.

Après avoir, en quelques mots, caractérisé la nature des solu-

tions des équations aux dérivées partielles, l'auteur traite des équations linéaires; je signalerai, pour le cas où il s'agit d'une équation linéaire avec second membre, le soin avec lequel il montre que la méthode classique ne fournit pas toujours la solution la plus générale, mais ne laisse échapper que des solutions exceptionnelles sans constante arbitraire. Des équations linéaires il passe aux équations aux différentielles totales, puis aux équations de la forme $f(x, y, z, p, q) = 0$, pour lesquelles il développe la méthode de Lagrange, en insistant, comme il convient, sur son interprétation géométrique.

Il se borne, pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier, à quelques exemples.

L'Ouvrage se termine par une vingtaine de pages, en petit texte, intitulées : *Exercices sur la théorie des fonctions analytiques et les fonctions elliptiques*. Ces exercices, qui fournissent soit d'excellents exemples, soit des indications sur de belles théories comme la multiplication complexe, sont traités en détail.

J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ECHOLS (W.-H.). — *Elementary text-book on differential and integral calculus*. In-8°, London, Bell. 8 sh. 6 d.

ENCYCLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen*. 4. Bd. *Mechanic*. Redig. von F. Klein. 2. Thl. 2. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 3 m. 80 pf.

ENCYCLOPÄDIE... 5. Bd. *Physik*. Red. von A. Sommerfeld. 1. Th. 1. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. 80 pf.

FRANZ (KARL). — *Ueber die hypergeometrische Differentialgleichung in Nebenpunkten*. Gr. in-4°, 20 p. Berlin, Weidmann. 1 m.

GLASER (STEPH.). — *Untersuchung der Flächen 3. Grades, welche bei der Abbildung nach dem Prinzip der reziproken Radienvektoren*

wieder in sich selbst zurückkehren. 2. Thl. Gr. in-4°, 31 p. Berlin, Weidmann. 1 m.

Guyou (E.). — *La méthode des distances lunaires;* le présent, le passé, l'avenir. (Extrait de la *Revue maritime.*) In-8°, 23 p. Paris, Chapelot et Cie. 1 fr.

Pech (Rob.). — *Ueber Modulargleichungen elliptischer Funktionen,* In-4°, 10 p. Gross-Strehlitz, Wilpert, 1 m.

Rollet de l'Isle. — *Calcul de l'heure et de la hauteur d'une pleine mer au moyen des constantes harmoniques.* In-8°, 27 p. Paris, Impr. nationale.

Russell (B.). — *Principles of Mathematics.* Vol. I. In-8°, 564 p. London, Clay. 12 sh. 6 d.

Veröffentlichungen *des Centralbureaus der internationalen Erdmessung.* Neue Folge. N° 8. In-8°. Berlin, G. Reimer. 12 m.

Contenu : Th. Albrecht, Resultate des internationalen Breitendienstes. v-173 p. avec 12 planches.

Duhem (Pierre). — *Recherches sur l'Hydrodynamique.* 1re série, In-4°. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Hollefreund (Karl). — *Die Elemente der Mechanik von Standpunkte des Hamilton'schen Prinzips.* I. Thl. In-4°, 27 p. avec 2 planches. Berlin, Weidmann. 1 m.

Huygens (Christiaan). — *Abhandlung über das Licht.* Herausgeg. von E. Lommel. 2e édition par A.-J. von Oettingen. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, n° 20.) In-8°, 115 p. avec 57 fig. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m.

Argelander (F.). — *Bonner Durchmusterung des nördlichen Himmels.* 2e édition corrigée, par F. Küstner. T. III. (Anastat. Neudruck). Gr. in-4°. Bonn, Marcus et Weber. 60 m., relié 72 m.

Bauer (Gust.). — *Vorlesungen über Algebra.* Herausgeg. vom math. Verein München, avec portrait et 11 figures. Gr. in-8°, vi-375 p. Leipzig, Teubner. Relié 13 m.

Berichte *mathematische u. naturwissenschaftliche aus Ungarn.* Red. von Aug. Helle. 18. Bd. 1900. Grand in-8°, x-477 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

Betti (E.). — *Opere mathematiche pubblicate per cura della R. Accademia dei Lincei.* Vol I. In-4°. Milano, Hoepli. 25 l.

Duplessis (J.). — *Traité du nivellement, comprenant les principes généraux, la description et l'usage des instruments,* etc. 3ᵉ édit. In-8°, xiv-341 p. avec 112 fig. Paris, Béranger. 3 fr.

Geigenmuller (Rob.). — *Leitfaden u. Aufgabensammlung zur höheren Mathematik.* 2. Bd. *Die höhere Analysis oder Differential- u. Integralrechnung.* 5ᵉ édit. Gr. in-8°, xv-334 p. avec 61 fig. Mittweida, Polytechn. Buchhdlg. Relié 7 m. 50 pf.

Grotendorst (N.-C.). — *Beginselen der waarschijnlijksrekening en van de theorie der fouten.* Gr. in-8°, iv-185 p. Breda, Militaire academie. 3 fl. 20 c.

Guichard (Ch.). — *Traité de Géométrie.* 2ᵉ Partie : *Compléments.* In-8°, viii-430 p. avec fig. Paris, Nony et Cie.

Kiepert (Ludw.). — *Grundriss der Differential- u. Integralrechnung.* 2. Thl. *Integralrechnung.* 8. Aufl. Gr. in-8°, xx-665 p. avec 143 fig. Hannover, Helwing. 12 m.; relié 13 m. 50 pf.

König (Jul.). — *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen.* Aus dem Ungar übertragen vom Verf. Gr. in-8°, x-564 p. Leipzig, Teubner. 18 m.; relié 20 m.

Newcomb (S.). — *Astronomy for everybody. Popular exposition of the wonders of heavens.* In-8°, 358 p. London, Isbister. 7 sh. 6 d.

Ocagne (M. d'). — *Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie.* (Extrait du *Journal de l'École Polytechnique,* 2ᵉ série, cahier 8). In-4°, 67 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Teubner's (B.-G.) *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* XII Bd. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié 24 m.

Contenu : Adf. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. xxiv-509 p. avec 10 figures.

Weierstrass (Karl). — *Mathematische Werke.* Hrsg. unter Mitwirkung einer von der Kgl. preuss. Akademie d. Wissensch. eingesetzten Commission. III. Bd. Abhandlungen. Avec portrait de l'auteur. Gr. in-4°, viii-362 p. Berlin, Mayer et Müller. 24 m.; relié 27 m.; sur papier à écrire, relié 32 m.



1re Partie —

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BURALI-FORTI (C.). — LEZIONI DI GEOMETRIA METRICO-PROJETTIVA. 1 vol. in-8, XII-308 pages. Turin, Bocca frères, 1904.

Ces *Leçons de Géométrie* rendront grand service à tous ceux qui voudront apprendre à manier les méthodes de Grassmann, ou se rendre compte de ces méthodes, de leur portée et de leur fécondité. Elles sont claires, d'une lecture intéressante et facile; elles embrassent un nombre considérable de faits géométriques appartenant à des domaines différents, et je crois qu'elles n'intéresseront pas moins ceux qui connaissent déjà ces faits et qui voudront les voir au point de vue où s'est placé M. Burali-Forti que ceux qui se proposeront d'apprendre en même temps les faits et les méthodes.

Le point de départ de l'auteur est dans la considération du produit de quatre points A, B, C, D considéré comme le volume (affecté d'un signe) du tétraèdre ABCD et des *formations géométriques*

(4) $$h_1 A_1 B_1 C_1 D_1 + h_2 A_2 B_2 C_2 D_2 + \ldots,$$

(3) $$h_1 A_1 B_1 C_1 + h_2 A_2 B_2 C_2 + \ldots,$$

(2) $$h_1 A_1 B_1 + h_2 A_2 B_2 + \ldots,$$

(1) $$h_1 A_1 + h_2 A_2 + \ldots,$$

de quatrième, de troisième, de deuxième et de première espèce, où A_1, B_1, ... sont des points et h_1, h_2, ... des nombres relatifs. De ces formations, la première seule a une signification numérique, les autres doivent être, pour le moment au moins, considérées comme des symboles comprenant des nombres et des points, avec lesquelles on calculera, conformément à certaines règles dans lesquelles interviendront, d'une part, les habitudes de l'Algèbre ordinaire et, d'autre part, la signification numérique des formations de quatrième espèce. On définit ainsi l'égalité, l'addition, la multiplication (progressive) de deux formations. Dès que

l'égalité est définie, la formation géométrique apparaît comme ayant quelque individualité, et l'on peut adopter la formule suivante, malgré sa tournure quelque peu métaphysique : Une formation géométrique est l'être abstrait commun à toutes les formations égales; mais cette individualité se caractérise davantage quand les opérations d'addition et de multiplication (progressive) ont été définies. Il en est de même pour les nombres complexes : ceux-ci sont vraiment définis quand on a défini, outre l'égalité, les opérations fondamentales. Ils sont alors autre chose qu'un couple de deux nombres réels. Les vecteurs, bivecteurs et trivecteurs s'introduisent dans cette théorie, de la façon la plus naturelle, comme des formations géométriques spéciales. Cette théorie se complète par la définition de l'opération *indice* (|), du produit interne, de la notion d'angle. On a alors tout ce qu'il faut pour introduire les coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou obliques, coordonnées « dont la connaissance est indispensable, dit M. Burali-Forti, pour lire les Livres où l'on en fait usage ».

Cette phrase a-t-elle, dans l'esprit de l'auteur, la signification dédaigneuse qu'on est tenté de lui attribuer? Il se pourrait bien, d'autant qu'elle suit de bien près l'éloge, d'ailleurs mérité, de ces méthodes de Grassmann, qui « fondées sur les propriétés les plus simples de la Géométrie élémentaire et sur l'usage d'un algorithme pareil à celui de l'Analyse ordinaire, permettent, sans qu'il soit besoin d'aucun effort intellectuel pour les apprendre, d'opérer directement sur les êtres géométriques eux-mêmes, point, droite, plan, sans avoir besoin de leurs coordonnées, en éliminant ainsi complètement les *invariants numériques,* en leur substituant des opérations géométriques simples et précises ». Quoique l'auteur, malgré le talent qu'il a dépensé, ait assurément diminué l'effort nécessaire pour apprendre ces méthodes, il ne l'a pas entièrement supprimé, et quelques commençants continueront de s'effaroucher devant les abstractions du début, indispensables à la pleine intelligence du sujet; ils auront tort, et je veux bien admettre tout ce que dit M. Burali-Forti; il n'empêchera pas que ce qu'il considère comme un défaut de la Géométrie analytique ordinaire apparaisse comme un mérite à ceux qui se plaisent surtout aux transformations analytiques et même à ceux qui sont contents, pendant qu'ils développent un calcul, de ne pas se pré-

occuper de la signification géométrique de ce calcul; et, si même ces derniers, eux aussi, ont tort, après tout, les preuves que la Géométrie analytique a faites comme méthode d'invention ne permettent pas encore d'espérer qu'elle disparaisse devant des méthodes dont l'intérêt propre est d'ailleurs incontestable, et dont le mérite apparaît chaque jour plus grand, par le nombre de faits déjà connus qu'elles permettent de mieux pénétrer et d'exposer sous une forme plus condensée et parfois plus profonde.

Quoi qu'il en soit, la signification individuelle des formations géométriques et l'utilité de leur considération apparaissent nettement quand on arrive à la deuxième Partie, dans la réduction des formations géométriques de première, de deuxième et de troisième espèces : les réductions des formations de première et de deuxième espèces, en particulier, équivalant à la théorie du barycentre et à la réduction d'un système de forces. La notion de coordonnées se généralise singulièrement par la notion des coordonnées d'une formation géométrique. La définition des produits régressifs, puis l'exposition du principe de dualité, sous une forme générale, terminent cette deuxième Partie.

La troisième est consacrée à l'homographie. Celle-ci est définie d'abord d'une façon très générale qui sera étendue encore, dans la cinquième et dernière Partie, à tous les systèmes linéaires : à ce concept général se rattache naturellement celui de l'*homographie projective,* au sens ordinaire, qui trouve son application naturelle dans la théorie des coniques, exposée d'une façon large et intéressante.

La quatrième Partie contient la théorie des courbes et des surfaces, et, d'une façon générale, des êtres géométriques engendrés par un point, une droite ou un plan, qui dépendent d'une ou plusieurs variables numériques ainsi que des fonctions numériques d'un point.

On y remarquera la façon dont sont présentées les formules de Frenet, l'introduction des paramètres différentiels comme vecteurs, les formes simples et suggestives des équations différentielles des lignes de courbure, des lignes géodésiques et asymptotiques.

Dans une Note de cinq pages, qui termine ces *Leçons de Géo-*

métrie, se trouvent établies, d'une façon rapide et élégante, plusieurs propositions classiques relatives à des courbes dont le rayon de courbure satisfait à certaines conditions simples. J. T.



CURTZE (Maximilian). — Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. 1 vol. gr. in-8° de 628 pages (en 2 fascicules). Leipzig, Teubner, 1902.

Cette publication, la dernière que nous devions à l'infatigable explorateur de manuscrits que fut Max. Curtze, forme les 12e et 13e fascicules des *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften.* Elle comprend :

1° Le *Liber embadorum* de Savasorda, texte de la version latine faite en 1116 sur l'hébreu par Platon de Tivoli, et traduction allemande de Curtze;

2° Une correspondance en latin, échangée entre Regiomontanus (6 lettres), Bianchini, astronome du duc de Ferrare (2 lettres), Jacob de Spire, astronome du comte d'Urbin (1 lettre) et Christian Roder, professeur à l'Université d'Erfurt (1 lettre); ces lettres sont écrites de 1462 à 1471;

3° Un texte italien de l'*Artis metricæ practicæ compilatio* d'un Léonard de Crémone qui vivait au xve siècle. Curtze a trouvé cet opuscule assez important pour ajouter au texte une traduction allemande;

4° Une très curieuse algèbre allemande de la première moitié du xvie siècle, composée sous forme de commentaire très développé à de courts textes latins qui sont donnés comme composés par un Arabe du nom d'*Algebras* et adressés à un géomètre du nom d'*Yles,* le précepteur d'Euclide, prince de Mégare.

A. De ces quatre documents, le premier et le troisième concernent la Géométrie pratique, la seule, en fait, qui ait été vraiment étudiée au Moyen âge. Leur publication est une véritable révélation. Si, en effet, l'existence du Traité de Savasorda avait été

signalée depuis longtemps par Libri, dans son *Histoire des Sciences mathématiques en Italie,* les indications qu'il avait données étaient très insuffisantes et parfois inexactes; ainsi ce Traité contient bien la formule dite héronienne pour le calcul de l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés, mais n'en donne nullement la démonstration, ce qu'a répété Chasles d'après Libri.

Savasorda est le surnom d'un juif, Abraham-bar-Hayya, qui occupait, au commencement du XIIe siècle, une situation assez considérable au service du comte de Barcelone, et qui a laissé d'assez nombreux écrits en langue hébraïque. Lié avec Platon de Tivoli, il paraît l'avoir aidé dans ses traductions d'auteurs arabes. Le texte original de son Traité de Géométrie, qu'il aurait composé dans sa jeunesse pour les Juifs provençaux, existe encore.

La traduction de Platon de Tivoli est la première qui ait en réalité introduit dans l'Occident latin les éléments de la Géométrie grecque, apportée en Espagne par les Arabes. Son importance historique est donc considérable; la composition du Traité de Savasorda est d'ailleurs assez satisfaisante pour que Léonard de Pise, au commencement du XIIIe siècle, l'ait pris comme base pour rédiger sa *Practica Geometriæ*. Curtze a relevé avec soin les larges emprunts faits par le Pisan au *Liber embadorum;* il relève aussi à bon droit comment Savasorda a enseigné la solution numérique des équations quadratiques, en l'appuyant sur des démonstrations géométriques. La traduction de l'Algèbre de Mohammed-al-Khovarismi par Gérard de Crémone est postérieure d'au moins d'une génération.

B. A la différence de l'Ouvrage de Savasorda, le second Traité de Géométrie édité par Curtze n'avait jamais été signalé par aucun historien des Mathématiques, et la personnalité de l'auteur n'a soulevé de discussion que depuis la publication de ce Traité.

D'après une note du commencement du XVIIIe siècle sur un des manuscrits qu'il a utilisés, Curtze a indiqué comme auteur un *Leonardus Maynardus*, mentionné par Vida comme mathématicien renommé à la fin du XVe siècle, et il a assigné à l'Ouvrage la date de 1488 que porte à la fin le texte italien (*Completa die primo aprilis* 1488).

Une faute d'impression dans la reproduction du texte de Vida, donné par Curtze (p. 341, l. 12; lire *Blasius* au lieu de *Plasius*), souleva un scrupule naturel de la part de Gustaf Eneström. Il fit remarquer que la date inscrite sur le manuscrit pouvait n'être que celle de la copie, ou bien celle de la version italienne d'un texte qui existe en latin dans plusieurs manuscrits non datés, et qu'en somme il n'y a pas même de preuve décisive que ce texte italien soit de Léonard de Crémone. Si, d'autre part, il avait vécu avant le célèbre Biagio de Parme, il faudrait le faire remonter jusqu'à la seconde moitié du XIVe siècle. Il posait donc la question.

A. Favaro répondit dans le même volume de la *Bibliotheca mathematica* (1903), en défendant la détermination de Curtze, sauf pour la date précise attribuée à l'Ouvrage; le *Plasius* de Crémone mentionné par Vida est mort, en effet, entre 1492 et 1501. Mais l'illustre savant italien, dans une communication du 31 janvier 1904 au Real Istituto Venuto, est revenu sur le même sujet; il a constaté qu'un manuscrit de la Laurentienne contenait à la suite de la traduction d'Euclide par Campanus, deux longues Notes datées de 1405 et 1404 sous le nom d'un franciscain (frater ... ordinis minorum) *Leonardus de Antoniis de Cremona*, qualifié de bachelier [1]. L'une de ces Notes est donnée comme faite à la demande d'un docteur padouan qui a effectivement vécu vers 1400. A. Favaro remarque que l'existence de ce mathématicien « Leonardo d'Antonii de Crémone », vers le commencement du XVe siècle, est aussi bien assurée que celle de « Leonardo Mainardi », à la fin du même siècle, et que l'on peut se demander désormais lequel de ces deux personnages est l'auteur du traité publié par Curtze.

Le question est tranchée par un manuscrit du fonds latin de la Bibliothèque nationale (n° 7192), dans lequel un copiste des premières années du XVIe siècle a réuni les Œuvres mathématiques du Révérend Maître *Leonardus de Antoniis* de Crémone. On y trouve, en dehors de l'*Artis metricæ practicæ compilatio*, et des Notes sur Campanus, un long Traité d'Arithmétique, une Cosmographie et la description d'une horloge solaire portative. Il n'y a

---

[1] Évidemment en Théologie. Il n'y avait en effet ni bacheliers, ni licenciés, ni docteurs dans les Facultés des Arts.

aucune indication précise de dates; mais, d'une mention contenue dans le dernier Traité, on peut conclure qu'il a été écrit après 1438.

D'après les documents réunis par A. Favaro, Leonardo Mainardi de Crémone apparaît plutôt comme un médecin que comme un mathématicien : peut-être Vida le confondait-il déjà avec son homonyme. Il aurait cependant occupé une chaire de philosophie à Milan, et par suite a dû y traiter la Physique et l'Astronomie.

Si on la reporte au commencement du xve siècle, la *Compilatio* gagne évidemment comme intérêt historique, et l'on peut, en souscrivant à une remarque d'un possesseur de l'un des manuscrits de Léonard de Crémone, dire que ce fut l'un des précurseurs ignorés dont les mathématiciens de la Renaissance utilisèrent les travaux sans citer le nom.

C. La correspondance de Regiomontanus est de beaucoup, bien entendu, le document le plus intéressant parmi les quatre *Urkunden* de Curtze, si l'on considère le point de vue purement mathématique. Cependant je ne m'y arrêterai pas, parce qu'elle était déjà connue (depuis 1786), et que Moritz Cantor en a notamment parlé dans ses *Vorlesungen*. L'intérêt de la réédition de Curtze consiste en ce qu'il a publié, pour la première fois, les calculs de Regiomontanus pour les solutions des problèmes que lui posent ses correspondants ou de ceux qu'il leur renvoie en échange. Il y a, dans l'étude de ces calculs, nombre de petites énigmes intéressantes à résoudre. Curtze, dans ses Notes, a accompli le gros de la besogne; aussi, eu égard à la peine qu'il s'est donnée sous ce rapport, puis-je m'étonner d'une inadvertance assez singulière. Pages 196 à 197, dans un calcul astronomique du lieu vrai du Soleil, il a constamment (11 fois) imprimé « Stellæ » quand il faudrait « Solis », sans faire aucune remarque à ce sujet. Y avait-il là une abréviation ambiguë?

D. J'arrive au Traité d'*Algebras*. Curtze a adopté le titre : *Die Algebras des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum*. J'ai déjà rapidement indiqué le roman historique que contient cet Ouvrage; mais il est inutile de le compliquer, et à cet égard le titre donné par Curtze donne matière à critique

L'addition du nom d'*Initius* à celui d'*Algebras* dans quelques rubriques des manuscrits me paraît simplement due à une fausse lecture pour *Initium* (commencement); de même, si, dans ces rubriques, *Yles* est qualifié de maître ou de précepteur d'*Algebras*, c'est en contradiction avec le texte.

Curtze a très bien fait ressortir que tel livre d'*Yles*, dans cette Algèbre, est simplement tel livre d'Euclide. Il a découvert, en outre, un texte qu'il publie et d'après lequel le véritable nom de l'auteur des *Éléments* n'aurait pas été Euclide, mais Elias. Euclide ne serait qu'un surnom signifiant l'*Introducteur*. Curtze explique cette légende en admettant, avec Cantor, que les Arabes auraient traduit le surnom d'Euclide chez les Grecs, à savoir l'*Élémentaire*, par un mot dont on a pu tirer soit *Elias*, soit *Yles*, et qu'ensuite on aura pris le surnom pour le nom et inversement.

La conjecture est ingénieuse, mais elle est loin d'être encore élevée à la hauteur d'une probabilité, car l'on n'a pas encore retrouvé dans la tradition arabe de texte établissant l'emploi effectif, pour désigner Euclide, de l'épithète supposée dont on aurait tiré un nom d'Yles ou d'Elias. D'autre part, cette conjecture n'est pas valable en ce qui concerne l'auteur de l'Algèbre dont il s'agit, puisqu'il oppose nettement *Yles* à Euclide de Mégare, qui était alors généralement identifié avec le géomètre.

Il me semble qu'il ne faut pas trop s'attacher à la recherche des motifs qui ont conduit notre algébriste allemand à choisir tel ou tel nom pour sa fiction. Cet algébriste est incontestablement un mathématicien de valeur pour son temps; il est à mettre au niveau de Christoph Rudolff, sinon de Michel Stifel. Mais il lui a plu de raconter sur l'origine de l'Algèbre une fiction à la mode du temps, qui était celui de l'Arioste et de Rabelais. Il ne faut pas s'attarder à ses anachronismes plus qu'à ceux du *Pentagruel* ou de l'*Orlando furioso*. Malheureusement il a la fantaisie lourde; on le voit surtout dans les historiettes dont il a agrémenté les problèmes élémentaires de son premier livre. C'est Platon, Euclide, Aristote et Pythagore faisant collation avec Algebras et lui donnant à deviner leurs âges. C'est *Lameno*, le grand arithméticien, qui pose une question analogue sur les honoraires qu'Alexandre accorde à Platon, à Aristote et à Pythagore, comme professeurs à la Haute École d'Athènes. C'est Hippocrate qui fait acheter de

l'aloès à Athènes par Galien, Salomon qui envoie Esope à Damas pour y acheter du samit, ou le philosophe Algus qui l'envoie acheter du poivre à Paris. C'est Nicomaque qui vend des ouvrages de Mathématiques à Apollonius et à Aristée, et Boèce qui s'en mêle. Tout cela voudrait être drôle, et ne l'est guère. Notre auteur se lasse au reste bien vite de ce jeu innocent, et parfois il oublie sa fiction, et se met à citer Euclide au lieu d'*Yles*.

Cependant la littérature romanesque de l'époque déguisait généralement des idées plus sérieuses que la forme dont on les revêtait. Notre auteur semble être resté fidèle à cette tradition. Au premier abord, dans le récit que contient le Prologue fait en son nom personnel, il peut être difficile de le reconnaître. Voici à peu près ce récit :

Algebras, l'auteur du livre *Gebra et Almuchabala*, qu'il a adressé à *Yles*, le grand géomètre d'Égypte, vivait au temps d'Alexandre le Grand et de Nectanebos. Son livre fut traduit de l'arabe en grec par Archimède, du grec en latin par Apulée. Il a été connu de Mahomet qui en parle dans l'Alcorem ; il a aussi été traduit, dès le temps d'Alexandre, par l'Hindou *Aliabras* dans le livre *Alcoreth*, etc. Ce livre d'*Algebras* contient tout ce qu'on a trouvé jusqu'à présent sur la science des nombres, mais le texte en est obscur et exige un commentaire détaillé.

Suit, également en Allemand, le Prologue d'*Algebras* adressé à *Yles*. Nous y trouvons déjà développée une idée très juste, et d'une importance historique capitale. *Yles* a écrit à *Algebras* pour s'enquérir de ses travaux sur les nombres; *Algebras* lui répond qu'il s'étonne de cette question, vu que le point de départ de ses travaux se trouve précisément dans ce que lui, *Yles*, a écrit (dans son second livre d'*Euclide*). Le premier livre de notre auteur est consacré à l'exposé très minutieux de cette thèse qui revient précisément à celle que Zeuthen a si bien mise en lumière, et qu'on peut maintenant considérer comme classique, à savoir que les Grecs avaient une Algèbre sous forme géométrique et que, grâce à cette Algèbre, ils pouvaient aisément résoudre, même numériquement, les problèmes du premier et du second degré, ainsi que tous ceux qui s'y rattachent.

Joignez à cette idée fondamentale les suivantes qui ont leur part de vérité :

« La Science est plus ancienne, sous ses diverses formes, que ne le représentent les traditions courantes; elle n'a pas été limitée à un seul peuple; il est impossible d'admettre que le philosophe Euclide de Mégare soit l'auteur des *Éléments;* en tous cas, les Grecs eux-mêmes ont reconnu qu'ils avaient emprunté la Géométrie aux Égyptiens. »

Vous avez les traits essentiels de la fiction; et il n'y a de particulièrement intéressant à relever que le doublet hindou d'*Algebras,* parce qu'il semble lié au renseignement exact que les Hindous avaient pour le calcul plus d'aptitudes que les autres peuples, et que ce doublet (*Aliabras*) revient au Chapitre X de la 2e Partie du 3e Livre, avec mention de son livre des *Donnés* (?), à propos d'un problème d'analyse indéterminée du premier degré, alors que l'on a ignoré pendant longtemps que les Hindous avaient traité des problèmes de ce genre.

Curtze relève à juste titre la singularité de ces indications véridiques dans un Ouvrage dont l'auteur semblait s'être proposé de déguiser autant que possible la vérité historique, et il revendique en tous cas pour l'auteur allemand la priorité sur Bachet pour la solution des problèmes dont il s'agit.

Sur le premier point, je remarquerai, pour m'en tenir aux sources écrites, que notre auteur a pu, d'une part, très bien connaître l'origine hindoue de notre système de numération, avouée par les Arabes, expressément affirmée par Maxime Planude et autres Byzantins, et que cela suffisait pour qu'il attribuât aux Hindous une aptitude spéciale aux calculs numériques. D'un autre côté, le Moyen âge a certainement connu au moins deux genres de problèmes indéterminés du premier degré, à savoir le problème des restes, et la *regula virginum*. Si Bachet a traité ces questions, il ne s'est jamais donné comme les ayant inventées, et il est clair que, du moment où elles ont été agitées, on en a trouvé des solutions, ne fût-ce que par des tâtonnements méthodiques.

Le problème des restes (deviner un nombre dont on donne les résidus par rapport à un certain nombre de diviseurs) était déjà connu de Léonard de Pise, comme Curtze le rappelle d'ailleurs. On l'a retrouvé dans un texte byzantin (*Nicomaque*, éd. Hoche, Leipzig, Teubner, 1876, p. 152) avec une solution non expliquée,

mais qui paraît bien fondée sur le même principe que celle du Traité d'*Algebras*, et qui est reproduite dans l'Ouvrage de Rudolff, imprimé en 1526. Regiomontanus (*Urkunden*, p. 254) connaissait certainement la solution générale. En tout cas on ne peut, jusqu'à nouvel ordre, dénier à l'auteur de ce Traité la priorité pour la rédaction en Occident d'une solution claire et complète, qui est identique à celle que l'on a trouvée en Chine comme remontant au IIIe siècle de notre ère et perfectionnée au VIIIe (règle Ta-yen), solution qui revient au fond à celle de Gauss dans ses *Disquisitiones*. Quant à l'histoire de la *regula virginum* ou *regula cœci*, elle n'est pas aussi avancée. Il s'agit de trouver, par exemple, trois ou quatre nombres entiers dont on donne la somme, ainsi que la somme de leurs produits par des coefficients déterminés. Les problèmes de ce genre sont souvent combinés en sorte qu'il n'y a qu'une solution possible (les valeurs négatives étant écartées par les hypothèses). C'est sur un problème de ce genre que notre auteur parle de l'Hindou Aliabras.

On en trouve déjà un dans la correspondance de Regiomontanus (*Urkunden*, p. 262 et 296) et Rudolff en traite dans son Ouvrage de 1526. De même notre auteur; mais je ne puis considérer sa solution que comme particulière, et par suite lui reconnaître sur ce point aucune priorité sur Bachet, qui, traitant un problème du même genre proposé dans une épigramme latine du siècle précédent, est parvenu à une solution complète et raisonnée.

Je ne pense pas d'ailleurs que l'on puisse dire avec Curtze que la solution de Bachet repose sur de tout autres considérations que celle du prétendu *Algebras*. La vérité est que Bachet, n'employant, à l'exemple de Diophante, de notations que pour une seule inconnue, est de fait obligé, pour sa mise en équation, à des détours qu'il aurait facilement pu éviter en se servant des notations de Viète; mais ce point est tout à fait secondaire.

Quant à la mention du livre du *Data* d'Aliabras l'Hindou, elle a pour objet seulement de débarrasser une équation des fractions, en multipliant tous les termes par un multiple commun des dénominateurs. Je ne peux sérieusement croire que l'Inde ait jamais influé sur la connaissance en Occident d'une proposition aussi anciennement connue et pratiquée. Je suis donc assez porté à sup-

poser, jusqu'à plus sérieux indice du contraire, que cette mention n'a aucun rapport de fait avec les problèmes d'analyse indéterminée, et que pour notre auteur, de même qu'*Yles* signifiait Euclide, *Aliabras* désigne ici quelque arithméticien (¹) chez lequel il aura trouvé quelque règle donnée comme venant de l'Inde, mais en tout cas différente de celle dont il s'agit dans ce passage.

L'Ouvrage devait comprendre huit ou même neuf livres. On n'en n'a retrouvé que trois, peut-être les autres n'ont-ils jamais été écrits.

Une étude approfondie de ce document, ainsi que des autres *Urkunden* publiées par Curtze, serait extrêmement instructive pour quiconque désire étudier l'histoire des Mathématiques élémentaires, mais elle réclamerait, il faut l'avouer, une grande patience. En tout cas, c'est une publication qui fait grand honneur à la précieuse collection des *Abhandlungen*, et qui clôt dignement la carrière si remplie de son auteur. PAUL TANNERY.

F. KLEIN und A. SOMMERFELD. — UEBER DIE THEORIE DES KREISELS. Heft III : DIE STÖRENDEN EINFLÜSSE. ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN. 1 vol. in-8°, pages 512-759. Leipzig, Teubner, 1903.

Ce fascicule devait être le dernier de l'Ouvrage dont le *Bulletin* a analysé les deux premiers (Tome XXII); mais l'abondance des matières a forcé les auteurs à élargir leur cadre primitif, et à réserver pour un dernier cahier qui doit paraître cette année les applications physiques et techniques. Ce fait justifierait à lui seul, si quelqu'un pouvait trouver le problème initial trop borné, les développements, d'ailleurs si intéressants par eux-mêmes, donnés à la théorie dans les deux premiers Volumes.

Avant d'abandonner les considérations purement théoriques, les

(¹) Par exemple, Jordanus Nemorarius ou quelque traduction d'un auteur arabe.

auteurs étudient le mouvement sans frottement d'une toupie sur un plan horizontal fixe; on sait que la solution de ce problème dépend d'intégrales hyperelliptiques; le cas d'une vitesse initiale de rotation très grande correspond à un mouvement de l'axe voisin d'une précision régulière, qui est étudié en détail sur un exemple numérique.

Un remarquable exposé des différences qui existent entre les bases de la mécanique rationnelle et celles de la mécanique appliquée précède le résumé et l'histoire de nos connaissances sur le frottement.

Pour apprécier l'influence du frottement sur le mouvement de la toupie, on imagine qu'au lieu d'avoir pour extrémité un point géométrique, l'axe de figure est terminé par une petite sphère, laquelle reste en contact avec son plan tangent au point le plus bas. Si le mouvement est voisin d'une précession régulière (correspondant au cas où la projection de l'accélération sur la verticale est nulle), la réaction normale du point d'appui sera sensiblement la même que dans l'état d'équilibre; on suppose ensuite que la réaction de frottement a pour effet principal d'empêcher la toupie de tourner autour de son axe, c'est-à-dire que le frottement de pivotement est négligeable, ainsi que la réaction qui s'opposerait à l'inclinaison de l'axe. Ces points admis après une discussion détaillée, on obtient aisément, par les formules de Lagrange, les équations qui définissent le mouvement.

L'incertitude des hypothèses faites, en même temps que la difficulté d'intégrer les équations différentielles, conduisent les auteurs à proposer une méthode d'approximation, qu'ils appellent graphique. Voici en quoi elle consiste essentiellement : On peut, par un changement de variables, ramener l'intégration du système à celle d'une seule équation de la forme

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = f(u, v);$$

la fonction $f(u, v)$ croît très rapidement à partir de la valeur zéro; de sorte que, si l'on construit la courbe dite *de poursuite* ayant pour équation $f(u, v) = 0$, et qu'on suppose l'origine d'une courbe intégrale voisine de celle-là, la courbure deviendra rapidement très grande; la concavité est d'ailleurs dirigée vers la

courbe de poursuite, si bien que la courbe intégrale se rapprochera de la courbe de poursuite, viendra la couper en un point qui sera d'inflexion, et oscillera de part et d'autre de cette courbe de poursuite.

Si l'on admet que la résistance de l'air introduit un couple dont la direction est celle de l'axe de rotation, on a, dans les équations d'Euler, trois termes, $-\lambda p$, $-\lambda q$, $-\lambda \varkappa$; que l'ellipsoïde d'inertie soit aplati ou allongé, on arrive à cette conséquence que l'axe de rotation a une position limite dans la toupie, laquelle est dans chaque cas un axe ayant un moment d'inertie maximum. En assimilant, comme l'à indiqué Stone, le frottement des marées sur l'écorce terrestre à une telle résistance, on pourrait expliquer ainsi comment la rotation de la Terre a pu autrefois s'effectuer autour d'un axe très différent de l'axe de la figure et être ramenée au mouvement actuel.

Dans le cas où la toupie est un ellipsoïde de révolution aplati, l'aplatissement nouveau introduit par l'élasticité doit, à première vue, changer son mouvement de rotation; si l'on désigne par le mot ellipticité le rapport $\frac{C-A}{A}$, C et A étant les moments principaux d'inertie, l'ellipsoïde de la masse en rotation sera la somme de celle que prendrait une sphère élastique en rotation autour d'un diamètre avec la même vitesse, et de l'ellipticité primitive. Il est remarquable que la période de précession ne dépend pas de l'élasticité du sphéroïde, et qu'elle est la même que dans le cas où la masse serait absolument rigide.

L'influence de l'élasticité du support est assez complexe; pour l'évaluer, on suppose que le support est remplacé par un point matériel soumis à une force verticale qu'on pourra, en première approximation, considérer comme la somme de deux termes, l'un proportionnel à l'enfoncement du point matériel, l'autre à la vitesse de ce point; on doit étudier le mouvement du système constitué par la toupie et ce point matériel; les équations différentielles qui déterminent l'enfoncement et la variation d'inclinaison de l'axe de la toupie sont linéaires, et l'équation caractéristique est du 4e degré.

Par d'ingénieuses considérations géométriques, les auteurs discutent ensuite le mouvement d'une toupie dont le point d'appui

glisse avec frottement sur un plan horizontal et montrent que ce point d'appui décrit une sorte de spirale.

Arrivons maintenant aux applications; elles sont divisées en deux groupes : les applications astronomiques, ayant rapport au mouvement de rotation de la Terre supposée absolument rigide et soumise à l'attraction combinée du Soleil et de la Lune; d'autre part les applications dites *géophysiques*, c'est-à-dire l'étude des déplacements de l'axe terrestre sous l'influence des déformations du globe, ou des transports de masse à sa surface.

La méthode adoptée pour l'étude de la précession et de la nutation astronomique est l'extension de celle indiquée par Gauss pour le calcul des inégalités séculaires dans le mouvement de translation des planètes. Rappelons-en le principe en deux mots : soit V le potentiel dû à l'attraction d'un corps qui décrit une orbite elliptique suivant la loi de Képler ; on peut développer V en série trigonométrique dont les arguments ont pour période la durée T de la révolution du corps attirant, et le terme non périodique de cette série est $\frac{1}{T}\int V\,dt$.

Supposons maintenant que, sur chaque élément de l'ellipse, on place un élément dm de masse attirante; le potentiel dû à cet élément est $V\frac{dm}{m}$, m étant la masse du corps attirant; le potentiel total de l'anneau elliptique est $\frac{1}{m}\int V\,dm$; si l'on pose $dm = \frac{m\,dt}{T}$, dt étant le temps mis par le corps attirant pour parcourir l'élément d'arc que recouvre la masse dm, les deux intégrales sont égales; il en résulte que le potentiel de l'anneau donne la partie séculaire du potentiel dû au corps mobile sur l'ellipse.

Si l'on veut calculer le coefficient de $\cos 2n\pi\frac{t}{T}$ dans le développement de V, on remplacera dm par $2n\frac{m}{T}\cos 2n\pi\frac{t}{T}\,dt$; on est ainsi conduit toutefois à introduire des masses négatives, de sorte que la masse totale distribuée sur l'anneau est nulle, tandis que, dans le cas du terme séculaire, elle est égale à m.

On pourra donc, pour déterminer la précession luni-solaire, distribuer les masses du Soleil et de la Lune sur leurs orbites. Mais on peut remarquer de plus, par la considération de la formule bien connue qui exprime le potentiel dû à l'attraction d'un corps très

éloigné, que ce potentiel ne dépend, lorsqu'on néglige les termes du troisième ordre, que des moments d'inertie du système ; il sera donc permis de remplacer la Terre par un corps ayant mêmes moments d'inertie, et il sera naturel de choisir une sphère entourée à l'équateur d'un anneau homogène dont la masse sera $2\frac{C-A}{R^2}$; puisque les attractions exercées par les différents points de l'anneau solaire sur la sphère passent par le centre, il suffira, pour calculer le couple qui influe sur la rotation, de considérer l'action exercée par les anneaux solaire et lunaire sur l'anneau terrestre.

La rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire s'explique à l'aide du même procédé, si l'on admet que l'action du Soleil laisse invariable l'inclinaison de l'orbite de la Lune, et que la variation de l'excentricité de cette orbite est un phénomène indépendant de celui dont nous parlons. Il faut ici considérer l'attraction de l'anneau solaire sur l'anneau lunaire.

En ce qui concerne la nutation astronomique (qu'il faut se garder de confondre avec ce que les auteurs appelaient précédemment la nutation libre), c'est-à-dire la partie périodique du déplacement de l'axe terrestre due aux actions extérieures, on est obligé de faire une nouvelle extension de la méthode de Gauss, outre celle qui a rapport aux termes ayant pour périodes les sous-multiples de l'année ou du mois lunaire, dont nous avons indiqué le principe. Il faut, en effet, tenir compte du déplacement de l'orbite lunaire, et surtout obtenir les termes ayant même période que la révolution des nœuds. On considérera la zone sphérique engendrée par la révolution de l'orbite lunaire autour de l'axe de l'écliptique ; cette zone étant parcourue deux fois dans une révolution complète, on distinguera les deux côtés de sa surface l'un de l'autre, et, sur chacun des éléments de surface, on étendra un élément de masse qui sera le produit de l'élément de masse de l'anneau lunaire (supposé circulaire) par le rapport $\frac{dt}{T}$ et par la ligne trigonométrique qui figure dans le terme à évaluer. Les équations de Lagrange définissent les angles θ, φ, ψ d'Euler, et l'intégration par approximation, en supposant les dérivées θ' et ψ' très petites vis-à-vis de la rotation r qui demeure constante, fournit les termes principaux de la nutation. De ces formules, on conclut inversement, comme on sait, l'ellipticité de la Terre et la masse de la Lune.

La théorie complète de la précession et de la nutation ne paraît pas pouvoir se faire à l'aide des considérations précédentes, et il semble bien, comme l'indique d'ailleurs le Livre, que la méthode de la variation des constantes exposée par Tisserand dans le deuxième volume de sa *Mécanique céleste* garde une supériorité considérable au point de vue de la rigueur, sinon de l'élégance.

Au contraire, pour ce qui a trait aux déplacements du pôle dus aux changements de forme de la Terre, la discussion est basée sur des résultats d'observation récents coordonnés par les études de M. Chandler sur la variation des latitudes, et sur des recherches théoriques qui, jusqu'à présent, n'avaient pas été présentées sous une forme didactique.

Avant d'arriver aux résultats d'observation il faut revenir sur le problème de la rotation de la Terre (en négligeant les influences extérieures) pour étudier d'une façon complète la nutation libre, qu'on appelle dans ce cas le cycle eulérien, qui provient de ce que l'axe de figure ne coïncide pas exactement avec l'axe de rotation. On obtient aisément cette conclusion que les deux cônes décrits par l'axe de rotation dans l'espace et à l'intérieur de la Terre sont de révolution; l'oscillation dans l'espace a une période un peu plus petite que le jour sidéral; à la surface du globe, la période est de 304 jours sidéraux, mais l'ouverture du premier cône est environ 305 fois plus petite que celle du second. Par conséquent, la variation diurne des latitudes, qui sont toujours rapportées à l'axe de rotation, est moindre que le 300e de l'amplitude qui correspond au cycle eulérien. Cette simple discussion était d'autant plus nécessaire qu'un astronome qui est en même temps un géomètre distingué a pu faire une confusion à cet égard.

Les observations n'ont jamais montré l'existence d'une période eulérienne de 304 jours dans la variation des latitudes; il faut dire que l'erreur due à la réfraction astronomique, qui ne s'éliminera pas de sitôt, a été longtemps un obstacle à la discussion des résultats; certains astronomes sont même encore sceptiques à cet égard. Il semble pourtant hors de doute, après les travaux de M. Chandler, qu'un balancement de l'axe de rotation terrestre se produise dans une période de 14 mois. Un comité international a provoqué depuis 1891 des recherches en divers observatoires; elles montrent que les courbes obtenues en des points différents du globe ont même

période d'oscillation, et que les phases, en des méridiens à 180° l'un de l'autre, sont opposées. M. Albrecht, qui centralise les observations, a tracé une courbe figurant la marche du pôle à la surface de la Terre depuis 1891; cette courbe tourne autour de l'axe de figure (le rayon moyen étant environ de 4^m) et affecte une forme très irrégulière; il n'existe donc pas que la période de 14 mois. Pour discuter la question, M. Sommerfeld emploie un procédé graphique qui nous semble digne d'être signalé : soit w l'affixe $x+iy$ d'un point de la courbe; s'il existe plusieurs périodes $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ on a

$$w = a e^{2i\pi\frac{t}{\tau_1}} + a' e^{-2i\pi\frac{t}{\tau_1}} + b e^{2i\pi\frac{t}{\tau_2}} + b' e^{-2i\pi\frac{t}{\tau_2}} + \ldots.$$

Afin d'éliminer la période principale τ_1, qui se calcule en comptant le nombre de tours accomplis par la courbe dans le plus long temps possible, on forme la différence $w_{t+\tau_1} - w_t$, qui s'écrit

$$w_{t+t_1} - w_t = c e^{2i\pi\frac{t}{\tau_2}} + c' e^{-2i\pi\frac{t}{\tau_1}} + \ldots.$$

Cette différence se détermine graphiquement par le vecteur qui joint les points de la courbe qui se rapportent aux époques t et $t+\tau_1$; on obtient, en transportant ces vecteurs à l'origine, une nouvelle courbe sur laquelle on peut opérer de même que sur la première. Bien que, comme l'on s'en rend compte immédiatement, la construction de cette seconde courbe soit sujette à des erreurs qui peuvent être doubles de celles de la première si les positions aux temps t et $t+\tau_1$ sont affectées d'erreurs de sens contraire, cette construction montre que, en dehors de la période de 14 mois de M. Chandler, il existe une période annuelle, dont l'amplitude est à peu près la moitié de la première.

Il s'agit d'expliquer théoriquement ces deux périodes; pour la seconde, on pensera tout de suite aux mouvements annuels produits par le Soleil à la surface de la Terre, tels que les courants maritimes, ou atmosphériques; mais, pour la première, comme il n'existe aucune influence extérieure ayant la période de 14 mois, ni aucun déplacement observable pour nous ayant cette période, on doit faire une hypothèse sur la constitution interne de la Terre.

Il est difficile d'admettre que l'intérieur de la Terre est fluide, ou, plus exactement, qu'à l'intérieur de la Terre se produisent des

mouvements réguliers; l'écorce, ainsi que l'a indiqué Lord Kelvin, doit être assez épaisse pour résister aux marées internes (sans quoi il n'y en aurait pas à la surface), et le frottement dans la masse de densité très grande voisine du centre doit entraîner toutes les couches dans le mouvement commun de rotation. La cause de la période de 14 mois doit donc être cherchée dans l'élasticité de la Terre, laquelle modifie l'ellipticité $\frac{C-A}{A}$ et, par suite, la durée du cycle eulérien.

Pour traiter le problème, on ne doit pas se contenter de ce qui a été dit plus haut sur l'élasticité d'une toupie, car l'attraction des diverses parties du globe doit ici être prise en considération. Dans sa *Natural Philosophy*, Lord Kelvin s'était déjà occupé de cette question; les auteurs tiennent compte, en outre, d'un travail plus récent de M. Hough; ils divisent le problème en plusieurs autres, dans lesquels ils déterminent successivement, sans viser à une complète rigueur, l'ellipticité qu'aurait la Terre si sa masse avait été primitivement sphérique et fluide, celle qu'elle aurait acquise sous l'influence de l'élasticité quand le coefficient est celui de l'acier, puis l'ellipticité que prendrait la Terre si l'élasticité cessait d'agir actuellement; la conclusion est que l'existence de la période de 14 mois peut s'expliquer par un très faible coefficient d'élasticité de la masse terrestre.

L'étude de l'influence des mouvements qui s'opèrent à la surface de la Terre, dont le plus important constitue le phénomène des marées, est de même décomposée en plusieurs problèmes; on cherche d'abord la variation des moments d'inertie due à un transport de masse; on évalue, suivant les beaux travaux de M. Vito Volterra, le déplacement de l'axe de rotation produit par un mouvement tel que celui d'un courant marin s'opérant sans que la distribution des masses varie; on suppose en dernier lieu qu'une masse se déplace périodiquement; on trouve, comme cela était à prévoir, que le pôle se meut suivant la même période. L'influence des marées est étudiée à part; elle est tout à fait négligeable.

On lira avec un grand intérêt le dernier Chapitre consacré aux preuves de la rotation de la Terre que fournissent le gyroscope de Foucault et le barogyroscope de Gilbert; il nous paraît bien difficile de résumer les élégantes considérations géométriques qu'il

contient, de même que nous ne pouvons que signaler les précieux renseignements historiques et bibliographiques répandus dans tout l'Ouvrage. L. PICART.

LEBESGUE (HENRI). — LEÇONS SUR L'INTÉGRATION ET LA RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES. (Collection de monographies sur la Théorie des fonctions, publiées sous la direction de M. *Émile Borel*). Paris, Gauthier-Villars, 1904.

M. Lebesgue a été chargé pendant l'année scolaire 1902-1903 du cours fondé au collège de France par la famille Peccot, cours professé pendant plusieurs années avec tant d'éclat par M. Borel. Les leçons de celui-ci ont été publiées et sont entre les mains de tous les géomètres; M. Lebesgue rassemble aujourd'hui les siennes, et elles font partie d'une collection de Monographies sur la théorie des fonctions publiées sous la direction de M. Borel.

M. Lebesgue s'est proposé de reprendre dans son enseignement quelques-unes des recherches qui avaient fait l'objet de sa Thèse, en les faisant précéder d'une histoire des notions d'intégrales et de fonctions primitives. En lisant la Préface de M. Lebesgue, on voit qu'il a eu des scrupules. Il n'est pas sans avoir entendu dire qu'il est des mathématiciens qui n'ont pas grande sympathie pour ces études subtiles sur les fonctions, et préféreraient voir les jeunes géomètres se lancer dans d'autres voies; aussi s'efforce-t-il de nous persuader que ce n'est pas l'amour de la complication qui l'a conduit à introduire une définition de l'intégrale plus générale que celle de Riemann. Je veux bien l'en croire, mais je présume que la nécessité n'a pas été bien dure pour lui. M. Lebesgue n'a pas besoin de s'excuser; il y a profit pour la philosophie des Mathématiques que de telles questions soient agitées de temps en temps par des esprits aussi déliés que le sien, et il est très naturel qu'elles le soient dans un cours comme celui de la fondation Peccot, qui n'a d'autre objet que de permettre à un jeune savant d'exposer le fruit de ses réflexions sur les Mathématiques. La mauvaise humeur de ceux qui regretteraient de voir des audi-

teurs enfermés pendant vingt leçons dans un sujet, profond sans doute, mais étroit malgré l'apparence, n'a pas lieu de s'exercer, comme elle pourrait le faire, s'il s'agissait d'un enseignement d'une autre nature. Au surplus, M. Lebesgue a montré ailleurs qu'il n'était pas disposé à s'enfermer dans un seul coin de la Science.

La définition de l'intégrale d'après Cauchy et Dirichlet, puis celle de Riemann occupent les deux premiers Chapitres. Nous voyons déjà s'introduire la notion d'un ensemble de mesure nulle, qui reviendra dans la suite, et la condition pour qu'une fonction bornée soit intégrable au sens de Riemann s'énonce en disant que l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Quand une fonction bornée n'est pas intégrable, on peut cependant pour chaque intervalle attacher à cette fonction deux nombres parfaitement définis; ce sont les intégrales par excès et par défaut considérées pour la première fois par M. Darboux.

La mesure des ensembles est ensuite étudiée en se plaçant au point de vue de M. Jordan. A tout ensemble borné de points dans un espace, on fait correspondre une étendue extérieure et une étendue intérieure, et cette notion revient à l'intégrale par excès et à l'intégrale par défaut pour une fonction convenablement choisie. L'ensemble est mesurable quand ces deux étendues sont égales. Ainsi, dans le cas du plan, quand les deux étendues extérieure et intérieure sont égales, le domaine est dit quarrable. L'aire n'existe que pour un domaine dont la frontière est de mesure superficielle nulle; on sait que la frontière d'un domaine peut ne pas jouir de cette propriété, puisque, comme l'a montré le premier M. Peano, il existe des courbes passant par tous les points d'un carré. Après cette étude de la mesure des ensembles, il est facile de présenter sous une forme géométrique la définition de l'intégrale, et notamment des intégrales par excès et par défaut.

Après une étude sur la classe importante des fonctions que M. Jordan appelle à variation bornée, M. Lebesgue s'occupe de la recherche des fonctions primitives. Les notions d'intégrale indéfinie et de fonction primitive sont différentes, comme l'a montré pour la première fois Riemann, en construisant une fonction bornée et intégrable dont l'intégrale indéfinie n'a pas de dérivée pour les points formant un ensemble partout dense. L'opération

de l'intégration pouvant conduire à des fonctions n'ayant pas partout de dérivées, on est conduit à envisager les nombres dérivés; c'est ce que fait M. Lebesgue. On obtient ainsi en chaque point les quatre nombres dérivés à gauche et à droite introduits par du Bois-Raymond et M. Dini. Une fonction est déterminée, à une constante additive près, quand on connaît la valeur (supposée finie) de l'un des nombres dérivés pour chaque valeur de la variable; la question devient plus complexe, si la valeur n'est pas finie, et l'on doit à M. Scheefer d'intéressantes remarques sur ce sujet qu'approfondit M. Lebesgue. Restant dans les cas les plus simples, nous signalerons cet énoncé qui repose et rassure le lecteur : si une dérivée est intégrable, il y a identité entre ses fonctions primitives et ses intégrales définies.

Le calcul effectif des fonctions primitives ne se fait presque jamais au moyen de l'intégrale définie. On utilise, quand il est possible, certaines règles élémentaires; parfois aussi l'on se sert de développements en séries, en utilisant quelques propositions simples relatives aux séries uniformément convergentes. A ce sujet, M. Lebesgue démontre d'une manière originale que toute fonction continue est une fonction dérivée, sans avoir recours à l'intégration. Notons encore quelques remarques sur l'intégrale définie déduite des fonctions primitives, et un intéressant exemple dû à M. Volterra d'une fonction dérivée non intégrable au sens de Riemann.

Le dernier Chapitre est consacré aux fonctions sommables; c'est le plus personnel de l'Ouvrage. L'auteur, après être revenu sur la mesure des ensembles, arrive à la notion des fonctions qu'il nomme mesurables. Une fonction $f(x)$, bornée ou non, est mesurable si, quels que soient α et β, l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles $f(x)$ est compris entre α et β, est mesurable; la notion est d'une extrême généralité et l'on ignore s'il existe des fonctions non mesurables. La mesurabilité ne diffère pas de la sommabilité, quand il s'agit de fonction bornée; la définition de l'intégrale qui en résulte est plus générale que celle de Riemann et comprend celle-ci comme cas particulier. Je ne suis pas éloigné de penser que M. Lebesgue a raison, quand il dit dans sa Préface que sa définition est plus simple que celle de Riemann et aussi facile à saisir. M. Lebesgue remarque encore avec justesse, je crois, que

la notion de fonction sommable suggère des procédés plus rapides de démonstration. Il n'est pas rare, ajoutons-le, que dans maintes théories on ait des démonstrations plus rapides et plus compréhensives, en se plaçant à un point de vue plus général; la vue du cas trop spécial peut cacher les raisons simples des choses. Il ne faut pas d'ailleurs que ceci devienne une excuse pour les amateurs de théorèmes dont la généralité nuit à l'intérêt, mais je n'ai pas besoin de dire que ce n'est pas le cas de M. Lebesgue qui termine par quelques applications sur la recherche des fonctions primitives et la rectification des courbes. On se rappelle aussi que, dans sa Thèse, M. Lebesgue a montré qu'il a le souci des problèmes particuliers, en traitant diverses questions très curieuses relatives aux surfaces et aux courbes gauches.

Le Livre de M. Lebesgue répond bien au but qu'il s'était proposé; il sera lu avec profit par ceux qu'intéresse l'étude approfondie des principes de l'Analyse. Il est rédigé avec soin, et l'on y suit bien le développement historique des notions fondamentales. Souhaitons que, quelque jour, les notions nouvelles que l'on s'efforce d'introduire dans l'Analyse mathématique montrent leur fécondité en avançant la solution de tant de problèmes depuis longtemps posés, ou que pose chaque jour le développement régulier des théories aujourd'hui classiques tant en Analyse pure qu'en Physique mathématique. Le mot *inutile* n'a guère de sens, quand il s'agit des abstractions mathématiques; nous aimons à nous dire, avec Lagrange, que « *tout est bon en Mathématiques* ». On peut craindre seulement que certaines spéculations soient parfois prématurées, et penser qu'il ne faut pas d'excès même dans des choses aussi excellentes que la philosophie des mathématiques.

ÉMILE PICARD.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ZACHARIAS (MAX). — *Ueber die Beziehungen zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche 3. Ordng. u. den 28 Doppeltangenten ein. ebenen Kurve 4. Ordng.* Dissert. Gr. in-8°, 38 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 28 pf.

HELMHOLTZ (H. VON). — *Vorlesungen über theoretische Physik.* Herausgeg. von Arth König. u. A. 1. Bd. 1. Abth. in-8°. Leipzig, Barth. 3 m.; relié 3 m. 50 pf.

Contenu : Einleitung zu den Vorlesungen über theoret. Physik. VII-50 p. avec 4 fig. et 1 portr.

HUYGENS (CHRISTIAN). — *Nachgelassene Abhandlungen : Ueber die Bewegungen der Körper durch den Stoss. Ueber die Centrifugalkraft.* Herausgeg. von Fel. Hausdorff. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. n° 138). In-8°, 79 p. avec 49 fig. Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m. 40 pf.

FARADAY (MICH.). — *Experimental-Untersuchungen über Elektrizität.* (1840). (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch., n° 134). Herausgeg. von A.-J. v. Oettingen. XVI. u. XVII. Reihe. In-8°, 103 p. avec 18 fig. Leipzig, Engelman. Cart. 1 m. 60 pf.

— [Même ouvrage] (1843 *u.* 1846). Herausgeg, von A.-J. v. Oettingen XVIII u. XIX. Reihe. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch., n° 136). In-8°, 59 p. avec 11 fig. Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m. 20 pf.

DULAC (H.). — *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (thèse). In-4°, 131 p. Paris, Gauthier-Villars.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann. Herausgeg. von E. Lampe u. G. Wallenberg. 32e Volume. Année 1901. 1er fasc. Gr. in-8°, VI-480 p. Berlin, G. Reimer. 15 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FORSYTH (A.-R.). — A TREATISE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS. Third edition. 1 vol. in-8°, XVI-511 pages. Londres, Macmillan, 1903.

Il ne faut pas confondre ce Traité avec la *Theory of differential equations* du même auteur ; c'est un livre plus modeste et qui s'adresse à un public plus nombreux ; mais le succès même qu'il a eu montre son utilité ; le voici à sa troisième édition : la première ne remonte qu'à 1885. En outre, il a été traduit en allemand par M. H. Maser. Ce succès tient assurément aux qualités du livre, à sa clarté et à son caractère pratique : sans doute, quand on l'a feuilleté, on se dit que le lecteur, après l'avoir étudié, aura encore bien des choses à apprendre ; mais il aura des vues nettes sur ce que sont les équations différentielles et sur la façon dont on les traite ; s'il s'astreint à résoudre les nombreuses questions que M. Forsyth a recueillies dans les Mémoires originaux, dans les livres antérieurs au sien, dans les feuilles d'examen, ou qu'il a construites lui-même, et qu'il a accumulées dans son Traité, le lecteur est sûr de ne pas oublier les règles et d'acquérir une véritable habileté dans la matière, qui lui sera singulièrement précieuse s'il veut pousser ses études plus loin. Il montrerait d'ailleurs quelque ingratitude envers l'auteur s'il n'abordait point, après cela, sa belle *Théorie des équations différentielles*.

Bien que M. Forsyth, à l'occasion, ne craigne pas d'introduire dans son *Traité* les variables complexes, il ne faut chercher dans son Livre ni une théorie des fonctions analytiques, ni les longs développements nécessaires à l'établissement rigoureux des théorèmes d'existence ; c'est essentiellement les procédés d'intégration qu'il entend développer, et c'est, d'ordinaire, les variables réelles qu'il a en vue ; aussi insiste-t-il avec raison sur les interprétations géométriques, qui éclairent singulièrement la route pour les commençants et qui fournissent tant d'applications intéres-

santes. On s'en rend compte dès les premières pages de son Livre, lorsqu'il s'occupe des solutions singulières des équations du premier ordre.

Après une courte introduction relative à la formation des équations différentielles, et aux propriétés fondamentales des déterminants fonctionnels, l'auteur développe la suite des cas classiques où l'on sait ramener aux quadratures une équation différentielle du premier ordre.

Signalons, à la fin de ce Chapitre, une courte Note consacrée à l'ingénieuse méthode que l'on doit à M. Runge pour la résolution *numérique* des équations différentielles. Viennent ensuite deux Chapitres consacrés aux équations différentielles d'ordre supérieur, en particulier aux équations linéaires à coefficients constants. La méthode d'intégration par séries donne l'occasion d'insister sur les équations de Legendre, de Bessel et de Riccati. L'équation différentielle de la série hypergéométrique, les diverses formes de ses solutions, les relations qui existent entre elles occupent un peu plus d'un Chapitre, car il faut bien y revenir à propos de la méthode d'intégration par intégrales définies.

La théorie des équations aux différentielles totales est traitée avec détail ; elle donne à l'auteur l'occasion de poser le problème de Pfaff. M. Forsyth s'occupe ensuite des équations simultanées ; il introduit les multiplicateurs de Jacobi et donne l'application classique au cas des forces centrales.

Les deux derniers Chapitres se rapportent aux équations aux dérivées partielles. Après avoir, pour les équations du premier ordre, classé les intégrales et les avoir interprétées géométriquement, dans le cas de deux variables, l'auteur examine une suite de types simples, expose, dans le même cas, la méthode de Lagrange et Charpit, indique, pour le cas général, la méthode de Jacobi et, d'après Bour, la théorie des équations simultanées aux dérivées partielles.

Pour les équations du second ordre, on trouvera, outre le développement des méthodes de Monge et d'Ampère, un très grand nombre d'exemples et d'indications se rapportant à des types particuliers.

J. T.

GOURSAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, Tome II, 1er fascicule, 304 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Cette première Partie du second Volume est consacrée à l'étude des fonctions analytiques; elle s'arrête au point où commencera la théorie des équations différentielles. L'ordre historique a été suivi autant que possible; le point de vue de Cauchy est celui auquel l'auteur se place le plus souvent et, sans doute, le plus volontiers. Outre les résultats et les démonstrations qui appartiennent entièrement à M. Goursat, on trouvera presque à chaque page, dans l'exposé de théories déjà bien approfondies, des modifications ayant pour effet de rendre plus concrets et de serrer d'aussi près que possible les raisonnements; ce Cours paraît de plus en plus avoir pour caractères la rigueur et la précision concise.

CHAPITRE XIII : *Fonctions élémentaires d'une variable complexe* (p. 1-74). — Ce Chapitre, placé en tête du Volume, débute par les généralités sur les fonctions d'une variable complexe (continuité, dérivées, fonctions uniformes ou multiformes, fonctions analytiques), et les propriétés des séries entières (cercle de convergence, convergence uniforme, séries de séries).

On en fait de suite l'application à l'étude des transcendantes élémentaires : exponentielle, logarithmes, z^m, fonctions circulaires. Pour introduire l'exponentielle l'on cherche une série entière telle que la fonction $f(z)$ définie par cette série jouisse de la propriété

$$f(z)f(z') = f(z+z').$$

La solution générale de ce problème permet d'obtenir simplement l'extension donnée par Abel à la formule du binome pour le cas d'un exposant quelconque.

Le problème de la représentation conforme est posé en général; il est traité en détail sur des exemples bien choisis.

Le Chapitre se termine par les propriétés des produits infinis, établies sans l'intermédiaire des logarithmes.

CHAPITRE XIV : *Théorie générale des fonctions analytiques d'après Cauchy* (p. 75-154). — On va suivre dans ce Chapitre les conséquences logiques de la définition des fonctions analytiques en distinguant soigneusement, dans chaque question, les propriétés des fonctions qui sont admises et celles qui sont les conséquences des hypothèses.

La définition des intégrales prises le long d'un chemin du plan de la variable complexe suppose seulement la continuité de la fonction.

Pour le théorème fondamental de Cauchy : *Si une fonction est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée et sur la courbe elle-même, l'intégrale* $\int f(z)dz$ *prise le long de la courbe est égale à zéro,* la démonstration maintenant classique de M. Goursat suppose l'existence de la dérivée mais non la continuité de cette dérivée; de plus le fait que, dans l'aire considérée, le rapport

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

tend uniformément vers $f'(z)$ n'est pas admis, il est démontré comme conséquence de l'existence de la dérivée dans l'aire et sur le contour.

La formule de Cauchy donnant la valeur d'une fonction holomorphe en un point x intérieur à une aire A, quand on connaît les valeurs de la fonction sur le contour, est une conséquence presque immédiate du théorème fondamental. A l'aide de cette formule on fait voir que, si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une aire A, la suite des dérivées de $f(z)$ est illimitée et toutes ces dérivées sont holomorphes dans l'aire A; il convient de remarquer que ceci suppose seulement l'existence de la première dérivée.

Après les séries de Taylor et de Laurent, on donne la série de fractions rationnelles de M. Appell, convergente à l'intérieur de triangles limités par des arcs de cercle, puis la série de M. Painlevé donnant le développement, en série de polynomes, d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour Γ et continue sur ce contour.

Les séries de fonctions holomorphes sont étudiées à l'aide de la

formule de Cauchy appliquée successivement aux termes de la série ; on trouve ainsi très simplement les dérivées d'une fonction définie par une telle série.

Puis viennent les généralités sur les fonctions méromorphes, des détails précis sur les points singuliers essentiels, le théorème des résidus avec des applications à des calculs d'intégrales et à la théorie des équations.

Chapitre XV : *Fonctions uniformes* (p. 155-236). — L'expression d'une fonction entière sous la forme d'un produit de facteurs primaires est obtenue d'abord directement par une méthode qui se rapproche de celle de Weierstrass. On passe ensuite à l'étude des fonctions uniformes qui admettent une infinité de points singuliers ayant pour seul point limite le point à l'infini. On démontre, pour ces fonctions, le théorème de Mittag-Leffler et l'on en déduit une seconde méthode pour obtenir la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires.

Longtemps avant les travaux de Weierstrass, Cauchy avait déduit de la théorie des résidus une méthode pour décomposer une fonction méromorphe en une somme d'une infinité de termes rationnels. Cette méthode est exposée ici sous une forme généralisée et elle est appliquée au développement de la fonction $\cot x$.

Les théorèmes généraux sur les fonctions uniformes trouvent une application dans une étude sur les fonctions elliptiques qui vient à la suite et qui forme une excellente introduction à la théorie de ces fonctions. Après avoir défini les fonctions pu, ζu, σu, on donne l'expression générale d'une fonction elliptique : 1° à l'aide de σu; 2° à l'aide de ζu et de ses dérivées; 3° à l'aide de pu et de $p'u$, puis les formules d'addition, l'intégration des fonctions elliptiques et les propriétés principales de la fonction $H(u)$ de Jacobi. Les notations sont celles de Weierstrass, sauf une modification peu importante, relative aux périodes (on écrit ici $2w = 2m\omega + 2n\omega'$).

L'inversion est traitée avec un soin tout particulier. $R(z)$ désignant un polynome du quatrième degré, l'intégrale

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

peut acquérir au point z une infinité de déterminations qui sont comprises dans les formules

$$u = \overline{u(z)} + 2m\omega + 2n\omega', \qquad u = 1 - \overline{u(z)} + 2m\omega + 2n\omega',$$

$\overline{u(z)}$ désignant l'intégrale prise suivant un chemin déterminé. M. Goursat démontre que la fonction

$$\Phi(z) = p\left(u - \frac{1}{2}\middle|\omega, \omega'\right)$$

est de la forme $\frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d désignant ici des constantes), et il tire heureusement parti de ce résultat. Il établit avec rigueur la proposition : Étant donnés deux nombres g_2 et g_3 tels que

$$g_2^3 - 27g_3^2$$

ne soit pas nul, il existe une fonction elliptique pu dont g_2 et g_3 sont les invariants.

La méthode indiquée ensuite pour obtenir z et $\sqrt{R(z)}$ en fonction de u est simple et je crois nouvelle, au moins dans la forme où elle est donnée ici. On y est conduit en remarquant que, si l'on coupe une cubique passant par l'origine par $y = tx$, les coordonnées des points d'intersection s'expriment rationnellement en fonction de t et d'un radical portant sur un polynome du quatrième degré qui, égalé à zéro, donne les tangentes menées de l'origine.

La représentation paramétrique d'une courbe du premier genre est obtenue à l'aide d'une transformation birationnelle ramenant à la cubique $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$.

Chapitre XVI : *Prolongement analytique* (p. 237-263). — Après une introduction permettant de concevoir qu'il soit possible de définir une fonction analytique quand on regarde comme données les valeurs en un point a de la fonction et de ses dérivées successives, en d'autres termes, quand on connaît un seul élément de la fonction, M. Goursat trouve utile de compléter la notion de fonction analytique d'après Cauchy en énonçant d'une façon explicite la convention suivante :

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions holomorphes respecti-

vement dans deux aires A_1, A_2 *ayant une partie commune et une seule,* A'. *Si dans la partie commune* A' *on a* $f_1(z) = f_2(z)$, *nous regarderons* $f_1(z)$ *et* $f_2(z)$ *comme formant une seule fonction* $F(z)$ *définie dans la région* $A_1 + A_2$ *par les égalités :*

$$F(z) = f_1(z) \quad \textit{dans} \quad A_1;$$
$$F(z) = f_2(z) \quad \textit{dans} \quad A_2.$$

Un exemple montre l'utilité qu'il y avait à préciser cette convention.

Le problème général du *prolongement analytique* peut s'énoncer ainsi : *Trouver la valeur de la fonction en un point* β *quand on se donne l'élément qui correspond au point* α *et qu'on fait décrire à la variable un chemin déterminé allant de* α *en* β. Il est étroitement lié à la recherche des points singuliers de la fonction. On fait voir comment l'étude des équations différentielles algébriques se rattache à la théorie du prolongement analytique.

Cette théorie est complétée par des exemples d'espaces lacunaires et de coupures essentielles ou non essentielles, et l'on rapproche des résultats précédents les fonctions affectées de coupures, définies à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre, qui ont été envisagées d'abord par Hermite et rattachées ensuite par M. Goursat à la théorie de Cauchy.

Chapitre XVII : *Fonctions analytiques de plusieurs variables* (p. 264-304). — Les généralités par lesquelles commence ce Chapitre ont principalement pour but de préparer une étude rigoureuse des fonctions implicites. Définition d'une fonction $F(z, z')$ holomorphe dans les aires A et A' prises respectivement dans les plans des variables z et z', puis des cercles de convergence associés.

Pour définir les intégrales doubles

$$\int\int F(z, z')\,dz,\ dz',$$

on considère le cas simple où la variable z décrit un chemin C dans son plan et la variable z' un chemin C' dans son plan. On trouve l'extension des théorèmes de Cauchy, et en particulier la

formule

$$F(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z')\, dz'}{(z-x)(z'-x')}.$$

D'après le théorème de Weierstrass, une fonction holomorphe $F(x, y)$, qui s'annule pour $x=0$, $y=0$, peut être décomposée en deux facteurs holomorphes dont l'un est un polynome entier en y, d'un degré égal à l'ordre de multiplicité de la racine $y=0$ dans l'équation $F(0, y)=0$. La démonstration donnée ici de ce théorème est en partie nouvelle; on verra avec quel soin on établit que les deux facteurs sont holomorphes, en se servant de la formule de Cauchy étendue au cas de deux variables.

Les dix pages suivantes contiennent une introduction à la théorie des fonctions algébriques et une démonstration du théorème d'Abel sur les intégrales de fonctions algébriques, avec une application aux intégrales hyperelliptiques. Il serait difficile de donner, en si peu de pages, plus d'idées importantes clairement et largement exposées.

Enfin, l'extension de la formule de Lagrange aux équations

$$x - a - \alpha f(x, y) = 0, \qquad y - b - \beta\varphi(x, y) = 0,$$

extension obtenue par les méthodes de Cauchy, forme un complément à la théorie des fonctions implicites.

La seconde Partie du Volume doit contenir les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles et les éléments du calcul des variations. Les travaux si appréciés de M. Goursat sur ces sujets nous garantissent à l'avance l'intérêt que doit présenter encore cette seconde Partie de son Ouvrage.

E. LACOUR.



MÉLANGES.

LE PROBLÈME MODERNE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. P. PAINLEVÉ.

Le problème de l'intégration dans l'ancienne Analyse.

La théorie des équations différentielles est née avec le Calcul infinitésimal. C'est l'étude scientifique des phénomènes naturels qui avait guidé Newton et Leibniz, comme leurs prédécesseurs, jusqu'à leurs découvertes définitives : une fois acquises les deux notions fondamentales d'intégrale et de différentielle, c'est encore l'étude de la nature qui devait en diriger les premières applications. Grâce à ces deux notions, la méthode expérimentale, interprétée, analysée, allait donner tous ses fruits. C'est qu'en effet, à travers le phénomène fini, toujours complexe, grossièrement simplifié, la différentiation atteint le phénomène élémentaire; elle décompose toute modification dans le temps et l'espace en une combinaison de modifications infinitésimales, j'entends de modifications infiniment brèves n'intéressant que des particules infiniment petites de matière. C'est en différentiant que Galilée déduit de ses expériences sur le plan incliné les lois de la pesanteur, que Newton déduit des lois de Képler le principe de la gravitation universelle. Le but de l'intégration est, au contraire, connaissant les lois élémentaires d'un phénomène, de reconstituer le phénomène fini. Comment superposer, comment sommer cette infinité de modifications infiniment petites qui composent la modification totale? C'est ce problème, réciproque du premier, mais d'une difficulté autrement profonde, qui constitue l'objet du Calcul intégral : il se traduit, en général, par des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles (suivant que le phénomène dépend d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes), et tout l'effort con-

siste à intégrer ces équations différentielles, connaissant les conditions initiales ou aux limites du phénomène. L'étude du mouvement d'un solide pesant, celle du mouvement de n points qui s'attirent suivant les lois de Newton (problème des n corps), voilà deux problèmes types de Calcul intégral, de difficulté bien différente. Laissant de côté le vaste champ des équations aux dérivées partielles, si heureusement renouvelé ces dernières années, je ne parlerai ici que des équations différentielles à une variable.

Le Calcul infinitésimal, à peine inventé, prit un développement prodigieux.

Appliquant à tous les ordres de phénomènes physiques les principes de ce Calcul, les successeurs de Newton et de Leibniz accumulent en moins d'un siècle les plus éclatantes découvertes. Comme ils se limitent, dans chaque classe de faits, aux exemples simples, rudimentaires, qui se présentent les premiers, les problèmes qu'ils ont à traiter sont naturels et peu compliqués, réductibles à des cas connus (quadratures, équations différentielles linéaires, etc.). Leur imagination, toujours soutenue et guidée par le problème réel, démêle avec une admirable perspicacité le jeu d'opérations élémentaires auquel se ramène l'intégration des systèmes différentiels rencontrés. En élucidant des types particuliers, ils mettent en évidence de nombreuses propriétés générales que l'avenir vérifiera rigoureusement : degré d'indétermination des intégrales, rôle des constantes, des fonctions arbitraires, des conditions aux limites, etc. Les sciences théoriques et expérimentales se développent dans une étroite connexité : tout progrès en Analyse a son retentissement immédiat en Physique, et réciproquement. C'est l'époque la plus glorieuse et la plus féconde dans l'histoire des Mathématiques, l'époque où il semble vraiment qu'elles soient la clef de l'Univers. On ne saurait mieux comparer cet afflux de vérités nouvelles qu'au mouvement d'une vague qui occupe en un instant l'espace grand ouvert devant elle et qui s'arrête au pied d'une ceinture de granit. La vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré.

Mais toutes les tentatives faites pour intégrer à l'aide d'opérations simples (quadratures et autres) une équation différentielle quelconque avaient échoué. Il était donc plus que vraisemblable

qu'une telle réduction était chimérique. La seule ressource qui restât aux chercheurs, c'était d'aborder directement l'étude de l'intégrale par des méthodes d'approximations successives bien adaptées. Tel est l'effort qui s'imposait aux Mathématiques vers l'époque où l'œuvre de Cauchy commence. C'est cet effort qu'elles ont tenté, et qui dirige, explique et justifie leur développement dans tout le cours du dernier siècle.

Le problème moderne de l'intégration. Introduction des variables complexes.

La tâche qu'allaient remplir Cauchy, ses contemporains et ses successeurs, était (au moins en apparence) singulièrement plus ingrate que celles des mathématiciens du XVIIIe siècle, et ses résultats moins brillants. C'est ce qui explique pourquoi certains esprits, un peu superficiels, estiment qu'il y a un abîme entre l'Analyse moderne et l'Analyse d'il y a cent ans. Les Mathématiques, à les en croire, se seraient volontairement détournées de la réalité pour devenir une sorte de science de curiosité, vivant sur elle-même, un jeu d'esprit dont le seul intérêt serait la difficulté et dont les efforts ne sauraient plus contribuer d'aucune manière à l'étude rationnelle de l'Univers. De toutes les transformations qu'aient subies les Mathématiques, l'introduction systématique des imaginaires est celle qui a le plus contribué à créer ce malentendu.

Cette introduction n'était-elle qu'une fantaisie? Pouvait-on l'éviter ou s'imposait-elle de par la nature des choses? Pour comprendre qu'elle s'imposait, il suffit de consulter l'histoire même de la Science. De tous les modes de développement d'une fonction réelle, le plus simple, celui qui s'est présenté tout d'abord, c'est le développement en série de Taylor. Or, si l'on ne considère que les valeurs réelles de la variable, les caprices de cette série, de sa convergence semblent échapper à toute loi : une fonction réelle, partout continue ainsi que ses dérivées, telle que $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, n'est représentée par sa série de Taylor que sur un segment limité de l'axe des x, alors que e^x est représenté pour x quelconque. Qu'on introduise les valeurs complexes de la variable, et tout

s'éclaire. Ce sont les points singuliers imaginaires qui influent sur le développement et en arrêtent la convergence, même pour les valeurs réelles de la variable.

Ce n'est pas ici le lieu de discuter les circonstances algébriques qui ont engendré à la fois les quantités imaginaires et les conventions de calcul qui les concernent. Que ces conventions soient légitimes puisqu'elles n'impliquent aucune contradiction, c'est là un fait qui est hors de conteste, en dépit des obscurités dont on s'est plu parfois à entourer la question. Le paradoxe, ce n'est pas que ces conventions soient légitimes, c'est qu'elles soient utiles et fécondes. De cette utilité, la théorie de la série de Taylor est, à elle seule, une preuve suffisante.

Je sais bien que les séries de polynomes, récemment découvertes, qui généralisent et peuvent remplacer la série de Taylor, jouissent de la remarquable propriété de converger sur l'axe réel jusqu'au premier point singulier de la fonction. Mais, bien loin d'aller contre l'intervention des imaginaires, cette découverte la justifie, puisqu'elle résulte elle-même de la théorie des fonctions de variables complexes.

Le succès couronna d'ailleurs immédiatement l'emploi des imaginaires. Le calcul des limites établit rigoureusement toutes les propriétés fondamentales des équations différentielles, et donna une base solide à la théorie. L'équation différentielle de Legendre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

était demeurée stérile tant qu'on s'était restreint aux variables réelles ; rien ne la distinguait des équations analogues où le second membre est un polynome de degré quelconque. En embrassant le champ complexe, Abel et Jacobi découvrent d'un coup la double périodicité, la représentation de $y(x)$ par des séries entières très convergentes, fondent la théorie des fonctions elliptiques, qui engendre à son tour toute la théorie des fonctions analytiques uniformes. Plus tard, ce sont les propriétés si fécondes des équations différentielles linéaires, et tant d'autres brillantes découvertes. L'introduction des imaginaires était donc bien dans la nature des choses. Ce n'est point par caprice que les mathématiciens y ont eu recours, ni pour dissimuler, sous d'obscures

complications scholastiques, leur impuissance à traiter les problèmes réels. Bien au contraire : s'ils ont étendu leurs spéculations au champ complexe, c'est pour éclairer, pour élucider les difficultés trop profondes du champ réel.

Les variables imaginaires une fois introduites, l'intégration d'une équation différentielle pouvait être tentée dans deux voies différentes :

1° On pouvait chercher à la ramener à des équations simples (quadratures, équations linéaires, etc.), c'est-à-dire poursuivre (conformément aux traditions de l'ancienne Analyse) l'*intégration formelle* de l'équation ;

2° Si l'on n'apercevait aucune réduction de ce genre, on pouvait chercher à étudier l'intégrale générale par approximations, dans tout son champ réel et complexe, à mettre en évidence ses propriétés, ses singularités, etc.

Je voudrais justifier en deux mots les termes d'*intégration formelle* que j'ai employés au sujet du premier problème. Je remarque d'abord qu'une équation prise au hasard ne comportera en général aucune intégration formelle. De plus, même si une équation est intégrée formellement, l'étude des relations entre la fonction et la variable n'est pas achevée. C'est ainsi que l'équation de Jacobi, citée plus haut, équivaut à la quadrature

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

mais cette quadrature ne met nullement en évidence les propriétés de la fonction $y(x)$. Une remarque analogue s'applique aux équations linéaires, ainsi qu'aux équations de définition des fonctions automorphes (équations qui, comme on sait, se ramènent formellement à une équation de Riccati). En définitive, on peut dire qu'en toute logique, l'intégration d'une équation différentielle se décomposera en deux opérations successives :

1° Réduction de l'équation à des équations irréductibles ;

2° Étude directe, dans tout le champ réel et complexe, de l'intégrale de ces équations irréductibles.

De l'irréductibilité des équations différentielles. Théorie des groupes.

Mais ici, une question se pose : la théorie de la réductibilité des équations différentielles a fait l'objet de travaux variés et considérables : toute la théorie des groupes s'y rattache. Or, que faut-il entendre exactement par ce mot *réductibilité?* Quand dira-t-on qu'une équation différentielle est irréductible? Si elle est réductible, comment précisera-t-on sa réductibilité?

C'est seulement dans ces dernières années qu'on est parvenu à une définition de la réductibilité, vraiment générale et philosophique et qui embrasse tous les cas particuliers. Cette définition est même si récente, elle soulève des difficultés si délicates qu'on ne peut dire encore qu'elle ait reçu droit de cité en Mathématiques, mais elle sera classique avant quelques années. Voici cette définition.

Considérons une équation différentielle algébrique [1], que je choisis d'abord du premier ordre; soit l'équation

$$(e) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation dépend d'une constante arbitraire, soit u; autrement dit, l'équation (e) définit une fonction y de deux variables x, u, ou plutôt une infinité de telles fonctions (qui se déduisent d'une quelconque d'entre elles en remplaçant u par une fonction arbitraire de u). Si l'on veut encore, il est loisible de considérer u comme fonction de x, y; cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f = 0,$$

qui équivaut à l'équation (e).

L'intégrale générale de l'équation (e) sera dite réductible si l'on peut adjoindre à l'équation (E) d'autres équations (algébriques)

[1] Je me limite ici aux équations algébriques, mais il serait facile d'étendre la théorie à des équations différentielles quelconques, en élargissant (comme en Algèbre) le domaine de rationalité.

en x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ..., qui soient compatibles avec l'équation (E) sans en être une conséquence.

Tous les types classiques d'équations du premier ordre (équation linéaire, équation de Riccati, etc.) rentrent dans cette définition. Par exemple, pour l'équation linéaire, on peut adjoindre à l'équation (E) la condition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

De même, si l'équation admet un facteur intégrant algébrique $\lambda(x, y)$, on peut adjoindre à l'équation (E) l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda.$$

D'une manière générale, quel que soit le mode d'intégration qu'on imagine (intégration par quadratures de différentielles totales ou par combinaison de quadratures superposées, etc.), on vérifie qu'il n'échappe pas à la définition précédente.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi, si l'on veut bien préciser les opérations dont dispose l'*intégration formelle* : elle doit définir la fonction $y(x, u)$ par des procédés tels qu'on puisse, à l'aide d'un nombre fini d'opérations non transcendantes (dérivations, éliminations, etc.), vérifier si cette fonction $y(x, u)$ satisfait bien à l'équation donnée; les séries, les intégrales définies lui sont interdites, et plus généralement tous les procédés dont on ne peut vérifier la justesse qu'à l'aide d'opérations transcendantes. En dernière analyse, l'intégration formelle pourra toujours être réduite à ceci : substitution à l'équation (E) d'un certain système d'équations algébriques aux dérivées partielles, portant sur x, y, u et d'autres variables ou fonctions auxiliaires, système tel qu'on puisse, à l'aide d'un nombre limité de dérivations et d'éliminations, vérifier s'il définit au moins une fonction $u(x, y)$ qui soit solution de l'équation (E).

Mais, dans ces conditions, il sera loisible (moyennant un nombre fini de dérivations et d'éliminations) de déduire du système auxiliaire les relations qu'il entraîne entre x, y et u. Si ces relations se réduisent à l'équation (E) ou à ses conséquences, le système auxiliaire n'est d'aucune utilité, car son intégration se laisse dé-

composer en deux opérations successives, dont la première est l'intégration de (E). Si, au contraire, ces relations ne sont pas conséquences de (E), l'équation donnée (e) est *réductible* au sens que nous avons défini.

La définition s'étend d'ailleurs d'elle-même à une équation (ou à un système différentiel) d'ordre quelconque. S'il s'agit, par exemple, d'un système du deuxième ordre

$$(S) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

on regarde y et z comme fonctions de x et des deux constantes arbitraires u, v, ou (si l'on veut) u et v comme fonctions de x, y, z; ces fonctions u, v vérifient le système

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f + \frac{\partial u}{\partial z} \varphi = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} f + \frac{\partial v}{\partial z} \varphi = 0.$$

Le système S est dit *réductible*, si l'on peut adjoindre au système Σ d'autres équations algébriques, portant sur x, y, u, v et les dérivées partielles de u, v, équations qui soient compatibles [1] avec Σ sans en être des conséquences. Nous appellerons *système réduit* le système formé par Σ et les équations adjointes.

Cette définition admise, on peut établir une proposition qui domine toute la théorie de la réductibilité et que j'énonce dans le cas du premier ordre :

Quand une équation différentielle est réductible, parmi les systèmes réduits il en est toujours un, d'ordre différentiel minimum, qui jouit des propriétés suivantes : 1° *il est automorphe, c'est-à-dire que sa solution générale $u(x, y)$ se déduit d'une solution particulière quelconque $u_1(x, y)$ par les transformations $u = \psi(u_1)$* D'UN GROUPE; 2° *tous les autres systèmes réduits se déduisent de celui-là en y remplaçant u par une fonction $U(u)$ qui vérifie une équation différentielle algébrique (en u, U) arbitrairement choisie.*

Cet énoncé, qui s'étend immédiatement à une équation différentielle d'ordre quelconque, donne la raison profonde du rôle

---

(1) J'entends par là que Σ et les équations adjointes ont au moins une solution u, v commune, où u et v sont deux fonctions *distinctes* de x, y, z.

capital et presque exclusif que joue la théorie des groupes dans la réduction des équations différentielles. Il fait éclater l'importance d'une énumération complète des groupes continus finis et infinis à une, deux, trois, etc. variables.

C'est ainsi que l'énumération si simple des groupes continus à une variable entraîne ce théorème :

Quand une équation du premier ordre est réductible, quatre cas seulement peuvent se présenter : 1° l'équation s'intègre algébriquement; 2° elle admet un facteur intégrant algébrique; 3° elle admet un facteur intégrant dont le logarithme a ses deux dérivées premières algébriques; 4° une intégrale première $u(x, y)$ est donnée par un système différentiel dont la solution générale est de la forme

$$u = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d} \quad (a, b, c, d \text{ constantes arbitraires}),$$

système qui se ramène, comme on sait, à une équation de Riccati.

Considérons encore une équation du second ordre dont le coefficient différentiel ne dépend que de x, y; soit l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y),$$

avec

$$\frac{dy}{dx} = z.$$

Une telle équation n'est pas irréductible, car elle admet un dernier multiplicateur égal à l'unité, et l'on peut, par suite, adjoindre au système Σ l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

Si le coefficient différentiel $\varphi(x, y)$ est une fonction algébrique quelconque, aucune réduction ultérieure n'est possible. Dans l'hypothèse où l'équation comporte une réduction nouvelle, l'énumération que Sophus Lie a faite des groupes continus, finis ou infinis, à deux variables, suffit à démontrer que deux cas seulement se présentent : *Il existe des intégrales premières*

$u(x, y, z)$ qui sont données par un système différentiel algébrique dont la solution générale est : 1° soit de la forme $u = au_1 + bu_2 + c$ (a, b, c constantes arbitraires); 2° soit de la forme $u = \chi(u_1)$ (χ fonction arbitraire).

De l'intégration analytique d'une équation irréductible. Intégrales uniformes.

Supposons maintenant que nous soyons en présence d'une équation reconnue irréductible [1]. Quel est le but idéal, si l'on peut dire, qu'il convient de se proposer en l'étudiant? Quand dira-t-on que l'intégration de cette équation est *parfaite*, au sens moderne du mot?

L'équation déjà citée

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2)$$

(bien que réductible) va nous servir d'exemple. Sans doute, cette équation équivaut à une quadrature, mais l''intégrale $y(x)$ n'était pas exprimable *explicitement* à l'aide des transcendantes élémentaires connues : Abel et Jacobi ont pourtant intégré cette équation en représentant $y(x)$ par le quotient de deux séries entières, très convergentes et qui mettent en évidence toutes les propriétés de la fonction dans le domaine réel et complexe.

D'une manière générale, une équation différentielle irréductible devra être regardée comme *intégrée* si, par un procédé quelconque d'approximation indéfinie (série, fraction continue, intégrale définie, etc.), on arrive à représenter l'intégrale générale dans

(1) Nous nous sommes occupés exclusivement de la réductibilité de l'*intégrale générale* d'une équation différentielle. Quand certaines solutions *particulières* (mais non l'intégrale générale) sont réductibles, par exemple sont algébriques, on convient de dire encore que l'équation considérée est irréductible, mais comporte des solutions exceptionnelles. Les considérations indiquées plus haut sur l'intégration formelle montrent que toute solution exceptionnelle satisfait nécessairement à une équation différentielle (algébrique) d'ordre moindre : en fin de compte, l'étude d'une solution exceptionnelle se ramène à l'étude d'une équation différentielle d'ordre moindre, dont l'intégrale générale est réductible, ou dont aucune solution n'est réductible : toutes les solutions de la nouvelle équation sont solutions exceptionnelles de la première.

tout son domaine d'existence (réel et complexe), avec une erreur aussi petite qu'on veut et dont on saura donner une limite, la représentation mettant en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale, permettant de tenir compte des conditions initiales, etc.

Parmi les fonctions analytiques, les fonctions *uniformes* sont celles dont les propriétés et les modes de représentation sont les plus simples et les mieux étudiés. Il est donc naturel de rechercher, en premier lieu, les équations différentielles dont l'intégrale générale peut être définie en égalant à zéro des fonctions uniformes, et notamment les équations différentielles qui possèdent des intégrales premières uniformes. Si, par exemple, une équation du premier ordre admet une intégrale première

$$P(x, y) = \text{const.},$$

où P est une fonction entière de x, y qu'on sait développer en série de Mac-Laurin, il est clair que la connaissance de cette intégrale sera singulièrement précieuse. Il restera toutefois à résoudre l'équation implicite par rapport à la fonction y. Il ne faut pas d'ailleurs se dissimuler que la recherche de telles intégrales premières est un problème de la plus profonde difficulté.

Mais il est un cas particulier (encore que fort étendu), où le problème peut être abordé dès maintenant avec succès : c'est le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est elle-même une fonction uniforme dans tout son domaine d'existence. Le problème ainsi particularisé est une généralisation directe des découvertes d'Abel et de Jacobi.

Si on se limite au premier ordre, le problème ne conduit qu'à des résultats connus. Mais il en va tout autrement pour les équations d'ordre supérieur. C'est ainsi que, dès le second ordre, on rencontre des types d'équations entièrement nouveaux, qu'on sait épuiser, et dont le plus simple peut recevoir la forme canonique

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale générale de cette équation est une fonction méromorphe qui se laisse représenter par le quotient de deux fonctions entières, à savoir par l'expression

$$y = -\frac{d}{dx}\frac{u'_x}{u} = -\frac{d^2}{dx^2}\log u,$$

u désignant une fonction entière qui vérifie l'équation très simple du troisième ordre

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0,$$

où

$$z = \frac{u'}{u}.$$

Cette fonction entière $u(x)$ est développable en série de Mac-Laurin, les coefficients se calculant par dérivations successives : on connaît donc une représentation très simple de $y(x)$ dans tout le plan complexe, représentation entièrement analogue à celle de la fonction $\wp$ par la fonction σ. On sait d'ailleurs étudier le mode d'indétermination des fonctions $u(x)$ et $y(x)$ pour $x=\infty$; le genre de $u(x)$ est 2, son ordre $\frac{5}{2}$, sa croissance est régulière; la distribution des pôles et des zéros de $y(x)$ est, dès lors, nettement précisée.

D'autre part, on peut montrer qu'au point de vue de l'intégration formelle, l'équation $y''=6y^2+x$ rentre dans la classe la plus générale, la classe irréductible des équations

$$y''=\varphi(x, y);$$

autrement dit, nul procédé ancien d'intégration ne peut rien ajouter à la connaissance du dernier multiplicateur égal à l'unité. C'est là le premier exemple d'une équation différentielle qui n'est attaquable par aucune méthode d'intégration formelle et qui comporte, de par la théorie des fonctions, une intégration parfaite au sens moderne du mot. Jusque dans ces dernières années, toutes les équations différentielles qu'on savait étudier étaient réductibles aux équations linéaires, aux quadratures ou à leurs combinaisons : c'est parce qu'on connaissait à l'avance la manière dont les constantes figuraient dans l'intégrale qu'on pouvait pénétrer dans les propriétés de cette intégrale; les équations qui définissent les transcendantes classiques (fonctions elliptiques, abéliennes et dégénérescences, fonctions automorphes, etc.) n'échappent pas à cette remarque. Au contraire, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1), regardée comme fonction des constantes x_0, y_0, y'_0, est (par rapport à chacune de ces constantes) une fonction uniforme et méromorphe, de nature (suivant l'expression anglaise) *transcenden-*

tally transcendental, comme la fonction Γ, c'est-à-dire qui ne vérifie aucune équation différentielle algébrique. Il résulte notamment de ce qui précède que les transcendantes uniformes $y(x)$ définies par l'équation (1) ne sauraient s'exprimer par aucune combinaison de transcendantes classiques, puisqu'une telle combinaison, si enchevêtrée soit-elle, vérifie toujours un système différentiel réductible aux quadratures et aux équations linéaires.

Les mêmes propriétés appartiennent aux autres types irréductibles d'équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme.

On peut encore, généralisant un peu le dernier problème, étudier les équations différentielles dont l'intégrale est une fonction à n branches ou a ses points critiques fixes. Mais quels que soient les progrès que doivent accomplir, par la suite, ces difficiles problèmes et les problèmes plus vastes de même nature, il est bien évident, d'une part, qu'on n'épuisera jamais toutes les équations parfaitement intégrables, d'autre part, qu'une équation prise au hasard ne rentrera pas dans ces types spéciaux. L'intérêt de ces classes remarquables d'équations, qui est évident au point de vue purement mathématique, pourrait donc sembler moindre au point de vue des applications, si l'on ne savait quel bénéfice les méthodes générales retirent toujours de problèmes difficiles et précis, élucidés à fond. C'est sur cette dernière idée que je voudrais insister, pour terminer, en parlant de l'intégration approximative et directe des problèmes réels.

L'intégration approchée dans le domaine réel.

Quand une équation différentielle qui se présente dans une application ne comporte (ou ne paraît comporter) ni intégration formelle, ni intégration analytique, comment en aborder l'étude dans l'état actuel de la Science? La seule ressource est de l'attaquer directement à l'aide des procédés d'approximation aujourd'hui acquis, en se laissant guider autant que possible par le phénomène réel que traduit l'équation. Le problème, dans ces conditions, peut revêtir, comme on sait, un double aspect : se propose-t-on de reconnaître s'il existe des solutions périodiques, si une trajectoire est fermée, etc., la question est d'espèce *qualita-*

tive; au contraire, la détermination approchée de la position d'un mobile à un instant quelconque est d'espèce *quantitative*. Prenons comme exemple le problème des n corps : la question de savoir si notre système planétaire est stable rentre dans la première catégorie, le calcul des éphémérides dans la seconde. Les deux problèmes, qualitatif et quantitatif, sont d'ailleurs loin d'être indépendants : leur connexité est étroite; tout progrès de l'un est un progrès de l'autre.

Les travaux considérables suscités à la fin du dernier siècle par le problème qualitatif, leur brillante application au problème des trois corps sont trop connus pour qu'il soit nécessaire d'y insister davantage. Je voudrais seulement, dans ce domaine strictement réel, signaler l'influence fécondante de la théorie des fonctions analytiques. Je n'en citerai que deux preuves. On sait le rôle capital que jouent, dans la discussion des courbes définies par les équations différentielles, les points singuliers (nœuds, cols, centres, etc.), points qui correspondent à ces valeurs des variables pour lesquelles les coefficients différentiels ont la forme $\frac{0}{0}$: jamais les allures des intégrales au voisinage de ces valeurs n'auraient été élucidées, si les analystes n'avaient été rompus par avance aux singularités des fonctions analytiques et à leurs modes de développement. La seconde preuve que j'ai en vue, c'est la théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre, théorie qui seule a permis la recherche des solutions périodiques, et qui est née du calcul des limites.

Quant au problème quantitatif, il doit plus encore aux fonctions analytiques. Les procédés d'approximation applicables aux équations différentielles réelles sont aujourd'hui nombreux, simples, plastiques; ils s'adaptent aux différents modes de conditions initiales : conditions initiales de Cauchy, ou (comme pour l'équilibre des fils) valeurs de la fonction pour deux valeurs données de la variable, etc. Il est parfaitement vrai que ces procédés peuvent être exposés sans la considération d'imaginaires, et que Cauchy les avait indiqués au moment même où il jetait les premiers fondements de la théorie des fonctions analytiques. Mais précisément, ils étaient en quelque sorte tombés en sommeil; s'ils se sont ranimés, c'est sous l'influence des méthodes et des raisonnements analytiques qui seuls permettaient d'aller au fond des choses.

Considérons, par exemple, la première méthode de Cauchy, la plus élémentaire, celle qu'on peut apppeler la *méthode des différences*, puisqu'elle consiste à regarder les équations différentielles comme limites d'équations aux différences. On sait aujourd'hui que, dans cette méthode, la convergence vers l'intégrale est assurée tant que, partant des conditions initiales, on ne rencontre pas une singularité $x = a$ des fonctions $y(x)$, $z(x)$, ... Mais cette singularité peut être de deux espèces suivant que, x tendant vers a, les fonctions y, z, ... tendent vers des valeurs déterminées ou sont indéterminées. La difficulté est, dans le second cas, d'une nature autrement subtile que dans le premier; si l'on a su la prévoir, c'est grâce à l'étude classique des points essentiels analytiques; si l'on commence, non sans peine, à la discuter, c'est grâce à la théorie des fonctions, en employant ses modes de raisonnement sur la croissance, le genre et l'indétermination à l'infini d'une fonction entière.

En particulier, le problème quantitatif des trois corps doit à l'Analyse des variables complexes ses derniers progrès. On a établi en effet, dans le cas de trois corps (mais non dans le cas de n), que les coordonnées des points restent finies et déterminées quel que soit t. Il suit de là que seul le choc proprement dit peut donner lieu à difficulté. D'autre part, on est parvenu récemment à former la condition analytique nécessaire et suffisante pour qu'il y ait choc au bout d'un temps fini. Il ne reste plus qu'un dernier effort à tenter pour que le problème quantitatif des trois corps soit théoriquement résolu.

Mais, pour ne parler que des résultats acquis, il convient de ne pas oublier que les méthodes d'approximation applicables aujourd'hui à une équation différentielle quelconque, si elles sont encore théoriquement imparfaites, se montrent pourtant, dans une foule de cas, d'une efficacité très suffisante. C'est ainsi que le problème quantitatif des n corps, que j'ai choisi comme type, n'est pas rigoureusement résolu jusqu'ici; mais les éphémérides de notre système solaire n'en sont pas moins calculées pour trois siècles avec une surprenante précision. Il faut d'ailleurs se garder de croire que la puissance des méthodes actuelles soit épuisée par cet effort. Admettons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de calculer les positions mutuelles, dans 10000 ans, des astres du système solaire, avec une erreur plus petite que 8 rayons terrestres : les méthodes

actuelles fournissent-elles sûrement le moyen théorique d'effectuer ce calcul? Non, il y a une restriction, mais combien légère! que voici. Si les lois de Képler étaient exactes, la distance de deux astres donnés du système resterait supérieure à un minimum δ; il est bien invraisemblable que d'ici 10000 ans cette distance s'abaisse au-dessous de $\frac{\delta}{5}$, par exemple. Or les procédés modernes, moyennant un nombre fini d'opérations qu'on peut limiter d'avance, permettront sûrement d'affirmer : ou bien qu'on possède les éphémérides pour 10000 années, avec l'approximation voulue, ou bien que, dans cet intervalle, la distance de deux des astres est devenue moindre que le minimum supposé $\frac{\delta}{5}$. En un mot, l'état du système solaire sera calculé, pour 10000 ans, avec l'exactitude exigée, à moins que, durant cette période, notre système ne se soit invraisemblablement déformé : auquel cas la marche même du calcul avertirait de cette déformation. Tel est le degré de perfection et d'imperfection des procédés généraux de calcul dont on dispose aujourd'hui.

Ces indications, si insuffisantes qu'elles soient, peuvent donner quelque idée du labeur colossal qu'ont accompli les analystes, au cours du dernier siècle, dans le seul domaine des équations différentielles. Intégration formelle; intégration analytique, aussi parfaite que possible, dans le champ complexe; intégration approchée dans le domaine réel : telles sont les trois directions dans lesquelles se sont développées les Mathématiques. Au centre de toutes ces recherches, la théorie des fonctions apparaît comme jouant un rôle directeur et prépondérant. Il n'en faut pas conclure que ce rôle lui appartiendra toujours. Il n'y a aucune absurdité à penser qu'elle sera jugée un jour de la même manière dont nous jugeons, par exemple, l'œuvre arithmétique de Gauss, c'est-à-dire qu'elle apparaîtra comme une des parties les plus harmonieuses et les mieux construites de l'édifice mathématique, mais comme un monument du passé. Peut-être possédera-t-on alors des méthodes d'investigation plus puissantes et plus profondes, qui permettront de s'attaquer hardiment aux équations différentielles, en ne se souciant que du problème réel qu'elles traduisent. Mais ces méthodes fécondes et vivantes, c'est de la théorie des fonctions qu'elles seront nées.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RIEMANN (B.). — GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE. Nachtrage herausgegeben von *M. Noether* und *W. Wirtinger*. 1 vol. in-8°, VIII-116 pages, 9 figures. Leipzig, Teubner, 1902.

Les manuscrits de Riemann contiennent parfois, au milieu de calculs, une citation grecque ou latine, quelques vers qui l'avaient frappé; MM. Noether et Wirtinger ont relevé, en particulier, la parole célèbre que Tacite prête à Germanicus mourant :

Non hoc præcipuum amicorum munus est, prosequi defunctum ignavo questu, sed quæ voluerit meminisse, quæ mandaverit consequi.

Ils auraient eu le droit de prendre pour épigraphe de leur publication cette parole, dont ils n'ont pu manquer de faire une application à leur propre travail. Quoique les résultats de ce travail aient pu être condensés dans un petit nombre de pages, on sent bien qu'il a dû être considérable, tant en raison de la difficulté propre de sujets que, sans doute, les éditeurs connaissent à fond, qu'en raison de la nature des matériaux qu'ils avaient à leur disposition : ces matériaux se réduisaient parfois à des notes sténographiques ou prises au crayon. On ne peut que leur savoir gré d'avoir consciencieusement étudié ces manuscrits et ces notes, d'en avoir éclairci les passages obscurs, d'avoir minutieusement vérifié ou rectifié les dates, et cette reconnaissance doit s'étendre à tous ceux qui les ont aidés de leurs souvenirs, de leurs conseils et de leurs communications. Ils énumèrent avec précision, dans la préface, les diverses ressources qu'ils ont eues et remercient comme il convient ceux qui les leur ont apportées.

La part qui revient à chacun des deux éditeurs dans les éclaircissements et dans les notes est d'ailleurs spécifiée et ces notes sont signées de l'initiale de l'un ou de l'autre.

J'ai entendu citer le cas d'un savant illustre qui a enseigné pen-

dant de longues années une autre science que les mathématiques et qui ne mettait pas son enseignement au courant de ses propres découvertes, publiées depuis longtemps; on ne m'a point dit si c'était par modestie ou par routine. Quoi qu'il en soit, ce n'était pas le cas de Riemann : ses cours étaient très en avance sur ses publications; sa gloire n'en a pas été diminuée; ses disciples, en poursuivant son œuvre, « se sont souvenu de ce qu'il avait voulu, ont exécuté ce qu'il avait recommandé ». Il n'y avait pas moins un grand intérêt à connaître exactement l'excitation première, la source à laquelle remontent tant de beaux travaux, directement parfois, d'autres fois sans que les auteurs l'aient su eux-mêmes. Jusqu'à quel point Riemann s'était avancé dans la théorie des fonctions abéliennes, des équations linéaires du second ordre et de la propriété fondamentale du quotient de deux solutions d'une telle équation, dans la théorie de la série hypergéométrique et des fonctions modulaires, c'est ce qu'on saura désormais, grâce à MM. Noether et Wirtinger, par la publication du cours qu'il a fait sur ces sujets de 1852 à 1856. J. T.

MÉLANGES.

SUR LA LIAISON ENTRE LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Par M. J. DOLBNIA.

1. Pour plus de simplicité nous considérons, dans cette Communication, les intégrales abéliennes de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5).$$

En posant

(1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u,$$

nous avons le développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{3}}, \qquad \lambda \lim(u) = 0.$$

Par conséquent, si la réduction de l'intégrale (1) est possible à l'aide de la substitution

(2) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda(pu - e_i),$$

nous devons avoir les deux points suivants : 1° les degrés des polynomes fx et $\varphi(x)$ sont respectivement $(k+3)$ et k; 2° les degrés des polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont k et $(k+3)$. Dans ce dernier cas, pour $x = \infty$, nous aurons

$$p(u) - e_i = 0, \qquad u = \omega_i.$$

Par cette raison de l'équation (2) nous aurons un développement de la forme

$$x^{-3} F(y) = \frac{\lambda(u - \omega_i)^2}{2} p''(\omega_i) + \ldots,$$

$F(y)$ est une fonction holomorphe de $y = \frac{1}{x}$, et

$$F(0) \neq 0.$$

Les raisonnements sont, pour les deux cas mentionnés, entièrement identiques; c'est pourquoi nous considérons seulement le premier cas. Supposons d'abord que les degrés des polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont respectivement $2n+3$ et $2n$. Pour les valeurs de x, satisfaisant à l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

nous aurons

$$p(u) = \infty.$$

En désignant les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots,$$

nous avons

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^{k_1}(x - \xi_2)^{k_2} \ldots.$$

Au voisinage du point

$$x - \xi_i = 0$$

nous avons un développement de la forme

$$(x - \xi_i)^{k_i} = u^2 \mathrm{F}(u),$$

$\mathrm{F}(u)$ est une fonction holomorphe, et

$$\mathrm{F}(0) \neq 0.$$

Et, comme x est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, à l'exception

$$x = \infty,$$

nous devons avoir ou

$$k_i = 2,$$

ou

$$k_i = 1;$$

dans ce dernier cas, ξ_i est un point de ramification. Par cette raison, nous avons les deux hypothèses suivantes :

(I) $\quad \varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1)(x - x_2),$

(II) $\quad \varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_n)^2.$

Conformément à la formule (I) nous obtiendrons, évidemment, les résultats suivants :

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \ldots (x - \alpha_n)^2 (x - \alpha_{n+1})^2 (x - x_3)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1)(x - x_2)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \ldots (x - \beta_{n+1})^2 (x - x_4)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1)(x - x_2)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \ldots (x - \gamma_{n+1})^2 (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1)(x - x_2)}.$$

Conformément à la forme (II) nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_n)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2\ldots(x-\beta_{n-1})^2(x-x_4)}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x-\gamma_1)^2(x-\gamma_2)^2\ldots(x-\gamma_{n+1})^2(x-x_5)}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2}.$$

Si la réduction est possible à l'aide de la formule

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

les quantités

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{n+1}, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_{n+1}, \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots, & \gamma_{n+1} \end{array}$$

sont, évidemment, les racines de l'équation

$$f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x) = 0.$$

2. Il est clair que la réduction est possible aussi dans le cas où le degré du polynome $\varphi(x)$ est un nombre impair $(2n+1)$, le degré du nominateur $f(x)$ est pair $(2n+4)$. Alors nous obtiendrons les trois cas de la réduction.

1° En posant

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_1),$$

nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_{n+1})^2(x-x_2)(x-x_3)}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2\ldots(x-\beta_{n+1})^2(x-x_4)(x-x_5)}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x-\gamma_1)^2(x-\gamma_2)^2\ldots(x-\gamma_{n+2})^2}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_1)};$$

ou encore

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x-\alpha_1)^2 \ldots (x-\alpha_n)^2 (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_n)^2 (x-x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x-\beta_1)^2 (x-\beta_2)^2 \ldots (x-\beta_{n+2})^2}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_n)^2 (x-x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x-\gamma_1)^2 (x-\gamma_2)^2 \ldots (x-\gamma_{n+2})^2}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_n)^2 (x-x_1)}.$$

2° En posant

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^2 \ldots (x-\xi_{n-1})^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x-\alpha_1)^2 (x-\alpha_2)^2 \ldots (x-\alpha_{n+1})^2 (x-x_4)(x-x_5)}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_{n-1})^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x-\beta_1)^2 (x-\beta_2)^2 \ldots (x-\beta_{n+2})^2}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_{n-1})^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x-\gamma_1)^2 (x-\gamma_2)^2 \ldots (x-\gamma_{n+2})^2}{(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 \ldots (x-\xi_{n-1})^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}.$$

3° Enfin, si nous avons

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^2 \ldots (x-\xi_{n-1})^2 \,\mathrm{R}(x),$$

nous obtiendrons les trois formules de la réduction

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x-\alpha_1)^2 (x-\alpha_2)^2 \ldots (x-\alpha_{n+2})^2}{\varphi(x)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x-\beta_1)^2 (x-\beta_2)^2 \ldots (x-\beta_{n+2})^2}{\varphi(x)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x-\gamma_1)^2 (x-\gamma_2)^2 \ldots (x-\gamma_{n+2})^2}{\varphi(x)}.$$

Dans toutes les formules précédentes nous avons

$$\lambda = \frac{4}{9}.$$

3. Il est facile de prouver que, dans tous les cas où la réduction de l'intégrale (I) est possible à l'aide des formules précédentes, le

polynome R (x) peut renfermer seulement deux paramètres arbitraires. Considérons, par exemple, le cas où

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2(x-\xi_3)^2\ldots(x-\xi_n)^2.$$

Posons

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p u,$$

$f(x)$ étant un polynome du degré $2n+3$. Alors $f(x)$ renferme $2n+3$ paramètres arbitraires; $\varphi(x)$ renferme n paramètres

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\quad \ldots,\quad \xi_n;$$

en outre, parmi les quantités

$$e,\quad e_2,\quad e_3,$$

nous avons deux arbitraires; donc nous avons

$$2n+3+n+2 = 3n+5$$

paramètres arbitraires. A l'aide de ces $3n+5$ quantités il faut satisfaire aux conditions suivantes :

1° Il faut que le polynome

$$f(x) - e_1\varphi(x)$$

soit divisible par le polynome

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

du troisième degré, et le quotient

$$\frac{f(x)-e_1\varphi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

doit être un carré parfait; il faut donc remplir $(n+3)$ conditions.

2° Il faut que le polynome

$$f(x) - e_2\varphi(x)$$

soit divisible par $(x - x_4)$, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_2\varphi(x)}{x - x_1}$$

doit être un carré parfait; par conséquent il faut remplir $(n + 2)$ conditions.

3° Enfin le polynome

$$f(x) - e_3\varphi(x)$$

doit être divisible par $(x - x_5)$, et le quotient

$$f(x) - e_3\varphi(x)$$

doit être un carré parfait. Nous devons remplir $(n + 2)$ conditions. Le nombre total des conditions à remplir sera

$$n + 3 + n + 2 + n + 2 = 3n + 7.$$

De ce qui précède, il suit que nous devons avoir les deux équations des conditions entre les coefficients du polynome

$$\mathrm{R}(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

4. Proposons-nous d'étudier la réductibilité des intégrales de la forme

$$\int \frac{(x - t)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

t est une quantité indéterminée. Posons

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda\,p(u, g_2, g_3).$$

Nous considérons seulement le cas où les degrés des polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont respectivement $2n + 1$ et $2n$. Le polynome $\varphi(x)$ peut avoir l'une des trois formes suivantes :

1° $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)^2 \ldots (x - \alpha_n)^2,$

2° $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)^2 \ldots (x - \alpha_{n-1})^2(x - x_1)(x - x_2),$

3° $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)^2 \ldots$
$\times (x - \alpha_{n-2})^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$

Si nous avons

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_n)^2,$$

alors

$$\lambda(pu-e_1) = \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_1)}{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_n)^2},$$

$$\lambda(pu-e_2) = \frac{(x-\eta_1)^2(x-\eta_2)^2\ldots(x-\eta_n)^2(x-x_2)}{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)^2},$$

$$\lambda(pu-e_3) = \frac{(x-\zeta_1)^2(x-\zeta_2)^2\ldots(x-\zeta_{n-1})^2(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_n)^2}.$$

Si nous avons

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_{n-1})^2(x-x_1)(x-x_2),$$

il vient

$$\lambda(pu-e_1) = \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-x_3)}{(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_{n-1})^2(x-x_1)(x-x_2)},$$

$$\lambda(pu-e_2) = \frac{(x-\eta_1)^2(x-\eta_2)^2\ldots(x-\eta_n)^2(x-x_4)}{\varphi(x)},$$

$$\lambda(pu-e_3) = \frac{(x-\zeta_1)^2(x-\zeta_2)^2\ldots(x-\zeta_n)^2(x-x_5)}{\varphi(x)}.$$

Enfin, dans le cas où

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^2\ldots(x-\alpha_{n-2})(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4),$$

la réduction est évidemment impossible.

Il est facile de prouver que, si

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\ldots(x-\alpha_n)^2 = [\psi(x)]^2,$$

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_n, \\ \eta_1, & \eta_2, & \ldots, & \eta_n, \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \ldots & \zeta_{n-1} \end{array}$$

sont les racines de l'équation

$$(3) \qquad f'(x)\psi(x) - 2\psi'(x)f(x) = 0.$$

Au voisinage du point

$$x - t = 0$$

nous aurons un développement avec la partie principale

$$(u-v)^{\frac{1}{2}},$$

ν étant une constante. De l'équation

$$\lambda \mathrm{p} u = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{F}(x)$$

nous avons le développement

$$\mathrm{F}(t) + (x-t)\mathrm{F}'(t) + \frac{(x-t)^2}{1.2}\mathrm{F}''(t) + \ldots = \lambda[\mathrm{p}\nu + (u-\nu)\mathrm{p}'\nu + \ldots],$$
$$\mathrm{F}(t) = \lambda \mathrm{p}(\nu).$$

Par conséquent

$$\mathrm{F}'(t) = 0, \qquad \mathrm{p}'(\nu) \neq 0,$$

donc

$$f'(t)\psi(t) - 2\psi'(t)f(t) = 0.$$

Et comme le degré de l'équation (3) est $3n$, toutes les racines de cette équation sont comprises dans le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_n, \\ \eta_1, & \eta_2, & \ldots, & \eta_n, \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \ldots, & \zeta_{n-1}, \quad t, \end{array}$$

d'où il suit que

$$\frac{f'(x)\psi(x) - 2\psi'(x)f(x)}{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_n)(x-\eta_1)\ldots(x-\eta_n)(x-\zeta_1)\ldots(x-\zeta_{n-1})} = \mathrm{A}(x-t),$$

A est un facteur numérique.

5. Comme le degré du polynome $f(x)$ est égal à $2n+1$, nous avons $2n+1$ paramètres arbitraires. Comme

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^2\ldots(x-\alpha_n)^2 = [\psi(x)]^2,$$

nous avons encore n paramètres arbitraires. En outre, parmi les trois quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3,$$

nous avons deux arbitraires; donc nous avons

$$2n+1+n+2 = 3n+3$$

paramètres arbitraires. A l'aide de ces $3n+3$ quantités nous devons satisfaire aux conditions suivantes :

1° De l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_1 = \frac{f(x) - e_1\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x-\xi_1)^2\dots(x-\xi_n)^2(x-x_1)}{\varphi(x)}$$

on voit que le polynome

$$f(x) - e_1\varphi(x)$$

doit être divisible par $(x - x_1)$, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_1\varphi(x)}{x - x_1}$$

doit être un carré parfait; donc nous aurons les $(n+1)$ conditions.

2° De l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_2 = \frac{f(x) - e_2\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x-\eta_1)^2\dots(x-\eta_n)^2(x-x_2)}{\varphi(x)}$$

nous avons encore les $(n+1)$ conditions.

3° De l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_3 = \frac{f(x) - e_3\varphi(x)}{\varphi(x)}$$
$$= \frac{(x-\zeta_1)^2\dots(x-\zeta_{n-1})^2(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{\varphi(x)}$$

on voit que le polynome

$$f(x) - e_3\varphi(x)$$

doit être divisible par

$$(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),$$

et le quotient

$$\frac{f(x) - e_3\varphi(x)}{(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}$$

doit être un carré parfait. Par cette raison il faut satisfaire à $(n+3)$ conditions. Nous avons donc

$$n+1+n+1+3+n-1 = 3n+4$$

conditions. Par conséquent, nous devons avoir une seule équation

des conditions entre les coefficients du polynome

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Dans le problème de la transformation des fonctions elliptiques, le nombre des conditions à satisfaire est toujours égal au nombre des paramètres arbitraires.

6. *Réduction par la substitution du second ordre.* — Nous considérons un seul exemple qui se rattache à notre Communication antérieure ([1]). Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x+t)\,dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+cx+d)}} = u.$$

Posons

$$(4) \qquad \frac{(x+\alpha)^2}{x+a} = 4(pu - e_1).$$

En désignant

$$4(e_1 - e_2) = \sigma, \qquad 4(e_1 - e_3) = \tau,$$

nous obtiendrons

$$[x^2 + (2\alpha+\sigma)x + \alpha^2 + a\sigma][x^2 + (2\alpha+\tau)x + \alpha^2 + a\tau] = x^4 + bx^2 + cx + d.$$

D'où il suit que

1° $$4\alpha + \sigma + \tau = 0$$

ou

$$4\alpha + 12e_1 = 0, \qquad 3e_1 = -\alpha;$$

2° $$6\alpha^2 + 2\alpha(\sigma+\tau) + a(\sigma+\tau) + \sigma\tau = b$$

ou

$$6\alpha^2 - (a + 2\alpha)4\alpha + \sigma\tau = b$$

ou

$$\sigma\tau = b + 4a\alpha + 2\alpha^2;$$

3° $$4\alpha^3 + (\alpha^2 + 2a\alpha)(\sigma+\tau) + 2a\sigma\tau = c,$$

d'où

$$c = 2ab + 4a\alpha^2 + 8a^2\alpha;$$

4° $$d = \alpha^4 - 4a\alpha^3 + 2a^2\alpha^2 + 4a^3\alpha + a^2b.$$

([1]) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVII, juin 1903.

De l'équation 3° nous aurons

$$\alpha^2 - 2a\alpha + \frac{c - 2ab}{4a} = 0,$$

(5) $$\alpha = a \pm \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}.$$

Des formules précédentes nous obtiendrons encore

(6) $$(c - 2ab)^2 = 8a^2(2d - ac).$$

En différentiant l'équation (4), nous trouvons

$$(x + \alpha)(x + 2a - \alpha) = 0,$$

d'où il suit que

$$t = 2a - \alpha.$$

D'après l'équation (5), nous aurons pour t les deux valeurs suivantes :

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}},$$

$$t_2 = a + \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}.$$

Par conséquent nous avons les deux intégrales réductibles

$$\int \frac{x + a - \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}}{\sqrt{(x + a)(x^4 + bx^2 + cx + d)}} dx,$$

$$\int \frac{x + a + \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}}{\sqrt{(x + a)(x^4 + bx^2 + cx + d)}} dx;$$

les coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad d$$

satisfont à la condition (6).

La détermination des autres éléments de la réduction se fait à l'aide des formules

$$\sigma + \tau = -4\alpha, \qquad \sigma\tau = b + 4a\alpha + 2\alpha^2,$$

c'est-à-dire

$$12e_1 = -4\alpha, \qquad 16(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = b + 4a\alpha + 2\alpha^2.$$

En posant

$$c = 2ab$$

nous aurons

$$\alpha = a \pm a,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 2a.$$

$$t_1 = 2a, \qquad t_2 = 0,$$

$$d = a^2 b.$$

Par conséquent, dans ce cas particulier, nous avons les deux intégrales réductibles

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b)}},$$

$$\int \frac{(x+2a)\,dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b)}}.$$

En concordance avec le théorème très connu de M. Picard ([1]), nous avons les deux intégrales réductibles, dépendantes d'une même courbe du genre deux.

7. Avant de passer à la réduction par les substitutions du troisième ordre, nous étudierons d'abord la transformation des fonctions elliptiques du même ordre.

Transformation du troisième ordre. — Soit donnée l'intégrale

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = u.$$

Posons

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2 y - \overline{g}_3}},$$

$$\varphi(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x-\alpha)^2} = \overline{p}(u, \overline{g}_2, \overline{g}_3),$$

a, b, c, α étant des indéterminées. Nous avons

$$x^3 + (a - \overline{e}_1)x^2 + (b + 2\alpha\overline{e}_1)x + c - \alpha^2\overline{e}_1 = (x-\xi)^2(x-e_1),$$

$$x^3 + (a - \overline{e}_2)x^2 + (b + 2\alpha\overline{e}_2)x + c - \alpha^2\overline{e}_2 = (x-\eta)^2(x-e_2),$$

$$x^3 + (a - \overline{e}_3)x^2 + (b + 2\alpha\overline{e}_3)x + c - \alpha^2\overline{e}_3 = (x-\zeta)^2(x-e_3),$$

([1]) *Bull. de la Société math.*, t. XII, p. 153.

où

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad x^3 - 3\alpha x^2 - (b + 2a\alpha)x - (b\alpha + 2c) = 0.$$

De la divisibilité des polynomes

$$x^3 + (a - \overline{e_1})x^2 + (b + 2\alpha\overline{e_1})x + c - \alpha^2\overline{e_1},$$
$$x^2 - 2\xi x + \xi^2,$$

nous concluons

1° $$2\xi + a - \overline{e_1} = - e_1,$$

2° $$2\xi^3 + \xi^2(a - \overline{e_1}) - c + \alpha^2\overline{e_1} = 0,$$

3° $$3\xi^2 + 2\xi(a - \overline{e_1}) + b + 2\alpha\overline{e_1} = 0.$$

De ces équations et de leurs analogues, nous trouverons

$$2\sum\xi = 2(\xi + \eta + \zeta) = - 3a.$$

De l'équation (7), nous avons

$$\sum\xi = 3\alpha,$$

donc

$$a = - 2\alpha.$$

Il est facile de prouver que

$$2(\xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3) = 2\sum\xi e_1 = b - \alpha^2,$$

$$\xi^2 e_1 + \eta^2 e_2 + \zeta^2 e_3 = \sum\xi^2 e_1 = - 3c.$$

Ayant l'équation

$$\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2} - \overline{e_1} = \frac{(x - e_1)(x - \xi)^2}{(x - \alpha)^2},$$

nous poserons

$$x = e_1;$$

alors

$$(8)\qquad \frac{(b-\alpha^2)e_1+c}{(\alpha-e_1)^2} = 2\xi - 2\alpha;$$

par conséquent

$$(b-\alpha^2)\sum\frac{e_1}{(\alpha-e_1)^2} + c\sum\frac{1}{(\alpha-e_1)^2} = 2\sum\xi - 6\alpha = 0.$$

Mais

$$\sum\frac{e_1}{(\alpha-e_1)^2} = \frac{16g_2\alpha^3+36g_3\alpha^2-g_2g_3}{(4\alpha^3-g_2\alpha-g_3)^2},$$

$$\sum\frac{1}{(\alpha-e_1)^2} = \frac{24g_2\alpha^2+72g_3\alpha+2g_2^2}{(4\alpha^3-g_2\alpha-g_3)^3};$$

par conséquent

$$(9)\quad (16g_2\alpha^3+36g_3\alpha^2-g_2g_3)(b-\alpha^2)+(24g_2\alpha^2+72g_3\alpha+2g_2^2)c=0.$$

De l'équation (8), nous obtiendrons

$$\frac{(b-\alpha^2)e_1+c}{\alpha-e_1} = 2\xi\alpha - 2\xi e_1 - 2\alpha^2 + 2\alpha e_1.$$

D'où il suit que

$$(b-\alpha^2)\sum\frac{e_1}{\alpha-e_1} + c\sum\frac{1}{\alpha-e_1} = 2\alpha\sum\xi - 2\sum\xi e_1 - 6\alpha^2$$

ou

$$(b-\alpha^2)\sum\frac{e_1}{\alpha-e_1} + c\sum\frac{1}{\alpha-e_1} = -(b-\alpha^2).$$

Et comme

$$\sum\frac{e_1}{\alpha-e_1} = \frac{2g_2\alpha+3g_3}{4\alpha^3-g_2\alpha-g_3},$$

$$\sum\frac{1}{\alpha-e_1} = \frac{12\alpha^2-g_2}{4\alpha^3-g_2\alpha-g_3},$$

nous aurons

$$(10)\qquad (4\alpha^3+g_2\alpha+2g_3)(b-\alpha^2)+(12\alpha^2-g_2)c=0.$$

Des équations (9) et (10) on peut conclure

$$b-\alpha^2=0,\qquad c=0;$$

mais alors l'équation (7) prendra la forme

$$x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3=(x-\alpha)^3,$$

ce qui est impossible; donc

$$\begin{vmatrix} (16 g_2 \alpha^3 + 36 g_3 \alpha^2 - g_2 g_3), & (24 g_2 \alpha^2 + 72 g_3 \alpha + 2 g_2^2) \\ (4\alpha^3 + g_2 \alpha + 2 g_3), & (12 \alpha^2 - g_2) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$96 g_2 \alpha^5 + 144 g_3 \alpha^4 - 48 g_2^2 \alpha^3 - 168 g_2 g_3 \alpha^2 - (2 g_2^3 + 144 g_3^2)\alpha - 3 g_2^2 g_3 = 0$$

ou

$$(48 \alpha^4 - 24 g_2 \alpha^2 - 48 g_3 \alpha - g_2^2)(2 g_2 \alpha + 3 g_3) = 0.$$

D'où il résulte l'équation

$$(11) \qquad 48 \alpha^4 - 24 g_2 \alpha^2 - 48 g_3 \alpha - g_2^2 = 0;$$

par conséquent

$$\alpha = p\left(\frac{2\omega}{3}, g_2, g_3\right) \text{ (}^1\text{)}.$$

Ce résultat concorde complètement avec la solution transcendante du problème de la transformation ([2]).

8. Il est facile de prouver que

$$\sum \xi^2 e_1 = -3c,$$

$$2 \sum \xi e_1^2 = 3c + 2\alpha(b - \alpha^2) - g_2 \alpha,$$

$$\sum \xi^2 e_1^2 = \alpha^2 (b - \alpha^2) - \tfrac{1}{2} g_2 \alpha^2.$$

Posons, pour abréger,

$$b - \alpha^2 = \sigma, \qquad c = \tau.$$

L'équation (8) nous donne

$$2 \xi e_1 \sigma + 2 \xi \tau = 4(\xi^2 - \alpha\xi)(\alpha^2 - 2 e_1 \alpha + e_1^2);$$

d'où

$$2\sigma \sum \xi e_1 + 2\tau \sum \xi = 4\alpha^2 \sum \xi^2 - 4\alpha^3 \sum \xi - 8\alpha \sum \xi^2 e_1$$
$$+ 8\alpha^2 \sum \xi e_1 + 4 \sum \xi^2 e_1^2 - 4\alpha \sum \xi e_1^2.$$

([1]) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. III, p. 214.

([2]) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVII, novembre 1903.

ou bien

$$\sigma^2 + 6\alpha\tau = 12\alpha^2\sigma + 18\alpha\tau$$

ou

$$\sigma^2 - 12\alpha\sigma = 12\alpha\tau.$$

A l'aide de l'équation (10), nous obtiendrons

$$(12\alpha^2 - g_2)(\sigma^2 - 12\alpha\sigma) + 12\alpha\sigma(4\alpha^3 + g_2\alpha + 2g_3) = 0.$$

Et comme

$$\sigma = b - \alpha^2 \neq 0,$$

nous avons

$$\sigma = \frac{24 g_2\alpha^2 + 72 g_3\alpha - 2 g_2^2}{12\alpha^2 - g_2}.$$

Maintenant remarquons que

$$(12\alpha^2 - g_2)^2 = 144\alpha^4 - 24 g_2\alpha^2 + g_2^2.$$

De l'équation (11), nous avons

$$144\alpha^4 = 72 g_2\alpha^2 + 144 g_3\alpha + 3 g_2^2;$$

par conséquent

$$(12\alpha^2 - g_2)^2 = 48 g_2\alpha^2 + 144 g_3\alpha + 4 g_2^2 = 2(24 g_2\alpha^2 + 72 g_3\alpha + 2 g_2^2).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma &= (b - \alpha^2) = 6\alpha^2 - \tfrac{1}{2} g_2, \\ \tau &= \quad c \quad = -(2\alpha^3 + \tfrac{1}{2} g_2\alpha + g_3). \end{aligned}$$

Pour les coefficients de l'équation (7), nous obtiendrons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} b + 2a\alpha &= 3\alpha^2 - \tfrac{1}{2} g_2, \\ 2c + b\alpha &= 4\alpha^3 - \tfrac{3}{2} g_2\alpha - 2 g_3. \end{aligned}$$

Par cette raison, l'équation (7) aura la forme suivante

$$(12) \qquad x^3 - 3\alpha x^2 - (3\alpha^2 - \tfrac{1}{2} g_2)x - (4\alpha^3 - \tfrac{3}{2} g_2\alpha - 2 g_3) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$x_1 = p\left(\frac{\omega}{3}, g_2, g_3\right),$$

$$x_2 = p\left(\frac{\omega}{3} + \omega', g_2, g_3\right),$$

$$x_3 = p\left(\frac{\omega}{3} + \omega + \omega', g_2, g_3\right).$$

9. *Détermination des invariants* $\overline{g_2}$, $\overline{g_3}$. — De l'équation

$$a - \overline{e_1} = -2\xi - e_1 \quad (\text{n}^\circ\ 7),$$

nous avons

$$2\alpha + \overline{e_1} = 2\xi + e_1,$$

$$2\alpha + \overline{e_2} = 2\eta + e_2,$$

$$2\alpha + \overline{e_3} = 2\zeta + e_3;$$

d'où il suit

$$4\alpha^2 - 2\alpha\overline{e_3} + \overline{e_1}\,\overline{e_2} = 4\xi\eta + 2e_2\xi + 2e_1\eta + e_1e_2,$$

$$4\alpha^2 - 2\alpha\overline{e_2} + \overline{e_1}\,\overline{e_3} = 4\xi\zeta + 2e_3\xi + 2e_1\zeta + e_1e_3,$$

$$4\alpha^2 - 2\alpha\overline{e_1} + \overline{e_2}\,\overline{e_3} = 4\eta\zeta + 2e_3\eta + 2e_2\zeta + e_2e_3;$$

donc

$$12\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\overline{g_2} = -12\alpha^2 + 2g_2 - 2\sum\xi e_1 - \tfrac{1}{4}g_2;$$

(13) $$\overline{g_2} = 120\alpha^2 - 9g_2.$$

En outre, nous trouvons facilement

$$8\alpha^3 - \tfrac{1}{2}\overline{g_2}\alpha + \tfrac{1}{4}\overline{g_3} = 8\xi\eta\zeta + 4\sum\xi\eta e_3 + 2\sum\xi e_2e_3 - \tfrac{1}{4}g_3.$$

De cette équation, nous trouvons facilement

(14) $$\overline{g_3} = 312\alpha^3 - 42g_2\alpha - 27g_3.$$

10. *Multiplication complexe.* — En posant

$$\overline{g_2} = \mu^2 g_2, \qquad \overline{g_3} = \mu^3 g_3,$$

des équations (13) et (14) nous aurons

$$(\mu^2 + 9)g_2 = 120\alpha^2,$$

$$(\mu^3 + 27)g_3 = 312\alpha^3 - 42g_2\alpha,$$

$$(\mu^2 + 9)(\mu^3 + 27)g_3 = (312\mu^2 - 2232)\alpha^3.$$

En multipliant l'équation (11) par

$$(\mu^2+9)^2(\mu^3+27),$$

nous obtiendrons

$$\mu^7 - 42\mu^5 - 285\mu^4 - 759\mu^3 - 1710\mu^2 - 405 = 0.$$

11. *Réduction du troisième ordre.* — Nous considérons d'abord un exemple, très intéressant, indiqué par Hermite.

On demande de réduire l'intégrale

$$(15) \qquad \int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^3+3ax+b)}} = u$$

à une intégrale elliptique, t étant une quantité inconnue.

Posons

$$(16) \qquad \frac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2+4a} = 4\,\mathrm{p}(u, g_2, g_3) = \psi(x).$$

De l'équation (16) nous obtiendrons les trois formules suivantes :

$$\frac{x^3+(\alpha-4e_1)x^2+\beta x+\gamma-16ae_1}{x^2+4a} = \frac{(x-\xi)^2(x-x_1)}{x^2+4a} = 4(\mathrm{p}u-e_1),$$

$$\frac{x^3+(\alpha-4e_2)x^2+\beta x+\gamma-16ae_2}{x^2+4a} = \frac{(x-\eta)^2(x-x_2)}{x^2+4a} = 4(\mathrm{p}u-e_2),$$

$$\frac{x^3+(\alpha-4e_3)x^2+\beta x+\gamma-16ae_3}{x^2+4a} = \frac{(x-\zeta)^2(x-x_3)}{x^2+4a} = 4(\mathrm{p}u-e_3),$$

où

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

sont les racines de l'équation

$$x^3+3ax+b = 0,$$

et

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad t$$

sont les racines de l'équation

$$\psi'(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^4+(12a-\beta)x^2+(8a\alpha-2\gamma)x+4a\beta = 0;$$

par conséquent

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

satisfont à l'équation

$$(17) \quad x^3 - tx^2 + (t^2 + 12a - \beta)x + t^3 + (12a - \beta)t + 8a\alpha - 2\gamma = 0.$$

De la divisibilité des polynomes

$$x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \beta x + \gamma + 16ae_1,$$
$$(x - \xi)^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2,$$

nous concluons

1° $$2\xi^3 + (\alpha - 4e_1)\xi^2 - \gamma + 16ae_1 = 0,$$
2° $$3\xi^2 + 2(\alpha - 4e_1)\xi + \beta = 0,$$
3° $$2\xi + \alpha - 4e_1 = -x_1.$$

D'où il suit que

$$2\xi x_1 = \beta - \xi^2,$$

de même

$$2\eta x_2 = \beta - \eta^2,$$
$$2\zeta x_3 = \beta - \zeta^2,$$

donc

$$2\sum \xi x_1 = \beta + t^2 + 24a.$$

De même, nous obtiendrons facilement

$$\sum \xi^2 x_1 = -3\gamma,$$
$$2\sum \xi x_1^2 = 3\gamma,$$
$$\sum \xi^2 x^2 = 4a\beta + 4at^2 + 72a^2.$$

De l'équation

$$\frac{x^3 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma}{x^2 + 4a} - 4e_1 = \frac{(x - \xi)^2 (x + x_1)}{x^2 + 4a},$$

nous aurons

$$\frac{x_1^3 + \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma}{x_1^2 - 4a} - 4e_1 = x_1 + \alpha + 2\xi;$$

d'où

$$(18) \qquad \frac{(\beta - 4a)x_1}{x_1^2 + 4a} + \frac{\gamma - 4a\alpha}{x_1^2 + 4a} = 2\xi;$$

par conséquent

$$(\beta - 4a)\sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} + (\gamma - 4a\alpha)\sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} = 2\sum \xi = -2t.$$

Et comme

$$\sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} = \frac{9ab}{4a^3 + b^2}, \qquad \sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} = \frac{9a^2}{4a^3 + b^2},$$

nous obtiendrons

$$\frac{9ab(\beta - 4a)}{4a^3 + b^2} + \frac{9a^2(\gamma - 4a\alpha)}{4a^3 + b^2} = -2t$$

ou

$$(19) \qquad 9ab\beta + 9a^2\gamma + (2b^2 - 16a^3)t = 36a^2b.$$

De l'équation (18) nous aurons

$$\beta - 4a - \frac{4a(\beta - 4a)}{x_1^2 + 4a} + \frac{(\gamma - 4ae_1)x_1}{x_1^2 + 4a} = 2\xi x_1,$$

d'où

$$3\beta - 12a - 4a(\beta - 4a)\sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} + (\gamma - 4ae_1)\sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} = 2\sum \xi x_1$$

ou

$$(20) \qquad (2b^2 - 28a^3)\beta + 9ab\gamma - 24a^2bt - (4a^3 + b^2)t^2 = 36ab^2.$$

De l'équation (18) nous aurons encore

$$(\beta - 4a)\xi x_1 + (\gamma - 4a\alpha)\xi = 2\xi^2 x_1^2 + 8a\xi^2;$$

d'où

$$(\beta - 4a)\sum \xi x_1 + (\gamma - 4a\alpha)\sum \xi = 2\sum \xi^2 x_1^2 + 8a\sum \xi^2.$$

D'après les formules trouvées plus haut pour les fonctions symétriques

$$\sum \xi x_1, \quad \sum \xi, \quad \sum \xi^2 x_1^2, \quad \sum \xi^2,$$

nous avons

(21) $$\beta^2 - 28\alpha\beta + \beta t + \tfrac{4}{3}at^2 - 2t\gamma = 0.$$

Des équations (19) et (20) nous trouvons

$$\beta = -\frac{at^2 + 2bt}{7a}, \qquad \gamma = \frac{9abt^2 + 4(b^2 + 28a^3)t + 252a^2b}{63a^2}.$$

Par conséquent, l'équation (21) nous donne

(22) $$9a^2t^4 - (90ab + 63a^2)t^3 + (784 - 126ab - 20b^2)t^2 = 0.$$

On peut, à l'aide de l'équation (18) et des fonctions symétriques, former une autre équation définissant t. En cherchant le plus grand commun diviseur entre cette nouvelle équation et l'équation (22), nous trouverons la valeur t. L'une des solutions de l'équation (22) est

$$t = 0,$$

c'est ce qui donne l'intégrale réductible

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^3 + 3ax + b)}},$$

indiquée par Hermite et citée par plusieurs autres auteurs.

Nous avons calculé les éléments de la réduction de cette intégrale dans le Mémoire : *Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes* [1].

12. Considérons encore un exemple. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x + a)\,dx}{\sqrt{(x + a)(x^3 + 3abx + c)(x + d)}} = u.$$

Posons

$$\frac{(x + a)^3}{(x + \beta)^2} = 4(\wp u - e_1) = \varphi(x).$$

En désignant

$$4(e_1 - e_2) = \sigma,$$
$$4(e_1 - e_3) = \tau,$$

---

[1] *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXVII, juin 1903.

nous aurons

$$1^\circ \quad x^3+(3a+\sigma)x^2+(3a^2+2\beta\sigma)x+(a^3+\beta^2\sigma)=x^3+3abx+c;$$
$$2^\circ \quad x^3+(3a+\tau)x^2+(3a^2+2\beta\tau)x+(a^3+\beta^2\tau)=(x+d)(x+\xi)^2,$$

— ξ étant la racine de l'équation

$$\varphi'(x)=0,$$

par conséquent

$$\xi=3\beta-2a.$$

Il est facile de prouver que

$$\sigma=-3a,\qquad \beta=\frac{a-b}{2},$$
$$4c=a^3-3ab^2+6a^2b,$$
$$\tau=d-4a+3b,$$
$$5a^2+2ab-3b^2-8ad-8bd=0$$

ou

$$(a+b)(5a-3b-8d)=0.$$

Il ne peut pas prendre

$$a+b=0,$$

car alors

$$\beta=a,\qquad \varphi(x)=x+a,$$

ce qui est impossible; donc

$$8d=5a-3b.$$

En outre

$$\sigma+\tau=12e_1=-\frac{51a+27b}{8},$$

$$e_1=-\frac{17a+9b}{32},\qquad e_2=\frac{7a-9b}{32},\qquad e_3=\frac{10a}{32}.$$

Saint-Pétersbourg, 6 juillet 1904.



1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GEISSLER (K.). — Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde. Zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichts. 1 vol in-8°, VII-99 pages, 52 figures. Leipzig, Teubner, 1904.

Le Livre de M. Geissler expose, en supposant chez le lecteur très peu de connaissances mathématiques, ce qu'il y a de plus essentiel dans le mouvement apparent des étoiles, du soleil et des planètes. C'est, si l'on veut, une Cosmographie descriptive, très élémentaire. L'effort pour rendre les choses claires sans appareil mathématique mérite d'être signalé.

Une autre particularité de ce Livre est dans ces nombreuses questions posées à la fin de chaque paragraphe. Elles sont destinées à faire réfléchir le lecteur, à piquer sa curiosité, à le convaincre qu'il a compris ou qu'il n'a pas compris. Peut-être, après une lecture attentive, ces questions le suivront-elles dans une promenade, et contribueront-elles à créer ou à développer chez lui le sens scientifique.

Le livre de M. Geissler m'a fait penser à un enseignement qui me paraît possible et qui ne serait pas dénué d'intérêt : l'enseignement de la Cosmographie conçu comme préparant l'enseignement de la Géométrie. Cet enseignement serait, bien entendu, essentiellement descriptif : il donnerait l'occasion de présenter, au fur et à mesure qu'il se déroulerait, sous une forme intuitive, un certain nombre de notions géométriques essentielles sur la droite et le cercle, sur les droites et plans parallèles ou perpendiculaires, sur les mouvements de translation et de rotation, sur la sphère, sur les coordonnées ; avec de bonnes figures et un très petit nombre d'appareils, avec beaucoup de soin et de patience chez le maître, qui ne devrait pas craindre les digressions, cela me paraît parfaitement réalisable ; tout en acquérant la connaissance de faits astronomiques très intéressants, en développant en quelque sorte leur imagination géométrique et cinématique, ceux

qui suivraient un pareil enseignement se rendraient peut-être compte de la nécessité d'une étude systématique et approfondie de cette Géométrie, dont les débuts, présentés sous la forme euclidienne, semblent aux enfants si étranges, si secs et si inutiles. J. T.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES,

LUE LE 24 SEPTEMBRE 1904 AU CONGRÈS DES SCIENCES ET DES ARTS A SAINT-LOUIS;

PAR M. GASTON DARBOUX.

I.

Pour bien se rendre compte des progrès que la Géométrie a faits au cours du siècle qui vient de finir, il importe de jeter un coup d'œil rapide sur l'état des Sciences mathématiques au commencement du XIXe siècle. On sait que, dans la dernière période de sa vie, Lagrange, fatigué des recherches d'Analyse et de Mécanique, qui lui assurent pourtant une gloire immortelle, avait négligé les Mathématiques pour la Chimie qui, d'après lui, devenait facile comme l'Algèbre, pour la Physique, pour les spéculations philosophiques. Cet état d'esprit de Lagrange, nous le retrouvons presque toujours à certains moments de la vie des plus grands savants. Les idées nouvelles qui leur sont apparues dans la période féconde de la jeunesse et qu'ils ont introduites dans le

domaine commun leur ont donné tout ce qu'ils pouvaient en attendre; ils ont rempli leur tâche et éprouvent le besoin de tourner vers des sujets tout nouveaux l'activité de leur esprit. Ce besoin, il faut le reconnaître, devait se manifester avec une force toute particulière à l'époque de Lagrange. A ce moment, en effet, le programme des recherches ouvertes aux géomètres par la découverte du Calcul infinitésimal paraissait bien près d'être épuisé. Des équations différentielles plus ou moins compliquées à intégrer, quelques chapitres à ajouter au Calcul intégral, et il semblait qu'on allait toucher aux bornes mêmes de la Science. Laplace achevait l'explication du système du monde et jetait les bases de la Physique moléculaire. Des voies nouvelles s'ouvraient pour les sciences expérimentales et préparaient l'étonnant développement qu'elles ont reçu au cours du siècle qui vient de finir. Ampère, Poisson, Fourier et Cauchy lui-même, le créateur de la théorie des imaginaires, se préoccupaient avant tout d'étudier l'application des méthodes analytiques à la Mécanique, à la Physique moléculaire et semblaient croire qu'en dehors de ce nouveau domaine, qu'ils avaient hâte de parcourir, les cadres de la Théorie et de la Science étaient définitivement fixés.

La Géométrie moderne, c'est un titre que nous devons revendiquer pour elle, est venue, dès la fin du XVIIIe siècle, contribuer dans une large mesure au renouvellement de la Science mathématique tout entière, en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde, et surtout en nous montrant, par des succès éclatants, que les méthodes générales ne sont pas tout dans la Science et que, même dans le sujet le plus simple, il y a beaucoup à faire pour un esprit ingénieux et inventif. Les belles démonstrations géométriques de Huyghens, de Newton et de Clairaut étaient oubliées ou négligées. Les idées géniales introduites par Desargues et Pascal étaient restées sans développement et paraissaient être tombées sur un sol stérile. Carnot, par l'*Essai sur les transversales* et la *Géométrie de position*, Monge surtout, par la création de la Géométrie descriptive et par ses belles théories sur la génération des surfaces, sont venus renouer une chaîne qui paraissait brisée. Grâce à eux, les conceptions des inventeurs de la Géométrie analytique, Descartes et Fermat, ont repris auprès du Calcul infinitésimal de Leibniz et de Newton la place qu'on leur avait laissé

perdre et qu'elles n'auraient jamais dû cesser d'occuper. Avec sa Géométrie, disait Lagrange en parlant de Monge, ce diable d'homme se rendra immortel. Et, en effet, non seulement la Géométrie descriptive a permis de coordonner et de perfectionner les procédés employés dans tous les arts, « où la précision de la forme est une condition de succès et d'excellence pour le travail et ses produits »; mais elle est apparue comme la traduction graphique d'une Géométrie générale et purement rationnelle, dont de nombreuses et importantes recherches ont démontré l'heureuse fécondité. A côté de la *Géométrie descriptive* nous ne devons pas d'ailleurs oublier de placer cet autre chef-d'œuvre qui a nom l'*Application de l'analyse à la Géométrie*; nous ne devons pas oublier non plus que c'est à Monge que sont dues la notion des lignes de courbure et l'élégante intégration de l'équation différentielle de ces lignes pour le cas de l'ellipsoïde, que Lagrange, dit-on, lui enviait. Il faut insister sur ce caractère de l'ensemble de l'Œuvre de Monge. Le rénovateur de la Géométrie moderne nous a montré, dès le début, ses successeurs l'ont peut-être oublié, que l'alliance de la Géométrie et de l'Analyse est utile et féconde, que cette alliance est peut-être une condition de succès pour l'une et pour l'autre.

II.

A l'école de Monge se formèrent de nombreux géomètres : Hachette, Brianchon, Chappuis, Binet, Lancret, Dupin, Malus, Gaultier de Tours, Poncelet, Chasles, etc. Parmi eux, Poncelet se place au premier rang. Négligeant tout ce qui, dans les travaux de Monge, se rattache à l'Analyse de Descartes ou concerne la Géométrie infinitésimale, il s'attacha exclusivement à développer les germes contenus dans les recherches purement géométriques de son illustre devancier. Fait prisonnier par les Russes en 1813 au passage du Dnieper et interné à Saratoff, Poncelet employa les loisirs que lui laissait sa captivité à la démonstration des principes qu'il a développés dans le *Traité des propriétés projectives des figures*, paru en 1822, et dans les grands Mémoires sur les polaires réciproques et sur les moyennes harmoniques, qui remontent à peu près à la même époque. C'est donc à Saratoff qu'est née, on peut le dire, la

Géométrie moderne. Renouant la chaîne interrompue depuis Pascal et Desargues, Poncelet introduisit à la fois l'homologie et les polaires réciproques, mettant ainsi en évidence, dès le début, les idées fécondes sur lesquelles la Science a évolué pendant 50 ans.

Présentées en opposition avec la Géométrie analytique, les méthodes de Poncelet ne furent pas favorablement accueillies par les analystes français. Mais telles étaient leur importance et leur nouveauté qu'elles ne tardèrent pas à susciter, de divers côtés, les recherches les plus approfondies. Poncelet avait été seul à découvrir les principes; plusieurs géomètres, au contraire, apparurent presque en même temps pour les étudier sur toutes leurs faces et pour en déduire les résultats essentiels qui y étaient implicitement contenus.

A cette époque, Gergonne dirigeait avec éclat un Recueil périodique qui a aujourd'hui pour l'histoire de la Géométrie un prix inestimable. Les *Annales de Mathématiques*, publiées à Nîmes de 1810 à 1831, ont été pendant plus de quinze ans le seul journal du monde entier exclusivement consacré aux recherches de mathématiques. Gergonne, qui nous a laissé à bien des égards un excellent modèle du directeur de journaux scientifiques, avait les défauts de ses qualités; il collaborait, souvent contre leur gré, avec les auteurs des Mémoires qui lui étaient envoyés, remaniait leur rédaction et leur faisait dire quelquefois plus ou moins qu'ils n'auraient voulu. Quoi qu'il en soit, il fut vivement frappé de l'originalité et de la portée des découvertes de Poncelet. On connaissait déjà en Géométrie quelques méthode simples de transformation des figures; on avait même employé l'homologie dans le plan, mais sans l'étendre à l'espace, comme le fit Poncelet, ni surtout sans en connaître la puissance et la fécondité. D'ailleurs toutes ces transformations étaient *ponctuelles*, c'est-à-dire qu'elles faisaient correspondre un point à un point. En introduisant les polaires réciproques, Poncelet faisait au plus haut degré œuvre d'inventeur; car il donnait le premier exemple d'une transformation dans laquelle à un point correspondait autre chose qu'un point. Toute méthode de transformation permet de multiplier le nombre des théorèmes, mais celle des polaires réciproques avait l'avantage de faire correspondre à une proposition une autre proposition d'aspect tout différent. Il y avait là un fait essentielle-

ment nouveau. Pour le mettre en évidence, Gergonne inventa le système, qui depuis a eu tant de succès, des Mémoires écrits sur doubles colonnes, avec les propositions corrélatives en regard; et il eut l'idée de substituer aux démonstrations de Poncelet, qui exigeaient l'intermédiaire d'une courbe ou d'une surface du second ordre, le fameux *principe de dualité,* dont la signification, un peu vague d'abord, fut suffisamment éclaircie par les discussions qui s'établirent à ce sujet entre Gergonne, Poncelet et Plücker.

Bobillier, Chasles, Steiner, Lamé, Sturm et bien d'autres que j'oublie étaient, en même temps que Plücker et Poncelet, les collaborateurs assidus des *Annales de Mathématiques*. Gergonne, devenu recteur de l'Académie de Montpellier, dut interrompre en 1831 la publication de son journal. Mais le succès qu'il avait obtenu, le goût des recherches qu'il avait contribué à développer avaient commencé à porter leur fruit. Quételet venait de créer en Belgique la *Correspondance mathématique et physique*. Crelle, dès 1826, faisait paraître à Berlin les premières feuilles de son célèbre journal, où il publiait les Mémoires d'Abel, de Jacobi, de Steiner. Un grand nombre d'Ouvrages séparés allaient aussi paraître, où les principes de la Géométrie moderne devaient être magistralement exposés et développés.

C'est d'abord en 1827 le *Calcul barycentrique* de Möbius, œuvre vraiment originale, remarquable par la profondeur des conceptions, la netteté et la rigueur de l'exposition; puis en 1828 les *Analytisch-geometrische Entwickelungen* de Plücker dont la seconde partie parut en 1831 et qui furent bientôt suivis du *System der analytischen Geometrie* du même auteur publié à Berlin en 1835. En 1832, Steiner faisait paraître à Berlin son grand Ouvrage : *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometrischen Gestalten von einander*, et, l'année suivante, les *Geometrische Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, où se trouvait confirmée par les exemples les plus élégants une proposition de Poncelet relative à l'emploi d'un seul cercle pour les constructions géométriques. Enfin, en 1830, Chasles envoyait à l'Académie de Bruxelles, qui heureusement inspirée avait mis au concours une étude des principes de la Géométrie moderne, son célèbre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*,

suivi du *Mémoire sur deux principes généraux de la Science : la dualité et l'homographie*, qui fut publié seulement en 1837.

Le temps nous manquerait pour apprécier dignement ces beaux Ouvrages et pour faire ici la part de chacun d'eux. A quoi d'ailleurs pourrait nous conduire une telle étude, sinon à une vérification nouvelle des lois générales du développement de la Science. Quand les temps sont mûrs, quand les principes fondamentaux ont été reconnus et énoncés, rien n'arrête la marche des idées; les mêmes découvertes, ou des découvertes à peu près équivalentes, se produisent à peu près au même instant, et dans les lieux les plus divers. Sans entreprendre une discussion de ce genre qui pourrait d'ailleurs paraître inutile ou devenir irritante, il importe cependant que nous fassions ressortir une différence fondamentale entre les tendances des grands géomètres qui, vers 1830, vinrent donner à la Géométrie un essor inconnu jusque-là.

III.

Les uns, comme Chasles et Steiner, qui consacrèrent leur vie entière aux recherches de pure Géométrie, opposèrent ce qu'ils appelaient la *synthèse* à l'*analyse* et, adoptant dans l'ensemble sinon dans le détail les tendances de Poncelet, ils se proposèrent de constituer une doctrine indépendante, rivale de l'analyse de Descartes.

Poncelet n'avait pu se contenter des ressources insuffisantes fournies par la méthode des projections; pour atteindre les imaginaires, il avait dû imaginer ce fameux *principe de continuité* qui a donné naissance à de si longues discussions entre lui et Cauchy. Convenablement énoncé, ce principe est excellent et peut rendre de grands services. Poncelet lui faisait du tort en se refusant à le présenter comme une simple conséquence de l'Analyse; et Cauchy, d'autre part, ne voulait pas reconnaître que ses propres objections, applicables sans doute à certaines figures transcendantes, demeuraient sans force dans les applications faites par l'auteur du *Traité des propriétés projectives*. Quelque opinion que l'on se fasse au sujet d'une telle discussion, elle montra du moins de la manière la plus claire que le système géométrique de Poncelet

reposait sur une base analytique et nous savons du reste, par la publication malencontreuse des cahiers de Saratoff, que c'est à l'aide de l'analyse de Descartes qu'ont été établis les principes qui servent de base au *Traité des propriétés projectives*.

Moins ancien que Poncelet, qui d'ailleurs abandonna la Géométrie pour la Mécanique où ses travaux ont eu une influence prépondérante, Chasles, pour qui fut créée en 1847 une chaire de *Géométrie supérieure* à la Faculté des Sciences de Paris, s'efforça de constituer une doctrine géométrique entièrement indépendante et autonome. Il l'a exposée dans deux ouvrages de haute importance, le *Traité de Géométrie supérieure*, qui date de 1852, et le *Traité des sections coniques*, malheureusement inachevé et dont la première partie seule a paru en 1865.

Dans la préface du premier de ces ouvrages il indique très nettement les trois points fondamentaux qui permettent à la nouvelle doctrine de participer aux avantages de l'analyse et lui paraissent marquer un progrès dans la culture de la science. Ce sont :

1° L'introduction du principe des signes, qui simplifie à la fois les énoncés et les démonstrations, et donne à l'analyse des transversales de Carnot toute la portée dont elle est susceptible;

2° L'introduction des imaginaires, qui supplée au principe de continuité et fournit des démonstrations aussi générales que celles de la géométrie analytique;

3° La démonstration simultanée des propositions qui sont corrélatives, c'est-à-dire qui se correspondent en vertu du principe de dualité.

Chasles étudie bien dans son Ouvrage l'homographie et la corrélation; mais il écarte systématiquement dans son exposition l'emploi des transformations des figures, lesquelles, pense-t-il, ne peuvent suppléer à des démonstrations directes parce qu'elles masquent l'origine et la véritable nature des propriétés obtenues par leur moyen. Il y a du vrai dans ce jugement, mais la marche même de la science nous permet de le trouver trop sévère. S'il arrive souvent que, employées sans discernement, les transformations multiplient inutilement le nombre des théorèmes, il ne faut pas méconnaître qu'elles nous aident souvent aussi à mieux connaître la nature des propositions mêmes auxquelles elles ont

été appliquées. N'est-ce pas l'emploi de la projection de Poncelet qui a conduit à la distinction si féconde entre les propriétés projectives et les propriétés métriques, qui nous a fait aussi connaître la haute importance de ce rapport anharmonique, dont la propriété essentielle se trouve déjà dans Pappus, et dont le rôle fondamental n'a commencé à apparaître après quinze siècles que dans les recherches de la géométrie moderne?

L'introduction du principe des signes n'était pas aussi nouvelle que le croyait Chasles au moment où il écrivait son *Traité de Géométrie supérieure*. Déjà Möbius, dans son *Calcul Barycentrique*, avait donné suite à un *desideratum* de Carnot, et employé les signes de la manière la plus large et la plus précise, en définissant pour la première fois le signe d'un segment et même celui d'une aire. Il a réussi plus tard à étendre l'usage des signes à des longueurs qui ne sont pas portées sur la même droite et à des angles qui ne sont pas formés autour d'un même point. D'ailleurs Grassmann, dont l'esprit a tant d'analogie avec celui de Möbius, avait dû nécessairement employer le principe des signes dans les définitions qui servent de base à sa méthode si originale d'étude des propriétés de l'étendue.

Le second caractère que Chasles assigne à son système de géométrie, c'est l'emploi des imaginaires. Ici sa méthode était réellement nouvelle et il a su l'illustrer par des exemples de haut intérêt. On admirera toujours les belles théories qu'il nous a laissées sur les surfaces homofocales du second degré, où toutes les propriétés connues et d'autres nouvelles, aussi variées qu'élégantes, dérivent de ce principe général qu'elles sont inscrites dans une même développable circonscrite au cercle de l'infini. Mais Chasles n'a introduit les imaginaires que par leurs fonctions symétriques et n'aurait pu, par conséquent, définir le rapport anharmonique de quatre éléments lorsque ceux-ci cessent d'être réels en tout ou en partie. Si Chasles avait pu établir la notion du rapport anharmonique d'éléments imaginaires, une formule qu'il donne dans la *Géométrie supérieure* (p. 118 de la nouvelle édition) lui aurait immédiatement fourni cette belle définition de l'angle comme logarithme d'un rapport anharmonique qui a permis à Laguerre, notre confrère regretté, de résoudre d'une manière complète le problème, si longtemps cherché, de la transformation

des relations qui contiennent à la fois des angles et des segments dans l'homographie et la corrélation.

Comme Chasles, Steiner, le grand et le profond géomètre, a suivi la voie de la géométrie pure; mais il a négligé de nous donner un exposé complet des méthodes sur lesquelles il s'appuyait. On peut toutefois les caractériser en disant qu'elles reposent sur l'introduction de ces formes géométriques élémentaires, que Desargues avait déjà considérées, sur le développement qu'il a su donner à la théorie des polaires de Bobillier, et enfin sur la construction des courbes et des surfaces de degrés supérieurs, à l'aide de faisceaux ou de réseaux de courbes ou de surfaces d'ordres moindres. A défaut des recherches récentes, l'Analyse suffirait à montrer que le champ ainsi embrassé a l'étendue même de celui dans lequel nous introduit sans effort l'analyse de Descartes.

IV.

Pendant que Chasles, Steiner, et plus tard, comme nous le verrons, v. Staudt, s'attachaient à constituer une doctrine rivale de l'Analyse et dressaient en quelque sorte autel contre autel, Gergonne, Bobillier, Sturm, Plücker surtout, perfectionnaient la géométrie de Descartes et constituaient un système analytique en quelque sorte adéquat aux découvertes des géomètres. C'est à Bobillier et à Plücker que nous devons la méthode dite *des notations abrégées*. Bobillier lui a consacré quelques pages vraiment neuves dans les derniers volumes des *Annales* de Gergonne. Plücker a commencé à la développer dans son premier Ouvrage, bientôt suivi d'une série de travaux où sont établies d'une manière pleinement consciente les bases de la géométrie analytique moderne. C'est à lui que nous devons les coordonnées tangentielles, les coordonnées trilinéaires, employées avec des équations homogènes, et enfin l'emploi des formes canoniques dont la validité se reconnaît par la méthode, si trompeuse quelquefois mais si féconde, dite de l'*énumération des constantes*. Toutes ces heureuses acquisitions allaient infuser un sang nouveau à l'analyse de Descartes et la mettre en mesure de donner leur pleine signification aux conceptions dont la géométrie dite

synthétique n'avait pu se rendre complètement maîtresse. Plücker, auquel il est sans doute équitable d'adjoindre Bobillier, enlevé par une mort prématurée, doit être regardé comme le véritable initiateur de ces méthodes de l'Analyse moderne où l'emploi des coordonnées homogènes permet de traiter simultanément, et sans que le lecteur s'en aperçoive pour ainsi dire, en même temps qu'une figure, toutes celles qui s'en déduisent par l'homographie et la corrélation.

V.

A partir de ce moment s'ouvre une période brillante pour les recherches géométriques de toute nature. Les analystes interprètent tous leurs résultats et se préoccupent de les traduire par des constructions. Les géomètres s'attachent à découvrir dans chaque question quelque principe général, le plus souvent indémontrable sans le secours de l'analyse, pour en faire découler sans effort une foule de conséquences particulières, solidement reliées les unes aux autres et au principe d'où elles dérivent. Otto Hesse, brillant disciple de Jacobi, développe d'une manière admirable cette méthode des homogènes à laquelle Plücker peut-être n'avait pas su donner toute sa valeur. Boole découvre dans les polaires de Bobillier la première notion du covariant; la théorie des formes se crée par les travaux de Cayley, de Sylvester, d'Hermite, de Brioschi. Plus tard, Aronhold, Clebsch et Gordan et d'autres géomètres encore vivants lui fournissent ses notations définitives, établissent le théorème fondamental relatif à la limitation du nombre des formes covariantes et achèvent ainsi de lui donner toute son ampleur.

La théorie des surfaces du second ordre, édifiée principalement par l'école de Monge, s'enrichit d'une foule de propriétés élégantes, établies principalement par O. Hesse, qui doit trouver plus tard en Paul Serret un digne émule et un continuateur.

Les propriétés des polaires des courbes algébriques sont développées par Plücker et surtout par Steiner. L'étude déjà ancienne des courbes du troisième ordre est rajeunie et enrichie d'une foule d'éléments nouveaux. Steiner, le premier, étudie par la Géométrie pure les tangentes doubles des courbes du quatrième

ordre, et Hesse, après lui, applique les méthodes de l'algèbre à cette belle question, ainsi qu'à celle des points d'inflexion des courbes du troisième ordre.

La notion de *classe* introduite par Gergonne, l'étude d'un paradoxe en partie élucidé par Poncelet et relatif aux degrés respectifs de deux courbes polaires réciproques l'une de l'autre, donnent naissance aux recherches de Plücker relatives aux singularités dites *ordinaires* des courbes planes algébriques. Les célèbres formules auxquelles Plücker est ainsi conduit sont plus tard étendues par Cayley et par d'autres géomètres aux courbes gauches algébriques, par Cayley encore et par Salmon aux surfaces algébriques. Les singularités d'ordre supérieur sont à leur tour abordées par les géomètres; contrairement à une opinion alors très répandue, Halphen démontre que chacune de ces singularités ne peut être considérée comme équivalente à un certain groupe de singularités ordinaires et ses recherches closent pour un temps cette difficile et importante question.

L'Analyse et la Géométrie, Steiner, Cayley, Salmon, Cremona se rencontrent dans l'étude des surfaces du troisième ordre; et, conformément aux prévisions de Steiner, cette théorie devient aussi simple et aussi facile que celle des surfaces du second ordre.

Les surfaces réglées algébriques, si importantes pour les applications, sont étudiées par Chasles, par Cayley dont on retrouve l'influence et la trace dans toutes les recherches mathématiques, par Cremona, Salmon, La Gournerie; elles le seront plus tard par Plücker dans un travail sur lequel nous aurons à revenir.

L'étude de la surface générale du quatrième ordre paraît être trop difficile encore; mais celle des surfaces particulières de cet ordre avec points multiples ou lignes multiples est commencée, avec Plücker pour la surface des ondes, avec Steiner, Kummer, Cayley, Moutard, Laguerre, Cremona et bien d'autres chercheurs. Quant à la théorie des courbes gauches algébriques, enrichie dans ses parties élémentaires, elle reçoit enfin, par les travaux d'Halphen et de Nœther qu'il nous est impossible de séparer ici, les plus notables accroissements. Une théorie nouvelle de grand avenir naît avec les travaux de Chasles, de Clebsch et de Cremona; elle concerne l'étude de toutes les courbes algébriques qui peuvent être tracées sur une surface déterminée.

L'homographie et la corrélation, ces deux méthodes de transformation qui ont été l'origine lointaine de toutes les recherches précédentes, en reçoivent à leur tour un accroissement inattendu : elles ne sont pas les seules qui fassent correspondre un seul élément à un seul élément, comme aurait pu le montrer une transformation particulière brièvement signalée par Poncelet dans le *Traité des propriétés projectives*. Plücker définit la *transformation par rayons vecteurs réciproques* ou *inversion* dont Sir W. Thomson et Liouville ne tardent pas à montrer toute l'importance, tant pour la Physique mathématique que pour la Géométrie. Un contemporain de Möbius et de Plücker, Magnus, croit avoir trouvé la transformation la plus générale qui fasse correspondre un point à un point, mais les recherches de Cremona nous apprennent que la transformation de Magnus n'est que le premier terme d'une série de transformations birationnelles que le grand géomètre italien nous apprend à déterminer méthodiquement, au moins pour les figures de la Géométrie plane. Les transformations de Cremona conserveront longtemps un grand intérêt, bien que des recherches ultérieures nous aient appris qu'elles se ramènent toujours à une série d'applications successives de la transformation de Magnus.

VI.

Tous les travaux que nous venons d'énumérer, d'autres sur lesquels nous reviendrons plus loin, trouvent leur origine et, en quelque sorte, leur premier moteur dans les conceptions de la Géométrie moderne; mais le moment est venu d'indiquer rapidement une autre source de grands progrès pour les études de Géométrie. La théorie des fonctions elliptiques de Legendre, trop négligée par les géomètres français, est développée et agrandie par Abel et Jacobi. Avec ces grands géomètres, bientôt suivis de Riemann et de Weierstrass, la théorie des fonctions abéliennes que, plus tard, l'Algèbre essaiera de suivre avec ses seules ressources, vient apporter à la Géométrie des courbes et des surfaces une contribution dont l'importance ne cessera de grandir.

Déjà Jacobi avait employé l'analyse des fonctions elliptiques à la démonstration des célèbres théorèmes de Poncelet sur les poly-

gones inscrits et circonscrits, inaugurant ainsi un chapitre qui s'est enrichi depuis d'une foule de résultats élégants; il avait obtenu aussi, par des méthodes se rattachant à la Géométrie, l'intégration des équations abéliennes.

Mais c'est Clebsch qui, le premier, montra dans une longue série de travaux toute l'importance de la notion de *genre* d'une courbe, due à Abel et à Riemann, en développant une foule de résultats et de solutions élégantes que l'emploi des intégrales abéliennes paraissait, tant il était simple, rattacher à leur véritable point de départ. L'étude des points d'inflexion des courbes du troisième ordre, celle des tangentes doubles des courbes du quatrième ordre et, en général, la théorie de l'osculation sur laquelle s'étaient si souvent exercés les anciens et les modernes, furent rattachées au beau problème de la division des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

Dans un de ses Mémoires, Clebsch avait étudié les courbes *rationnelles* ou de genre zéro; cela le conduisit, vers la fin de sa vie trop courte, à envisager ce qu'on peut appeler aussi les surfaces *rationnelles*, celles qui peuvent être simplement représentées par un plan. Il y avait là un vaste champ de recherches, ouvert déjà pour les cas élémentaires par Chasles, et dans lequel Clebsch fut suivi par Cremona et beaucoup d'autres savants. C'est à cette occasion que Cremona, généralisant ses recherches de Géométrie plane, fit connaître non plus la totalité des transformations birationnelles de l'espace, mais quelques-unes des plus intéressantes parmi ces transformations. L'extension de la notion de genre aux surfaces algébriques est déjà commencée; déjà aussi des travaux de haute valeur ont montré que la théorie des intégrales simples ou multiples de différentielles algébriques trouvera, dans l'étude des surfaces comme dans celle des courbes, un champ étendu d'applications importantes: mais ce n'est pas au rapporteur de la Géométrie qu'il convient d'insister sur ce sujet.

VII.

Pendant que se constituaient ainsi les méthodes mixtes dont nous venons d'indiquer les principales applications, les géomètres

purs ne restaient pas inactifs. Poinsot, le créateur de la théorie des couples, développait, par une méthode purement géométrique, « celle, disait-il, où l'on ne perd de vue, à aucun moment, l'objet de la recherche » la théorie de la rotation d'un corps solide que les recherches de d'Alembert, d'Euler et de Lagrange semblaient avoir épuisée; Chasles apportait une contribution précieuse à la Cinématique par ses beaux théorèmes sur le déplacement d'un corps solide, qui ont été étendus depuis par d'autres méthodes élégantes au cas où le mouvement a des degrés divers de liberté. Il faisait connaître ces belles propositions sur l'attraction en général, qui figurent sans désavantage à côté de celles de Green et de Gauss. Chasles et Steiner se rencontraient dans l'étude de l'attraction des ellipsoïdes et montraient ainsi une fois de plus que la Géométrie a sa place marquée dans les questions les plus hautes du calcul intégral.

Steiner ne dédaignait pas de s'occuper en même temps des parties élémentaires de la Géométrie. Ses recherches sur les contacts des cercles et des coniques, sur les problèmes isopérimétriques, sur les surfaces parallèles, sur le centre de gravité de courbure excitaient l'admiration de tous par leur simplicité et leur profondeur.

Chasles introduisait son principe de correspondance entre deux objets variables qui a donné naissance à tant d'applications; mais ici l'analyse reprenait sa place pour étudier le principe dans son essence, le préciser et le généraliser. Il en fut de même en ce qui concernait la fameuse théorie des *caractéristiques* et les nombreuses recherches de de Jonquières, de Chasles, de Cremona, d'autres encore, qui devaient fournir les bases d'une branche nouvelle de la Science, la *Géométrie énumérative*. Pendant plusieurs années, le célèbre postulat de Chasles fut admis sans aucune objection; une foule de géomètres crurent l'avoir établi d'une manière irréfutable. Mais, comme disait alors Zeuthen, il est bien difficile de reconnaître si, dans les démonstrations de ce genre, il ne subsiste pas toujours quelque point faible que leur auteur n'a point aperçu; et, en effet, Halphen, après des essais infructueux, venait couronner définitivement toutes ces recherches en indiquant nettement dans quels cas on peut admettre le postulat de Chasles et dans quels cas il faut le rejeter.

VIII.

Tels sont les principaux travaux qui ont remis en honneur la synthèse géométrique et lui ont assuré, au cours du siècle dernier, la place qui lui revient dans la recherche mathématique. De nombreux et illustres travailleurs ont pris part à ce grand mouvement géométrique, mais il faut reconnaître qu'il eut comme chefs et comme conducteurs Chasles et Steiner. Tel était l'éclat jeté par leurs merveilleuses découvertes qu'elles ont rejeté dans l'ombre, au moins d'une manière momentanée, les publications d'autres géomètres modestes, moins préoccupés peut-être de trouver des applications brillantes, propres à faire aimer la Géométrie, que de constituer cette science elle-même sur une base absolument solide. Leurs travaux ont reçu peut-être une récompense plus tardive, mais leur influence croît chaque jour; elle s'accroîtra sans doute encore. Les passer sous silence serait sans doute négliger un des principaux facteurs qui joueront leur rôle dans les recherches futures. C'est surtout à v. Staudt que nous faisons allusion en ce moment. Ses travaux géométriques ont été exposés dans deux Ouvrages de grand intérêt : la *Geometrie der Lage,* parue en 1847, et les *Beiträge zur Geometrie der Lage,* publiées en 1856, c'est-à-dire quatre ans après la Géométrie supérieure.

Chasles, nous l'avons vu, s'était préoccupé de constituer un corps de doctrine indépendant de l'analyse de Descartes et il n'y avait pas complètement réussi. Nous avons indiqué déjà un des reproches que l'on peut adresser à ce système : les éléments imaginaires n'y sont définis que par leurs fonctions symétriques, ce qui les exclut nécessairement d'une foule de recherches. D'autre part, l'emploi constant du rapport anharmonique, des transversales et de l'involution, qui exige des transformations analytiques fréquentes, donne à la *Géométrie supérieure* un caractère presque exclusivement métrique qui l'éloigne notablement des méthodes de Poncelet. Revenant à ces méthodes, v. Staudt s'attacha à constituer une géométrie affranchie de toute relation métrique et reposant exclusivement sur les rapports de situation. C'est dans cet esprit qu'a été conçu son premier Ouvrage, la *Géométrie der*

Lage de 1847. L'auteur y prend pour point de départ les propriétés harmoniques du quadrilatère complet et celles des triangles homologiques, démontrées uniquement par des considérations de géométrie à trois dimensions, analogues à celles dont a fait un si fréquent usage l'École de Monge.

Dans cette première partie de son œuvre, v. Staudt a négligé entièrement les éléments imaginaires. C'est seulement dans les *Beiträge,* son second Ouvrage, qu'il est parvenu, par une extension très originale de la méthode de Chasles, à définir géométriquement un élément imaginaire isolé et à le distinguer de son conjugué. Cette extension, bien que rigoureuse, est pénible et très abstraite. On peut la définir en substance comme il suit : deux points imaginaires conjugués peuvent toujours être considérés comme les points doubles d'une involution sur une droite réelle; et de même qu'on passe d'une imaginaire à sa conjuguée par le changement de i en $-i$, de même on distinguera les deux points imaginaires en faisant correspondre à chacun l'un des deux sens différents que l'on peut attribuer à la droite. Il y a là quelque chose d'un peu artificiel; le développement de la théorie élevée sur de telles bases est nécessairement compliqué. Par des méthodes purement projectives, v. Staudt établit toute une méthode de calcul des rapports anharmoniques des éléments imaginaires les plus généraux. Comme toute géométrie, la géométrie projective emploie la notion de l'ordre et l'ordre engendre le nombre; on ne saurait donc s'étonner que v. Staudt ait pu constituer sa méthode de calcul; mais il faut admirer l'ingéniosité qu'il a dû déployer pour y parvenir. Malgré les efforts des géomètres distingués qui ont essayé d'en simplifier l'exposition, nous craignons que cette partie de la géométrie de v. Staudt, pas plus que la géométrie d'ailleurs si intéressante du profond penseur Grassmann, ne puisse prévaloir contre les méthodes analytiques qui ont conquis aujourd'hui la faveur presque universelle. La vie est courte, les géomètres connaissent et pratiquent aussi le principe de la moindre action. Malgré ces craintes qui ne doivent décourager personne, il nous paraît que, sous la forme première qui lui a été donnée par v. Staudt, la géométrie projective doit devenir la compagne nécessaire de la géométrie descriptive, qu'elle est appelée à renouveler cette géométrie dans

son esprit, ses procédés et ses applications. C'est ce qui a déjà été compris dans plusieurs pays, et notamment en Italie où le grand géomètre Cremona n'avait pas dédaigné d'écrire, pour les écoles, un Traité élémentaire de Géométrie projective.

IX.

Dans les articles qui précèdent, nous avons essayé de suivre et de faire apparaître nettement les conséquences les plus lointaines des méthodes de Monge et de Poncelet. En créant les coordonnées tangentielles et les coordonnées homogènes, Plücker avait paru épuiser tout ce que pouvaient fournir à l'analyse la méthode des projections et celle des polaires réciproques. Il lui restait, vers la fin de sa vie, à revenir sur ses premières recherches pour leur donner une extension qui devait élargir dans des proportions inattendues le domaine de la Géométrie.

Précédée par des recherches innombrables sur les systèmes de lignes droites, dues à Poinsot, Möbius, Chasles, Dupin, Malus, Hamilton, Kummer, Transon, surtout à Cayley qui a introduit le premier la notion des coordonnées de la droite, recherches qui ont leur origine, soit dans la statique et la cinématique, soit dans l'optique géométrique, la géométrie de la ligne droite de Plücker sera toujours regardée comme la partie de son œuvre où l'on rencontre les idées les plus neuves et les plus intéressantes. Que Plücker ait constitué le premier une étude méthodique de la ligne droite, cela est déjà important, mais cela n'est rien à côté de ce qu'il a découvert. On dit quelquefois que le principe de dualité met en évidence ce fait que le plan, aussi bien que le point, peut être considéré comme un élément de l'espace. Cela est vrai; mais, en ajoutant la ligne droite comme élément possible de l'espace au plan et au point, Plücker a été conduit à reconnaître que n'importe quelle courbe, n'importe quelle surface peuvent aussi être considérées comme éléments de l'espace, et ainsi est née une Géométrie nouvelle qui a déjà inspiré un grand nombre de travaux, qui en suscitera plus encore à l'avenir. Une belle découverte dont nous parlerons plus loin a déjà rattaché la géométrie des sphères à celle des lignes droites et permis d'introduire la notion des coor-

données d'une sphère. La théorie des systèmes de cercles est déjà commencée ; elle se développera sans doute quand on voudra étudier la représentation, que nous devons à Laguerre, d'un point imaginaire dans l'espace par un cercle orienté.

Mais avant d'exposer le développement de ces idées nouvelles qui ont vivifié les méthodes infinitésimales de Monge, il faut que nous revenions en arrière pour reprendre l'histoire des branches de la Géométrie que nous avons négligées jusqu'à présent.

X.

Parmi les travaux de l'École de Monge, nous nous sommes bornés jusqu'ici à considérer ceux qui se rattachent à la Géométrie *finie ;* mais quelques-uns des disciples de Monge s'attachèrent surtout à développer les notions nouvelles de géométrie infinitésimale apportées par leur maître sur les courbes à double courbure, sur les lignes de courbure, sur la génération des surfaces, notions qui sont exposées au moins en partie dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*. Parmi eux, nous devons citer Lancret, auteur de beaux travaux sur les courbes gauches et surtout Charles Dupin, le seul peut-être qui ait suivi toutes les voies ouvertes par Monge.

Entre autres travaux, on doit à Dupin deux ouvrages que Monge n'aurait pas hésité à signer : les *Développements de Géométrie pure*, parus en 1813, et les *Applications de Géométrie et de Méchanique*, qui datent de 1822. C'est là qu'on trouve cette notion de l'*indicatrice* qui devait renouveler, après Euler et Meunier, toute la théorie de la courbure, celle des tangentes conjuguées, des lignes asymptotiques qui ont pris une place si importante dans les recherches récentes. Nous ne saurions oublier la détermination de la surface dont toutes les lignes de courbure sont des cercles, ni surtout le Mémoire sur les systèmes triples de surfaces orthogonales où se trouve, en même temps que la découverte du système triple formé de surfaces du second degré, le célèbre théorème auquel le nom de Dupin demeurera attaché.

Sous l'influence de ces travaux et de la renaissance des méthodes synthétiques, la géométrie des infiniment petits reprenait

dans toutes les recherches la place que Lagrange avait voulu lui arracher pour toujours. Chose singulière, les méthodes géométriques ainsi restaurées allaient recevoir la plus vive impulsion à la suite de la publication d'un Mémoire qui, au premier abord tout au moins, paraît se rattacher à la plus pure analyse; nous voulons parler de l'écrit célèbre de Gauss : *Disquisitiones generales circa superficies curvas* qui fut présenté en 1827 à la Société de Gœttingue et dont l'apparition marque, on peut le dire, une date décisive dans l'histoire de la Géométrie infinitésimale.

A partir de ce moment, la méthode infinitésimale prit en France un essor jusque-là inconnu. Frenet, Bertrand, Molins, J.-A. Serret, Bouquet, Puiseux, Ossian Bonnet, Paul Serret développèrent la théorie des courbes gauches. Liouville, Chasles, Minding se joignirent à eux pour poursuivre l'étude méthodique du Mémoire de Gauss. L'intégration faite par Jacobi de l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde suscita un grand nombre de recherches. En même temps, les problèmes étudiés dans l'*Application de l'Analyse* de Monge, furent largement développés. La détermination de toutes les surfaces ayant leurs lignes de courbure planes ou sphériques vint compléter, de la manière la plus heureuse, quelques-uns des résultats partiels déjà obtenus par Monge.

A ce moment, un géomètre des plus pénétrants, suivant le jugement de Jacobi, Gabriel Lamé, qui, comme Charles Sturm, avait commencé par la Géométrie pure et avait déjà apporté à cette science les contributions les plus intéressantes par un petit Ouvrage publié en 1817 et par des Mémoires insérés dans les *Annales* de Gergonne, utilisait les résultats obtenus par Dupin et Binet sur le système des surfaces homofocales du second degré et, s'élevant à la notion des coordonnées curvilignes de l'espace, il devenait le créateur de toute une théorie nouvelle destinée à recevoir dans la Physique mathématique les applications les plus variées.

XI.

Ici encore, dans cette branche infinitésimale de la Géométrie, on retrouve les deux tendances que nous avons signalées à propos

de la Géométrie des quantités finies. Les uns, au nombre desquels il faut placer J. Bertrand et O. Bonnet, veulent constituer une méthode autonome qui repose directement sur l'emploi des infiniment petits. Le grand *Traité de Calcul différentiel*, de Bertrand, contient plusieurs Chapitres sur la théorie des courbes et des surfaces qui sont, en quelque sorte, l'illustration de cette conception. Les autres suivent les voies analytiques usuelles en s'attachant seulement à bien reconnaître et à mettre en évidence les éléments qui doivent figurer au premier plan. Ainsi fait Lamé en introduisant sa théorie des *paramètres différentiels*. Ainsi fait Beltrami en étendant avec beaucoup d'ingéniosité l'emploi de ces invariants différentiels au cas de deux variables indépendantes, c'est-à-dire à l'étude des surfaces.

Il semble qu'aujourd'hui on se rallie à une méthode mixte dont l'origine se trouve dans les travaux de Ribaucour, sous le nom de *périmorphie*. On conserve les axes rectangulaires de la Géométrie analytique, mais en les rendant mobiles et en les rattachant de la manière qui paraît la plus commode au système que l'on veut étudier. Ainsi disparaissent la plupart des objections que l'on a adressées à la méthode des coordonnées. On réunit les avantages de ce que l'on appelle quelquefois la Géométrie *intrinsèque* à ceux qui résultent de l'emploi de l'analyse régulière. Cette analyse d'ailleurs n'est nullement abandonnée; les complications de calcul qu'elle entraîne presque toujours, dans ses applications à l'étude des surfaces et des coordonnées rectilignes, disparaissent le plus souvent si l'on emploie les notions sur les invariants et les covariants des forces quadratiques de différentielles que nous devons aux recherches de Lipschitz et de Christoffel, inspirées par les études de Riemann sur la Géométrie non euclidienne.

XII.

Les résultats de tant de travaux ne se sont pas fait attendre. La notion de la courbure géodésique que Gauss possédait déjà, mais sans l'avoir publiée, a été donnée par Bonnet et Liouville, la théorie des surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre, inaugurée en Allemagne par deux propositions qui

figureraient sans désavantage dans le Mémoire de Gauss, a été enrichie par Ribaucour, Halphen, S. Lie et par d'autres, d'une foule de propositions. Parmi ces propositions, les unes concernent ces surfaces envisagées d'une manière générale; d'autres s'appliquent aux cas particuliers où la relation entre les rayons de courbure prend une forme particulièrement simple : aux surfaces minima, par exemple, et aussi aux surfaces à courbure constante, positive ou négative.

Les surfaces minima ont été l'objet de travaux qui font de leur étude le chapitre le plus attrayant de la Géométrie infinitésimale. L'intégration de leur équation aux dérivées partielles constitue une des plus belles découvertes de Monge; mais, par suite de l'imperfection de la théorie des imaginaires, le grand géomètre n'avait pu tirer de ses formules aucun mode de génération de ces surfaces, ni même aucune surface particulière. Nous ne reviendrons pas ici sur l'historique détaillé que nous avons présenté dans nos *Leçons sur la théorie des surfaces;* mais il convient de rappeler les recherches fondamentales de Bonnet qui nous ont donné, en particulier, la notion des *surfaces associées à une surface donnée*, les formules de Weierstrass qui établissent un lien étroit entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe, les recherches de Lie par lesquelles il a été établi que les formules mêmes de Monge peuvent aujourd'hui servir de base à une étude fructueuse des surfaces minima. En cherchant à déterminer les surfaces minima de classes ou de degrés les plus petits, on a été conduit à la notion des surfaces minima doubles qui relève de l'*Analysis situs*.

Trois problèmes d'inégale importance ont été étudiés dans cette théorie.

Le premier, relatif à la détermination des surfaces minima inscrites suivant un contour donné à une développable également donnée, a été résolu par des formules célèbres qui ont conduit à un grand nombre de propositions. Par exemple, toute droite tracée sur une telle surface est un axe de symétrie.

Le second, posé par S. Lie, concerne la détermination de toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique, sans que la courbe de contact soit donnée. Il a été aussi entièrement élucidé.

Le troisième et le plus difficile est celui que les physiciens résolvent par l'expérience, en plongeant un contour fermé dans une solution de glycérine. Il concerne la détermination de la surface minima passant par un contour donné.

La solution de ce problème dépasse évidemment les ressources de la Géométrie. Grâce aux ressources de l'Analyse la plus haute, il a pu être résolu pour des contours particuliers dans le Mémoire célèbre de Riemann et dans les recherches profondes qui ont suivi ou accompagné ce Mémoire. Pour le contour le plus général, son étude a été brillamment commencée, elle sera continuée par nos successeurs.

Après les surfaces minima, les surfaces à courbure constante devaient attirer l'attention des géomètres. Une remarque ingénieuse de Bonnet rattache les unes aux autres les surfaces dont l'une ou l'autre des deux courbures, courbure moyenne ou courbure totale, est constante. Bour avait annoncé que l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante pouvait être complètement intégrée. Ce résultat n'a pu être retrouvé; il paraît même plus que douteux si l'on se reporte à une recherche où S. Lie a essayé en vain d'appliquer une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles à l'équation particulière des surfaces à courbure constante. Mais, s'il est impossible de déterminer en termes finis toutes ces surfaces, on a pu du moins en obtenir quelques-unes, caractérisées par des propriétés spéciales, telles que celle d'avoir leurs lignes de courbure planes ou sphériques; et l'on a montré, en employant une méthode qui réussit dans beaucoup d'autres problèmes, que l'on peut faire dériver de toute surface à courbure constante une infinité d'autres surfaces de même nature, par des opérations nettement définies qui n'exigent que des quadratures.

La théorie de la déformation des surfaces dans le sens de Gauss a été aussi beaucoup enrichie. On doit à Minding et à Bour l'étude détaillée de cette déformation spéciale des surfaces réglées qui laisse rectilignes les génératrices. Si l'on n'a pu, comme nous venons de le dire, déterminer les surfaces applicables sur la sphère, on s'est attaqué avec plus de succès à d'autres surfaces du second degré et, en particulier, au paraboloïde de révolution. L'étude systématique de la déformation des surfaces générales du second

degré est déjà entamée; elle est de celles qui donneront prochainement les résultats les plus importants.

La théorie de la déformation infiniment petite constitue aujourd'hui un des chapitres les plus achevés de la Géométrie. Elle est la première application un peu étendue d'une méthode générale qui paraît avoir beaucoup d'avenir.

Étant donné un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, propre à déterminer un certain nombre d'inconnues, il convient de lui associer un système d'équations que nous avons appelé *système auxiliaire* et qui détermine les systèmes de solutions infiniment voisins d'un système donné quelconque de solutions. Le système auxiliaire étant nécessairement linéaire, son emploi dans toutes les recherches fournit de précieuses lumières sur les propriétés du système proposé et sur la possibilité d'en obtenir l'intégration.

La théorie des lignes de courbure et des lignes asymptotiques a été notablement étendue. Non seulement on a pu déterminer ces deux séries de lignes pour des surfaces particulières telles que les surfaces tétraédrales de Lamé; mais aussi, en développant les résultats de Moutard relatifs à une classe particulière d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, on a pu généraliser tout ce qui avait été obtenu pour les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, en déterminant complètement toutes les classes de surfaces pour lesquelles on peut résoudre le problème de la *représentation sphérique*. On a résolu de même le problème corrélatif relatif aux lignes asymptotiques en faisant connaître toutes les surfaces dont on peut déterminer en termes finis la déformation infiniment petite. Il y a là un vaste champ de recherches dont l'exploration est à peine commencée.

L'étude infinitésimale des congruences rectilignes, déjà commencée depuis longtemps par Dupin, Bertrand, Hamilton, Kummer, est venue se mêler à toutes ces recherches. Ribaucour, qui y a pris une part prépondérante, a étudié des classes particulières de congruences rectilignes et, en particulier, les congruences dites *isotropes*, qui interviennent de la manière la plus heureuse dans l'étude des surfaces minima.

Les systèmes triples orthogonaux dont Lamé avait fait usage en Physique mathématique sont devenus l'objet de recherches systé-

matiques. Cayley le premier a formé l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont on avait fait dépendre la solution générale de ce problème. Le système des surfaces homofocales du second degré a été généralisé et a donné naissance à cette théorie des *cyclides* générales dans laquelle on peut employer à la fois les ressources de la Géométrie métrique, de la Géométrie projective et de la Géométrie infinitésimale. On a fait connaître beaucoup d'autres systèmes orthogonaux. Parmi eux il convient de signaler les systèmes *cycliques* de Ribaucour, pour lesquels une des trois familles admet des cercles pour trajectoires orthogonales, et les systèmes plus généraux pour lesquels ces trajectoires orthogonales sont simplement des courbes planes. L'emploi systématique des imaginaires, qu'il faut bien se garder d'exclure de la Géométrie, a permis de rattacher toutes ces déterminations à l'étude de la déformation finie d'une surface particulière.

Parmi les méthodes qui ont permis d'établir tous ces résultats, il convient de noter l'emploi systématique des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et des systèmes formés de telles équations. Les recherches les plus récentes montrent que cet emploi est appelé à renouveler la plupart des théories.

La Géométrie infinitésimale ne pouvait négliger l'étude des deux problèmes fondamentaux que lui posait le calcul des variations.

Le problème du plus court chemin sur une surface a été l'objet des magistrales études de Jacobi et d'Ossian Bonnet. On a poursuivi l'étude des lignes géodésiques, on a appris à les déterminer pour de nouvelles surfaces. La théorie des ensembles est venue permettre de suivre ces lignes dans leur cours sur une surface donnée. La solution d'un problème relatif à la représentation de deux surfaces l'une sur l'autre a beaucoup accru l'intérêt des découvertes de Jacobi et de Liouville relatives à une classe particulière de surfaces dont on sait déterminer les lignes géodésiques. Les résultats qui concernent ce cas particulier ont conduit à l'examen d'une question nouvelle : rechercher tous les problèmes de calcul des variations dont la solution est fournie par les courbes satisfaisant à une équation différentielle donnée.

Enfin, les méthodes de Jacobi ont été étendues à l'espace à trois dimensions et appliquées à la solution d'une question qui présen-

tait les plus grandes difficultés : l'étude des propriétés de minimum appartenant à la surface minima passant par un contour donné.

XIII.

Parmi les inventeurs qui ont contribué au développement de la Géométrie infinitésimale, Sophus Lie se distingue par plusieurs découvertes capitales qui le placent au premier rang. Il n'était pas de ceux qui laissent paraître dès l'enfance les aptitudes les plus caractérisées et, au moment de quitter l'Université de Christiania en 1865, il hésitait encore entre la Philologie et les Mathématiques. Ce sont les travaux de Plücker qui lui donnèrent pour la première fois pleine conscience de sa véritable vocation. Il publia en 1869 un premier travail sur l'interprétation des imaginaires en Géométrie et, dès 1870, il était en possession des idées directrices de toute sa carrière.

J'ai eu à cette époque le plaisir de le voir souvent, de l'entretenir à Paris, où il était venu avec son ami F. Klein. Un cours de M. Sylow suivi par Lie lui avait révélé toute l'importance de la théorie des substitutions; les deux amis étudiaient cette théorie dans le grand Traité de C. Jordan; ils avaient pleine conscience du rôle important qu'elle était appelée à jouer dans tant de branches des Sciences mathématiques où elle n'avait pas encore été appliquée. Ils ont eu l'un et l'autre la bonne fortune de contribuer par leurs travaux à imprimer aux études mathématiques la direction qui leur avait paru la meilleure.

Dès 1870, Sophus Lie présentait à l'Académie des Sciences de Paris une découverte extrêmement intéressante. Rien ne ressemble moins à une sphère qu'une ligne droite, et cependant Lie avait imaginé une transformation singulière qui faisait correspondre une sphère à une droite et permettait, par suite, de rattacher toute proposition relative à des droites à une proposition relative à des sphères et *vice versa*. Dans cette méthode si curieuse de transformation, chaque propriété relative aux lignes de courbure d'une surface fournit une proposition relative aux lignes asymptotiques de la surface transformée. Le nom de Lie demeurera attaché à ces relations si cachées qui rattachent l'une à l'autre la ligne droite

et la sphère, ces deux éléments essentiels et fondamentaux de la recherche géométrique. Il les a développées dans un Mémoire rempli d'idées neuves qui a paru en 1872.

Les travaux qui suivirent ce brillant début de Lie confirmèrent pleinement les espérances qu'il avait fait naître. La conception de Plücker relative à la génération de l'espace par des lignes droites, par des courbes ou des surfaces arbitrairement choisies, ouvre à la théorie des formes algébriques un champ qui n'a pas encore été exploré, que Clebsch a commencé à peine à reconnaître et à délimiter. Mais, du côté de la Géométrie infinitésimale, cette conception a été mise en pleine valeur par Sophus Lie. Le grand géomètre norvégien a su d'abord y trouver la notion des congruences et des complexes de courbes, et ensuite celle des *transformations de contact* dont il avait trouvé, pour le cas du plan, le premier germe dans Plücker. L'étude de ces transformations l'a conduit à perfectionner, en même temps que M. Mayer, les méthodes d'intégration que Jacobi avait instituées pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre; mais surtout elle jette la lumière la plus éclatante sur les parties les plus difficiles et les plus obscures des théories relatives aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Elle a permis à Lie, en particulier, d'indiquer tous les cas dans lesquels la méthode des caractéristiques de Monge est pleinement applicable aux équations du second ordre à deux variables indépendantes.

En continuant l'étude de ces transformations spéciales, Lie fut conduit à construire progressivement sa magistrale théorie des groupes continus de transformations et à mettre en évidence le rôle si important que la notion de groupe joue en Géométrie. Parmi les éléments essentiels de ses recherches, il convient de signaler les transformations infinitésimales dont l'idée lui appartient exclusivement.

Trois grands Ouvrages publiés sous sa direction par d'habiles et dévoués collaborateurs contiennent l'essentiel de ses travaux et leurs applications à la théorie de l'intégration, à celle des unités complexes et à la Géométrie non euclidienne.

XIV.

Me voici arrivé par une voie indirecte à cette Géométrie non euclidienne dont l'étude prend dans les recherches des géomètres une place qui grandit chaque jour. Si j'étais seul à vous entretenir de Géométrie, je prendrais plaisir à vous rappeler tout ce qui a été fait sur ce sujet depuis Euclide, ou du moins depuis Legendre, jusqu'à nos jours. Envisagée successivement par les plus grands géomètres du dernier siècle, la question s'est progressivement élargie. C'est par le célèbre *postulatum* relatif aux parallèles que l'on a commencé; c'est par l'ensemble des axiomes géométriques que l'on finit.

Les *Éléments* d'Euclide, qui ont résisté au travail de tant de siècles, auront du moins l'honneur de provoquer, avant de finir, une longue suite de travaux admirablement enchaînés qui contribueront, de la manière la plus efficace, au progrès des Mathématiques, en même temps qu'ils fourniront aux philosophes les points de départ les plus précis et les plus solides pour l'étude de l'origine et de la formation de nos connaissances. Je suis assuré d'avance que mon distingué collaborateur n'oubliera pas, parmi les problèmes du temps présent, celui-ci, qui est le plus important peut-être, et dont il s'est occupé avec tant de succès; et je lui laisse le soin de le développer avec toute l'ampleur qu'il mérite assurément.

Je viens de parler des éléments de la Géométrie. Ils ont reçu depuis cent ans des accroissements qu'il convient de ne pas oublier. La théorie des polyèdres s'est enrichie des belles découvertes de Poinsot sur les polyèdres étoilés et de celles de Möbius sur les polyèdres à une seule face. Les méthodes de transformation ont élargi l'exposition. On peut dire aujourd'hui que le premier Livre contient la théorie de la translation et de la symétrie, que le deuxième équivaut à la théorie de la rotation et du déplacement, que le troisième repose sur l'homothétie et l'inversion.

Mais il faut bien reconnaître que c'est grâce à l'Analyse que les *Éléments* se sont enrichis de leurs plus belles propositions. C'est à l'Analyse la plus haute que nous devons l'inscription des polygones réguliers de 17 côtés et des polygones analogues. C'est à

elle que nous devons les démonstrations si longtemps cherchées de l'impossibilité de la quadrature du cercle, de l'impossibilité de certaines constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas. C'est à elle enfin que nous devons les premières démonstrations rigoureuses des propriétés de maximum et de minimum de la sphère. Il appartiendra à la Géométrie d'intervenir sur ce terrain où l'Analyse l'a précédée.

Que seront les éléments de la Géométrie au cours du siècle qui vient de commencer? Y aura-t-il un seul Livre élémentaire de Géométrie? C'est peut-être l'Amérique, avec ses écoles affranchies de tout programme et de toute tradition, qui nous donnera les meilleures solutions de cette importante et difficile question. On a quelquefois appelé v. Staudt, l'*Euclide du* XIXe *siècle;* je préférerais l'appeler l'*Euclide de la Géométrie projective;* mais cette Géométrie, quelque intéressante qu'elle puisse être, est-elle appelée à fournir la base unique des futurs éléments?

XV.

Le moment est venu de clore ce trop long exposé et cependant il y a une foule de recherches intéressantes que j'ai été pour ainsi dire contraint de négliger. J'aurais aimé à vous entretenir de ces Géométries à un nombre quelconque de dimensions dont la notion remonte aux premiers temps de l'Algèbre, mais dont l'étude systématique n'a été commencée que depuis 60 ans par Cayley et par Cauchy. Ce genre de recherches a trouvé faveur dans votre pays, et je n'ai pas besoin de rappeler que notre illustre président, après s'être montré le digne continuateur de Laplace et de Le Verrier, dans un espace qu'il considère avec nous comme étant doué de 3 dimensions, n'a pas dédaigné de publier, dans l'*American Journal,* des considérations d'un vif intérêt sur les géométries à n dimensions. Une seule objection pouvait être faite aux études de ce genre et avait déjà été formulée par Poisson : l'absence de toute base réelle, de tout *substratum* permettant de présenter, sous des aspects visibles et en quelque sorte palpables, les résultats obtenus. L'extension des méthodes de la Géométrie descriptive, et surtout l'emploi des conceptions de Plücker sur la génération

de l'espace, contribueront à enlever à cette objection beaucoup de sa valeur.

J'aurais voulu vous parler aussi de la méthode des équipollences, dont nous trouvons le germe dans les œuvres posthumes de Gauss, des quaternions d'Hamilton, des méthodes de Grassmann et en général des systèmes d'unités complexes, de l'*Analysis situs,* si intimement reliée à la théorie des fonctions, de la Géométrie dite *cinématique*, de la théorie des abaques, de la Géométrographie, des applications de la Géométrie à la Philosophie naturelle ou aux Arts. Mais je craindrais, si je m'étendais outre mesure, que quelque analyste, comme il y en a eu autrefois, n'accusât la Géométrie de vouloir tout accaparer.

Mon admiration pour l'Analyse, devenue si féconde et si puissante à notre époque, ne me permettrait pas de concevoir une telle pensée. Mais, si quelque reproche de ce genre pouvait être aujourd'hui formulé, ce n'est pas à la Géométrie, c'est à l'Analyse qu'il conviendrait, je crois, de l'adresser. Le cercle dans lequel paraissaient renfermées les études mathématiques au commencement du XIXe siècle a été brisé de tous côtés. Les problèmes anciens se présentent à nous sous une forme renouvelée, des problèmes nouveaux se posent, dont l'étude occupe des légions de travailleurs. Le nombre de ceux qui cultivent la Géométrie pure est devenu prodigieusement restreint. Il y a là un danger contre lequel il importe de se prémunir. N'oublions pas que, si l'Analyse a acquis des moyens d'investigation qui lui faisaient défaut autrefois, elle les doit en grande partie aux conceptions introduites par les Géomètres. Il ne faut pas que la Géométrie demeure en quelque sorte ensevelie dans son triomphe. C'est à son école que nous avons appris, que nos successeurs auront à apprendre, à ne jamais se fier aveuglément aux méthodes trop générales, à envisager les questions en elles-mêmes et à trouver, dans les conditions particulières à chaque problème, soit un chemin direct vers une solution facile, soit le moyen d'appliquer d'une manière appropriée les procédés généraux que toute science doit rassembler. Ainsi que le dit Chasles au commencement de l'*Aperçu historique* : « Les doctrines de la pure Géométrie offrent souvent, et dans une foule de questions, cette voie simple et naturelle qui, pénétrant jusqu'à l'origine des vérités, met à nu la chaîne mystérieuse qui les unit

entre elles et les fait connaître individuellement de la manière la plus lumineuse et la plus complète. »

Cultivons donc la Géométrie, qui a ses avantages propres, sans vouloir, sur tous les points, l'égaler à sa rivale. Au reste, si nous étions tentés de la négliger, elle ne tarderait pas à trouver dans les applications des Mathématiques, comme elle l'a déjà fait une première fois, les moyens de renaître et de se développer de nouveau. Elle est comme le géant Antée qui reprenait ses forces en touchant la terre.



BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Nasmyth (J.) and Carpenter (J.). — *The Moon considered as a planet, a world, and a satellite.* In-8°, 336 p. avec 26 pl. et nombreux diagrammes. London, Murray. 5 sh.

Tannery (J. et P.). — *Notions de Mathématiques.* Suivies de *Notions historiques.* In-8°, x-352 p. avec fig. Paris, Delagrave.

Maggi (G.-Ant.). — *Principi di stereodinamica.* In-8°. Milano, Hoepli. 7 l. 50 c.

Delsol (E.). — *Principes de Géométrie.* Petit in-8°, 98 p. avec fig. Paris, Naud.

Enriques (Federigo). — *Vorlesungen über projective Geometrie.* Deutsche Ausg. von Herm. Fleischer. Avec Introduction de Fel. Klein. Gr. in-8°, xiv-374 p. avec 187 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.; relié, 9 m.

Fuhrmann (Arwed). — *Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik.* In 6 Tln. 4. Tl : *Bauwissenschaftl. Anwendungen der Integralrechnung.* Gr. in-8°, xiii-272 p. avec fig. Berlin, Ernst und Sohn. 9 m.; relié 10 m.

Henrici (O.) and Turner (G.-C.). — *Vectors and Rotors, with applications.* In-8°, 220 p. London, Arnold. 3 sh. 6 d.

Koll (Otto). — *Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine.* Gr. in-8°, iv-81 p. avec fig. Halle, Strien. Relié 5 m.

Kommerell (V.) et Kommerell (K.). — *Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen.* 2. Bd. (Sammlung Schubert, xliv). In-8°, iv-212 p. avec 18 fig. Leipzig, Göschen. 5 m. 80 pf.

Loewy (M.) et Puiseux (P.). — *Atlas photographique de la Lune*, publié par l'Observatoire de Paris. 7e fasc. In-4°, 48 p. Paris, Impr. nationale.

Plunket (Hon. Emmeline-M.). — *Ancient calendars and constellations.* Avec figures. Gr. in-8°, 272 p. London, Murray.

Schubert (Herm.). — *Niedere Analysis.* 2. Tl. In-8°, v-215 p. avec 3 fig. Leipzig, Göschen. (Sammlung Schubert, xlv). 3 m. 80 pf.

Souillagouet (F.). — *Tables du point auxiliaire. Complément des Tables (Table de point; logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques).* In-8°, ix-73 p. Toulouse, impr. Douladoure-Privat.

Stebbing (F.-C.). — *Navigation and nautical Astronomy.* In-8°, 352 p. London, Macmillan. 8 sh. 6 d.

Tropfke (Johs.). — *Geschichte der elementar Mathematik in systemat. Darstellg.* 2. Bd. Gr. in-8°, viii-496 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 12 m.; relié 13 m.

Weber (Heinr.) et Wellstein (Jos.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik.* 1. Bd. *Elementare Algebra u. Analysis.* Bearb. v. Heinr. Weber. Gr. in-8°, xiv-447 p. avec fig. Leipzig, Teubner. Relié 8 m.

Alexejeff (W.-G.). — *Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosoph. Weltanschauung.* Gr. in-8°, 48 p. Berlin, Mayer et Muller. 1 m. 20 pf.

Brédikhine (Th.). — *Études sur l'origine des météores cosmiques et la formation de leurs courants.* In-4°, 364 p. avec 6 planches. Saint-Pétersbourg. (Leipzig, Voss' Sortiment.) 4 m. 80 pf.

Castelnuovo (G.). — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva.* Vol. I. In-8°. Milano, Soc. editr. Dante Alighieri. 12 l.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SYLVESTER. — THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS OF JAMES-JOSEPH SYLVESTER. Volume I (1837-1853), in-4°, XII-650 pages. Cambridge, at the University Press, 1904.

C'est avec une véritable satisfaction que nous enregistrons la publication du premier Volume des Œuvres de Sylvester. Ce grand et puissant esprit, dont le nom demeurera associé à ceux de Cayley et d'Hermite dans l'histoire de la théorie des formes algébriques, était doué au plus haut degré des dons les plus précieux : l'originalité et l'invention. Très apprécié dans notre pays, où il comptait pour amis tous les mathématiciens français, il a successivement professé à Londres, à Woolwich, à Baltimore et à Oxford. Partout, en Angleterre et en Amérique, il a formé des élèves, suscité des recherches et montré autant d'ingéniosité dans le choix des problèmes qu'il savait se poser que dans leur étude et leur solution. Il importait que la génération nouvelle des jeunes géomètres fût mise en contact avec des travaux dont la forme laisse quelquefois à désirer, mais où elle rencontrera aujourd'hui encore une foule de vues originales et fécondes.

L'éditeur de cette nouvelle et intéressante publication, M. H.-F. Baker, s'efface modestement devant celui dont il publie les Œuvres. Nous ne le connaissons que par le nom qu'il a mis au bas d'une Préface très courte, où il indique de la manière la plus succincte le plan qu'il a adopté et les principaux sujets contenus dans les soixante-huit premiers Mémoires de Sylvester, qui s'étendent de 1837 à 1853. C'est dans ces Mémoires que se trouvent les premiers et les plus importants travaux de Sylvester relativement à la méthode d'élimination qu'il a appelé *dialytique*. Le lecteur retrouvera également les beaux résultats sur les relations *syzygétiques* entre deux fonctions rationnelles, qui ont si notablement accru l'importance et l'intérêt du célèbre théorème de Sturm relatif aux racines réelles des équations. Mentionnons

encore les essais sur les formes canoniques et les premières recherches sur la théorie des invariants; les études sur la transformation des formes quadratiques où se trouve démontrée la célèbre *loi d'inertie*, les théorèmes généraux sur les déterminants dont le grand géomètre a fait des applications si intéressantes à la Géométrie. Il faudrait tout citer.

On a beaucoup reproché à Sylvester la profusion de termes nouveaux qu'il tendait à introduire dans l'Algèbre. Il était loin de passer condamnation sur ce point, car il a écrit en 1887 :

Perhaps I may without immodesty lay claim to the appellation of the Mathematical Adam, as I believe that I have given more names of the creatures of the mathematical reason than all the other mathematicians of the age combined.

Mais il avait éprouvé le besoin de composer un petit dictionnaire à l'usage de ses lecteurs. On trouvera ce glossaire à la page 580 du Volume actuellement publié. Même fortune n'est pas échue à toutes les dénominations nouvelles employées par le grand géomètre. *Covariant, déterminant, discriminant, hessian, inertia, jacobian, matrix,* ont triomphé. Mais qui emploie aujourd'hui *allotrious, bezoutod, cumulant, apocopated, effluent, endoscopic, kenotheme, syrrhizoristic, umbral,* et quelques autres mots dont la définition même échappe entièrement à la plupart. Les mots passent souvent, mais les idées restent et elles produisent leur effet. G. D.

BRIOSCHI (FRANCESCO). — OPERE MATEMATICHE PUBBLICATE PER CURA DEL COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI (*G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparalli*). Tomo secondo, in-4°, VIII-456 pages, 1902. Tomo terzo, in-4°, X-435 pages, 1904. Milan, U. Hoepli.

La publication des Œuvres de Francesco Brioschi, dont nous avons, dès le début, rendu compte à nos lecteurs, se poursuit avec une grande régularité par les soins du Comité qui s'est chargé

d'honorer la mémoire du grand géomètre italien. Le Tome II a déjà paru depuis deux ans. Le Tome III, que nous venons de recevoir, a été publié cette année même. Ce sont toujours les mêmes géomètres qui se chargent de la préparation de l'édition et de la revision des différents textes : MM. Gerbaldi de Palerme, Pascal de Pavie, Loria de Gènes, Bianchi de Pise; Cerruti, Pittarelli, Reina, Tonelli de Rome; Capelli de Naples. Grâce à leurs soins éclairés et à ceux de l'éditeur, la publication ne laissera rien à désirer et le Comité aura atteint le double but qu'il devait ambitionner : élever au regretté Brioschi un monument digne de lui, et rendre aux études mathématiques en Italie, et dans tous les pays, le service le plus signalé. G. D.

MÉLANGES.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ET SES RAPPORTS AVEC QUELQUES AUTRES SCIENCES;

CONFÉRENCE FAITE AU CONGRÈS DES ARTS ET SCIENCES DE SAINT-LOUIS (1904) (1).

PAR M. ÉMILE PICARD

C'est un des objets d'un Congrès, comme celui qui nous réunit en ce moment, que de montrer les liens entre les diverses parties de la Science, prise dans son acception la plus étendue. Aussi les organisateurs de cette réunion ont-ils tenu à ce que les rapports

(1) Cette conférence a été faite au Congrès des Arts et Sciences de l'Exposition universelle de Saint-Louis (États-Unis), le 25 septembre 1904.

entre différentes sections fussent mis en évidence. Pour entreprendre une étude de ce genre, dont le caractère reste quelque peu indéterminé, il faut oublier que tout est dans tout; en ce qui concerne l'Algèbre et l'Analyse, un pythagoricien serait effrayé de l'étendue de sa tâche, en pensant à la célèbre formule de l'École : « Les choses sont nombres ». De ce point de vue, mon sujet serait inépuisable. Mais je n'aurai pas, et pour cause, tant de prétentions. En jetant seulement un coup d'œil sur le développement de notre Science à travers les âges et particulièrement au siècle dernier, j'espère pouvoir caractériser suffisamment le rôle de l'Analyse mathématique dans ses rapports avec quelques autres sciences.

I.

Il paraîtrait naturel de commencer par parler du concept même de nombre entier; mais ce sujet n'est pas seulement d'ordre logique, il est aussi d'ordre historique et psychologique et nous entraînerait à trop de discussions. Depuis que le concept de nombre a été approfondi, on y a trouvé d'insondables profondeurs; ainsi, c'est un problème encore pendant que de savoir, entre les deux formes le nombre cardinal et le nombre ordinal, sous lesquelles se présente l'idée de nombre, laquelle des deux est antérieure à l'autre, c'est-à-dire si l'idée de nombre proprement dit est antérieure à celle de rang, ou si c'est l'inverse. Il semble que les géomètres logiciens négligent trop dans ces questions la Psychologie et les enseignements que nous donnent les peuples non civilisés. Peut-être n'y a-t-il pas de réponse générale à la question posée, cette réponse variant suivant les races et suivant les mentalités. J'ai quelquefois pensé, à ce sujet, à la distinction entre les auditifs et les visuels, les auditifs se rattachant à la théorie ordinale et les visuels à la théorie cardinale. Mais je ne m'attarde pas sur ce terrain plein d'embûches. Je crains que notre école moderne de logiciens s'entende difficilement avec les ethnographes et les biologistes; ceux-ci, dans les questions d'origine, sont toujours dominés par la thèse évolutionniste, et, pour plus d'un parmi eux, la logique n'est que le résumé de l'expérience

ancestrale. On a même reproché aux mathématiciens de poser en principe qu'il y a un esprit humain en quelque sorte extérieur aux choses et qu'il a sa logique. Quoi qu'on en puisse penser, cette idée a été très utile, sinon indispensable, aux progrès des Sciences mathématiques, et, certainement, à supposer qu'elle ait évolué dans la suite des temps préhistoriques, cette logique de l'esprit humain était bien fixée du temps des plus vieilles écoles géométriques de la Grèce; leurs travaux paraissent en avoir été le premier code, comme l'exprime l'histoire de Platon écrivant sur la porte de son école : « Que personne n'entre ici, s'il n'est géomètre ».

Longtemps avant que l'on eût tiré de l'arabe le mot bizarre d'*Algèbre*, qui, paraît-il, exprime l'opération par laquelle on ramenait les égalités à une certaine forme canonique, les Grecs avaient fait de l'algèbre sans le savoir; on ne peut même imaginer de relations plus étroites que celles qui liaient leur algèbre et leur géométrie, ou plutôt, on serait embarrassé de classer, s'il y avait lieu, leur algèbre géométrique, dans laquelle ils raisonnent, non sur les nombres, mais sur les grandeurs. Chez les Grecs aussi, nous trouvons une arithmétique géométrique, et une des phases les plus intéressantes de son développement est le conflit qui, chez les Pythagoriciens, s'éleva à ce sujet, entre le nombre et la grandeur, à propos des irrationnelles. Si les Grecs cultivèrent l'étude abstraite des nombres, dénommée par eux *Arithmétique*, leur esprit spéculatif montra peu de goût pour le calcul pratique, qu'ils appelaient la *Logistique*. Dans la haute antiquité, les Égyptiens et les Chaldéens, et plus tard les Indiens et les Arabes, poussèrent fort loin la science du calcul. Ils y avaient été conduits par les nécessités pratiques; la Logistique a précédé l'Arithmétique, comme l'Arpentage et la Géodésie ont ouvert la voie à la Géométrie; de même encore la Trigonométrie s'est développée sous l'influence des besoins croissants de l'Astronomie. L'histoire de la Science à ses débuts montre une relation étroite entre les Mathématiques pures et les Mathématiques appliquées; nous la retrouverons constamment dans cette étude.

Nous sommes restés jusqu'ici dans le domaine que le langage courant appelle *l'algèbre et l'arithmétique élémentaires*. En fait, dès qu'avait été reconnue l'incommensurabilité de certaines

grandeurs, l'infini avait fait son apparition et, dès le temps des sophismes de Zénon sur l'impossibilité du mouvement, on dut se préoccuper de la sommation des progressions géométriques. Les procédés d'exhaustion que l'on trouve dans Eudoxe et dans Euclide appartiennent déjà au calcul intégral, et Archimède calcule des intégrales définies. La Mécanique apparaît aussi dans son traité sur la quadrature de la parabole, car il trouve d'abord la surface du segment limité par un arc de parabole et sa corde en s'appuyant sur le théorème des moments; c'est le premier exemple des rapports entre la Mécanique et l'Analyse qui n'ont cessé de se développer par la suite. La méthode infinitésimale des géomètres grecs sur la mesure des volumes a soulevé des questions dont l'intérêt aujourd'hui même n'est pas épuisé. En géométrie plane, deux polygones équivalents sont égaux par addition ou par soustraction, c'est-à-dire peuvent être décomposés en triangles égaux ou regardés comme des différences de polygones susceptibles d'une telle décomposition. Il n'en est pas de même pour la géométrie de l'espace, et l'on sait depuis peu que la Stéréométrie ne peut pas, comme la Planimétrie, être faite sans recourir à des procédés d'exhaustion ou de limite, qui exigent l'axiome de continuité ou axiome d'Archimède. Sans insister davantage, ce coup d'œil jeté sur l'antiquité montre combien furent alors amalgamés l'Algèbre, l'Arithmétique, la Géométrie et les premiers essais de Calcul intégral et de Mécanique, au point qu'il est impossible d'en rappeler séparément l'histoire.

Au Moyen Age et à la Renaissance, l'Algèbre géométrique des anciens se sépare de la Géométrie. Peu à peu, l'Algèbre proprement dite arrive à l'autonomie, avec son symbolisme et ses notations de plus en plus perfectionnées; ainsi se crée cette langue d'une admirable clarté, qui procura à la pensée une véritable économie et rendit possibles les progrès ultérieurs. C'est le moment aussi où des divisions distinctes s'organisent. La Trigonométrie qui, dans l'antiquité, n'avait été qu'une auxiliaire de l'Astronomie, se développe indépendamment; vers le même temps apparaît le logarithme et des éléments essentiels sont ainsi mis en évidence.

II.

Au XVIIe siècle, la géométrie analytique de Descartes, distincte de ce que j'appelais tout à l'heure *l'algèbre géométrique des Grecs* par les idées générales et systématiques qui sont à sa base, et la Dynamique naissante furent l'origine des plus grands progrès de l'Analyse. Quand Galilée, partant de l'hypothèse que la vitesse des corps pesants dans leur chute est proportionnelle au temps, en déduit la loi des espaces parcourus, pour la vérifier ensuite par l'expérience, il reprend la voie où s'était jadis engagé Archimède, et qu'allaient suivre après lui Cavalieri, Fermat et d'autres encore jusqu'à Newton et Leibniz. Le calcul intégral des géomètres grecs renaît dans la cinématique du grand physicien de Florence. Quant au calcul des dérivées ou des différentielles, il fut posé avec précision à propos du tracé des tangentes. En réalité, l'origine de la notion de dérivée est dans le sentiment confus de la mobilité des choses et de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle les phénomènes s'accomplissent; c'est ce qu'expriment bien les dénominations de *fluentes* et de *fluxions*, dont se servait Newton, et qu'on croirait empruntées à l'antique Héraclite.

Les points de vue auxquels se placèrent les fondateurs de la science du mouvement, Galilée, Huyghens et Newton, eurent une influence énorme sur l'orientation de l'Analyse mathématique. Ce fut chez Galilée une intuition géniale de discerner que, dans les phénomènes naturels, les circonstances déterminantes du mouvement produisent des accélérations; elle devait conduire à poser le principe que la rapidité, avec laquelle change l'état dynamique d'un système, dépend d'une manière déterminée de son état statique seul. D'une manière plus générale, il fut postulé que les changements infiniment petits, de quelque nature qu'ils soient, qui surviennent dans un système de corps, dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci. Dans quelle mesure les exceptions sont-elles apparentes ou réelles? c'est une question qui ne fut soulevée que plus tard et que j'écarte pour le moment. Des principes énoncés se dégage un point capital pour l'analyste : les phénomènes sont régis par des équations différentielles, équations que l'on peut

former quand l'observation et l'expérience ont fait connaître pour chaque catégorie de phénomènes certaines lois physiques. On comprend les espérances illimitées que durent faire concevoir ces résultats. Comme le dit Bertrand dans la préface de son Traité, « les premiers succès furent d'abord tels que l'on put supposer toutes les difficultés de la Science surmontées à l'avance, et croire que les géomètres, sans être distraits plus longtemps par l'élaboration des Mathématiques pures, pourraient tourner exclusivement leurs méditations vers l'étude des lois naturelles ». C'était admettre gratuitement que les problèmes d'Analyse, auxquels on était ramené, ne présenteraient pas de très graves difficultés. Mais, malgré les désillusions que devait apporter l'avenir, il restait ce point capital que les problèmes avaient pris une forme précise, et qu'une classification pouvait s'établir dans les difficultés à surmonter. Il y eut donc un progrès immense, un des plus grands qu'ait jamais faits l'esprit humain. Nous nous rendons compte aussi pourquoi la théorie des équations différentielles allait acquérir une importance considérable.

J'ai devancé quelque peu les temps, en présentant les choses sous une forme aussi analytique. La Géométrie fut mêlée à tous ces progrès. Huyghens, par exemple, suivit toujours de préférence les anciens, et son *Horologium oscillatorium* roule à la fois sur la Géométrie infinitésimale et sur la Mécanique ; de même, dans le livre des *Principes* de Newton, les méthodes suivies sont synthétiques. C'est surtout avec Leibniz que la Science s'engage dans les voies qui devaient conduire à ce que nous appelons l'*Analyse mathématique ;* c'est lui qui, pour la première fois, dans les dernières années du XVIIe siècle, prononce le mot de *fonction*. Par son esprit systématique, par les nombreux problèmes qu'il traita ainsi que ses disciples, Jacques et Jean Bernoulli, il montra d'une manière définitive la puissance des doctrines à l'édification desquelles avaient successivement contribué une longue suite de penseurs depuis les temps lointains d'Eudoxe et d'Archimède.

Le XVIIIe siècle montra l'extrême fécondité des nouvelles méthodes. Ce fut un temps curieux que celui de ces duels mathématiques, où les géomètres se lançaient des défis, luttes qui n'étaient pas toujours sans aigreurs, quand Leibniziens et Newtoniens se rencontraient dans la lice. Au point de vue purement analytique,

la classification et l'étude des fonctions simples est particulièrement intéressante; l'idée de fonction, sur laquelle repose l'Analyse, se développe ainsi peu à peu. Les Ouvrages célèbres d'Euler tiennent alors une place considérable. Toutefois, les nombreux problèmes qui se posent devant les mathématiciens ne leur laissent guère le temps de scruter les principes; les bases mêmes de la doctrine s'élucident lentement, et le mot attribué à d'Alembert « allez en avant, et la foi vous viendra » est bien caractéristique de cette époque. De tous les problèmes soulevés à la fin du XVIIe siècle ou pendant la première moitié du XVIIIe, il me suffira de rappeler ces problèmes d'isopérimètres qui allaient donner naissance au calcul des variations. J'aime mieux insister sur la pénétration plus intime encore entre l'Analyse et la Mécanique, lorsque, après la période d'induction du premier âge de la dynamique, on en arriva à la période déductive où l'on s'efforça de donner aux principes une forme définitive. Le développement mathématique et formel joua alors le rôle essentiel, et le langage analytique fut indispensable à la plus grande extension de ces principes. Il y a des moments dans l'histoire des Sciences, et peut-être des sociétés, où l'esprit est soutenu et porté en avant par les mots et les symboles qu'il a créés, et où les généralisations se présentent avec le moindre effort. Tel fut particulièrement le rôle de l'Analyse dans le développement formel de la Mécanique. Qu'on me permette ici une remarque. On répète souvent qu'il n'y a, dans une équation, que ce qu'on y a mis. Il est facile de répondre d'abord que la forme nouvelle sous laquelle on retrouve les choses constitue souvent à elle seule une importante découverte. Mais il y a quelquefois plus; l'analyse, par le simple jeu de ses symboles, peut suggérer des généralisations dépassant de beaucoup le cadre primitif. N'en est-il pas ainsi avec le principe des vitesses virtuelles dont l'idée première vint des mécanismes les plus simples? La forme analytique, qui le traduisait, suggéra des extensions qui menèrent loin du point de départ. En un sens même, il n'est pas juste de dire que l'Analyse n'a rien créé, puisque ces conceptions plus générales sont son œuvre. Un autre exemple nous est encore fourni par le système des équations de Lagrange; ici, des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles auxquelles on tend à ramener aujourd'hui la notion

d'explication mécanique. Il y a, dans la Science, peu d'exemples comparables à celui-là, de l'importance de la forme d'une relation analytique et de la puissance de généralisation dont elle peut être capable. Il est bien clair que, dans chaque cas, les généralisations suggérées doivent être précisées par un appel à l'observation et à l'expérience; ensuite, c'est encore le calcul qui cherchera les conséquences lointaines à soumettre aux mêmes contrôles, mais c'est un ordre d'idées que je n'ai pas à aborder ici.

Sous l'impulsion des problèmes que posent la Géométrie, la Mécanique et la Physique, nous voyons se développer ou prendre naissance presque toutes les grandes divisions de l'Analyse. On avait d'abord rencontré des équations à une seule variable indépendante. Bientôt les équations aux dérivées partielles apparaissent avec les cordes vibrantes, la Mécanique des fluides et la Géométrie infinitésimale des surfaces. C'était tout un monde analytique nouveau; l'origine même des problèmes traités fut un secours qui permit de ne pas s'égarer dès les premiers pas et, entre les mains de Monge, la Géométrie rendit d'utiles services aux théories naissantes. Mais, de toutes les applications de l'Analyse, aucune alors n'eut plus d'éclat que les problèmes de Mécanique céleste posés par la connaissance des lois de la gravitation et auxquels attachèrent leurs noms les plus grands géomètres. La théorie n'eut jamais de plus beau triomphe; peut-être même pourrait-on ajouter qu'il fut trop complet, car c'est à ce moment surtout que l'on conçut pour la Philosophie naturelle les espérances au moins prématurées dont je parlais plus haut. Dans toute cette période, surtout dans la seconde moitié du XVIIIe siècle, ce qui nous frappe d'admiration et nous procure aussi quelque confusion, c'est l'extrême importance des applications réalisées, alors que la théorie pure paraît encore si mal assurée. On le voit, quand certaines questions sont soulevées, comme le degré d'arbitraire dans l'intégrale des cordes vibrantes, qui donne lieu à une interminable et peu concluante discussion. Lagrange sentait ces insuffisances, quand il publiait sa théorie des fonctions analytiques, où il s'efforce de donner une base précise à l'Analyse. On ne saurait trop admirer le merveilleux pressentiment qu'il eut du rôle que devaient jouer les fonctions que nous appelons, comme lui, analytiques; mais nous restons étonnés, on peut l'avouer, devant la démonstration qu'il

croit avoir donnée de la possibilité du développement d'une fonction en série de Taylor. Les exigences, dans les questions d'Analyse pure, étaient moindres à cette époque. Se fiant à l'intuition, on se contentait de certaines vraisemblances et l'on s'entendait implicitement sur certaines hypothèses qu'il paraissait inutile de formuler explicitement; au fond, on avait confiance dans la solidité des idées qui s'étaient tant de fois montrées fécondes, ce qui est à peu près le mot de d'Alembert. Le besoin de rigueur en Mathématiques a eu ses approximations successives et, à cet égard, nos sciences n'ont pas le caractère absolu que tant de personnes leur attribuent.

III.

Nous voici arrivés aux premières années du XIXe siècle. Comme nous l'avons expliqué, la grande majorité des recherches analytiques eut, au XVIIIe siècle, pour occasion un problème de Géométrie et surtout de Mécanique et de Physique et nous n'avons guère trouvé les préoccupations logiques et esthétiques, qui vont donner une physionomie si différente à tant de travaux mathématiques, surtout dans les deux derniers tiers du XIXe siècle. N'anticipons pas cependant, et, après les exemples si nombreux de l'influence de la Physique sur le développement de l'Analyse, nous en rencontrons encore un nouveau, et des plus mémorables, dans la théorie de la chaleur de Fourier.

Il commence par former les équations aux dérivées partielles régissant la température. Quelles sont, pour une équation aux dérivées partielles, les conditions aux limites permettant de déterminer une solution? Pour Fourier, les conditions sont suggérées par le problème physique, et les méthodes qu'il a suivies ont servi de modèles aux géomètres physiciens de la première moitié du siècle dernier. Une d'elles consiste à former des séries avec certaines solutions simples. Fourier obtint ainsi les premiers types de développements plus généraux que les développements trigonométriques, comme dans le problème du refroidissement d'une sphère, où il applique sa théorie au globe terrestre et recherche la loi qui régit les variations de température dans le sol, en s'efforçant d'aller jusqu'aux applications numériques. Devant

ces beaux résultats, on comprend l'enthousiasme de Fourier qui éclate à chaque ligne de son discours préliminaire. Parlant de l'Analyse mathématique : « Il ne peut y avoir, dit-il, de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels. Considérée sous ce point de vue, elle est aussi étendue que la nature elle-même ; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures ; cette science difficile se forme avec lenteur, mais elle conserve tous les principes qu'elle a une fois acquis. Elle s'accroît et s'affermit sans cesse, au milieu de tant d'erreurs de l'esprit humain. » L'éloge est magnifique ; on y voit cependant percer la tendance qui fait uniquement de l'Analyse l'auxiliaire, si incomparable qu'il soit, des sciences de la nature, tendance conforme, comme nous l'avons vu, au développement de la science pendant les deux siècles précédents ; mais nous arrivons précisément à une époque où apparaissent des tendances nouvelles. Poisson ayant, dans un rapport sur les *Fundamenta,* rappelé le reproche fait par Fourier à Abel et Jacobi de ne pas s'être occupés de préférence du mouvement de la chaleur, Jacobi écrit à Legendre : « Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde. » C'était sans doute aussi l'opinion du grand géomètre de Göttingen, qui appelait les mathématiques la reine des sciences et l'arithmétique la reine des mathématiques. Il serait ridicule d'opposer l'une à l'autre ces deux tendances : l'harmonie de notre science est dans leur synthèse. Le moment devait arriver où l'on sentirait le besoin d'inspecter les bases de l'édifice et de faire l'inventaire des richesses accumulées, en apportant plus d'esprit critique. La pensée mathématique allait prendre plus de forces en se repliant sur elle-même ; les problèmes s'épuisent pour un temps, et il n'est pas bon que tous les chercheurs restent dans la même voie. D'ailleurs, des difficultés et des paradoxes restés inexpliqués rendaient nécessaires les progrès de la théorie pure. La voie où celle-ci devait se mouvoir était tracée dans ses

grandes lignes, et elle pouvait y marcher avec indépendance sans perdre nécessairement contact avec les problèmes que posaient la Géométrie, la Mécanique et la Physique. On allait attacher en même temps plus d'intérêt au côté philosophique et artistique des mathématiques, confiant dans une sorte d'harmonie préétablie entre nos satisfactions logiques et esthétiques et les nécessités des applications futures.

Rappelons rapidement quelques points dans l'histoire de la revision des principes dont Gauss, Cauchy et aussi Abel furent les ouvriers de la première heure. Des définitions précises sur les fonctions continues et leurs propriétés les plus immédiates, des règles simples sur la convergence des séries furent formulées, et bientôt on établissait, sous des conditions très générales, la possibilité des développements trigonométriques, légitimant ainsi la hardiesse de Fourier. Certaines intuitions géométriques relatives aux aires, aux arcs firent place à des démonstrations rigoureuses. Les géomètres du dix-huitième siècle avaient nécessairement cherché à se rendre compte du degré de généralité de la solution des équations différentielles ordinaires. L'assimilation avec des équations aux différences conduisait facilement au résultat, mais il ne fallait pas serrer de bien près la démonstration ainsi conduite. Lagrange, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, avait apporté plus de précision et, partant de la série de Taylor, il vit que l'équation d'ordre m laisse indéterminées la fonction et ses $m-1$ premières dérivées pour la valeur initiale de la variable; nous ne nous étonnons pas que Lagrange ne se soit pas posé la question de convergence. En vingt ou trente ans, les exigences dans la rigueur des preuves s'étaient accrues. On sait que les deux modes précédents de démonstrations sont susceptibles de toute la précision nécessaire. Pour le premier, il n'était besoin d'aucun principe nouveau; pour le second, il fallait que la théorie se développât dans une voie nouvelle. Jusqu'ici les fonctions et les variables étaient restées réelles. La considération des variables complexes vint étendre le champ de l'Analyse. Les fonctions d'une variable complexe à dérivée unique sont nécessairement développables en série de Taylor; on retombe ainsi sur le mode de développement dont l'auteur de la *Théorie des fonctions analytiques* avait compris l'intérêt, mais dont l'importance ne pouvait être

mise pleinement en évidence si l'on se bornait aux variables réelles. Elles doivent aussi le grand rôle qu'elles n'ont cessé de jouer à la facilité avec laquelle on peut les manier et à leur commodité dans les calculs. Les théorèmes généraux de la théorie des fonctions analytiques ont permis de répondre avec précision à des questions restées jusque-là indécises, comme le degré de généralité des intégrales des équations différentielles. Il devint possible de pousser jusqu'au bout la démonstration esquissée par Lagrange pour une équation différentielle ordinaire, et pour une équation aux dérivées partielles ou un système de telles équations, des théorèmes précis ont été établis. Ce n'est pas que, sur ce dernier point, les résultats obtenus, si importants qu'ils soient, résolvent complètement les questions diverses que l'on peut se poser; car, en physique mathématique et même en géométrie, les conditions aux limites sont susceptibles de formes tellement variées que le problème, dit de Cauchy, apparaît souvent sous une forme bien étroite. Je reviendrai tout à l'heure sur ce point capital.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Cauchy (A.). — *Œuvres complètes, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences.* 2e série, t. V. In-4°, 552 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

Frischauf (Johs.). — *Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien.* 2e édition. Gr. in-8°, xv-199 p. avec 22 fig. Leipzig, Engelmann. 5 m.; relié 6 m.

Greilach (Severin). — *Zur Quadratur des Kreises.* Gr. in-8°, 42 p. avec fig. (Klagenfurt, St. Josef-Verein). 1 m.

Hagen (J.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* III. Bd. *Differential- u. Integralrechnung.* 4e livraison. Gr. in-4°. Berlin, Dames. 5 m.

Hochheim (Ad.). — *Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.* 1. Heft. 3e édition. Gr. in-8°, VI-98 p. Leipzig, Teubner. Relié 2 m. 40 pf.

Kantor (S.). — *Neue Grundlagen für die Theorie u. Weiterentwickelg. der Lie'schen Funktionengruppen.* (Sonderdr.) Gr. in-8°, 60 p. Wien, Gerold's Sohn. 1 m. 10 pf.

Méray (C.). — *Nouveaux éléments de Géométrie.* Nouv. édit. In-8°, VIII-450 p. et 22 planches. Dijon, Jobard.

Salmon (Geo.). — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte m. besond. Berücksichtigg. der neueren Methoden.* Frei bearb. von W. Fiedler. 6e édition. 2e partie, avec fig. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 7 m.

Stoffaes. — *Cours de Mathématiques supérieures, à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques.* In-8°, VII-538 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Zeuthen (H.-G.). — *Forelesninger over mathematikens historie.* II. 16. og 17. Heft. Kopenhagen, Höst. 12 kr.

Annales *du Bureau des Longitudes. Travaux faits à l'Observatoire de Montsouris et Mémoires divers,* t. VI. In-4°, VIII-357 p. et 8 planches. Paris, Gauthier-Villars, 25 fr.

Balawelder (Ant.). — *Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen von empirisch reinem Raume.* Gr. in-8°, VIII-111 p. avec 4 planches. Wien, Gerold's Sohn. 4 m.

Campbell (J.-E.). — *Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups.* In-8°. London, Frowde. 14 sh.

Comberousse (Ch. de). — *Cours de Mathématiques, à l'usage des candidats à l'Ecole Polytechnique.* 3e édit. T. III. *Algèbre supérieure.* (1re partie). In-8°, XXI-768 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Dassen (C.-C.). — *Etude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions.* In-8°, VI-135 p. avec fig. Paris, Hermann.

Fennel (Adf.). — *Die Wagner-Fennel'schen Tachymeter der Fabrik geodätischer Instrumente von Otto Fennel Söhne in Cassel.* 3e édition. In-4°, VI-48 p. avec 51 fig. Stuttgart, Wittwer. 2 m.

Gauss (Carl-Frdr.). — *Werke.* IX. Bd. *Herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* Gr. in-4°, 528 p. avec fig. et 1 planche. Leipzig, Teubner. Cart. 26 m.

Haentzschel (Emil). — *Das Erdsphäroid und seine Abbildungen.* Gr. in-8°, viii-140 p. avec 16 fig. Leipzig, Teubner. 3 m. 40 pf.

Hartner (Fr.). — *Hand- u. Lehrbuch der niederen Geodäsie.* 9. Aufl. umgearb. von Ed. Dolezal. 1. Bd., 1. Hälfte. Gr. in-8°, 335 p. avec fig. Wien, Seidel und Sohn. Complet 25 m.; relié 30 m.

Hilbert (Dav.). — *Grundlagen der Geometrie.* 2e édition. Gr. in-8°, v-175 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 5 m. 20 pf.; relié 5 m. 60 pf.

Klein (F.) et Sommerfeld (A.). — *Ueber die Theorie des Kreisels.* 3. Heft. *Die störenden Einflüsse. Astronomische u. geophysikal. Anwendgn.* Gr. in-8° avec fig. Leipzig, Teubner. 9 m.

Kronecker (Leop.). — *Vorlesungen über Mathematik.* (In 2 Tln.) 2. Tl., 2. Abschn. Bearb. u. fortgeführt von K. Hensel. Gr. in-8°, xii-390 p avec 11 fig. Leipzig, Teubner. 20 m.; relié 25 m.

Lubansky. — *Instruction pratique d'Astronomie de campagne.* 2 vol. gr. in-8°, 125 p. avec fig., planches et tables en noir et en couleurs. Paris, Hachette et Cie. 20 fr.

Newcomb (S.). — *Reminiscenses of an Astronomer.* In-8°, 436 p. London, Harper. 10 sh. 6 d.

Reade (T.-M.). — *Evolutions of Earth structure. Theory of geomorphic changes.* In-8°, 358 p. London, Longmans. 21 sh.

Schloemilch's *Handbuch der Mathematik.* 2. Aufl. Herausgegeben von R. Henke u. R. Heger. 1. u. 2. Bd. In-8°. Leipzig, Barth. Chaque volume 20 m.; relié 22 m. 58 pf.

1. Elementar Mathematik. xii-611 p. avec 321 fig. — 2. Höhere Mathematik. 1. Tl. vii-765 p. avec 281 fig. et 12 pl.

Auwers (Arth.). — *Neue Reduktion der Bradley'schen Beobachtungen aus d. J.* 1750-1762. 1. Bd. In-4°, xii-634 p. Leipzig, Voss Sortiment. 27 m.

Bastian (A.). — *Das logische Rechnen u. seine Aufgaben.* Gr. in-8°, 176 p. Berlin, Asher et Cie. 4 m.

Bianchi. — *Geometria analitica.* In-8°. Pisa, Spoerri. 15 l.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STOKES (Sir G.-G.). — MATHEMATICAL AND PHYSICAL PAPERS. Volume IV. In-8°. Cambridge, University Press, 1903.

Le grand physicien géomètre sir George Stokes, dont le nom demeurera associé aux plus belles recherches de la philosophie naturelle faites au cours du siècle précédent, avait publié de son vivant les premiers Volumes de l'importante et nombreuse collection de ses divers travaux. Il n'aura pas eu la satisfaction de mener à bonne fin l'œuvre qu'il avait entreprise; mais nous pouvons être assurés qu'elle sera heureusement et promptement achevée. M. Larmor a bien voulu se charger de la continuer, et il a su s'assurer le concours bienveillant de deux savants tels que Lord Kelvin et Lord Rayleigh.

Le Volume actuel, qui est orné d'un beau portrait de Sir George Stokes, contient seulement les Mémoires parus de 1873 à 1876. On compte qu'un 5e Volume comprendra les Mémoires restants avec la magistrale notice biographique lue à la Société Royale par Lord Rayleigh sur la vie et les travaux de l'illustre et regretté professeur de l'Université de Cambridge. On espère aussi pouvoir publier à part un extrait de sa correspondance scientifique. Déjà, dans le Volume actuel, on a eu l'heureuse idée de reproduire quelques pièces de la correspondance entre Lord Kelvin et Sir George Stokes, se rapportant aux sujets traités dans les 40 à 45 Mémoires qui s'y trouvent reproduits.

G. D.

MÉLANGES.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ET SES RAPPORTS AVEC QUELQUES AUTRES SCIENCES;

CONFÉRENCE FAITE AU CONGRÈS DES ARTS ET SCIENCES DE SAINT-LOUIS (1904).

PAR M. ÉMILE PICARD.

(*Suite.*)

IV.

Sans nous astreindre à l'ordre historique, reprenons le développement de la Physique mathématique au siècle dernier, en tant qu'il intéresse l'Analyse. Les problèmes d'équilibre calorifique conduisent à l'équation déjà rencontrée par Laplace dans l'étude de l'attraction. Il y a peu d'équations ayant fait l'objet d'autant de travaux que cette équation célèbre. Les conditions aux limites peuvent être de formes diverses. Le cas le plus simple est celui de l'équilibre calorifique d'un corps dont on maintient les éléments de la surface à des températures données; au point de vue physique, il peut être regardé comme évident que la température continue à l'intérieur, puisqu'il n'y a pas de source de chaleur, se trouve déterminée quand elle est donnée à la surface. Un cas plus général est celui où, l'état restant permanent, il y aurait rayonnement vers le dehors avec un pouvoir émissif variant sur la surface suivant une loi donnée; en particulier, la température peut être donnée sur une portion, tandis qu'il y a rayonnement sur l'autre portion. Ces questions, qui ne sont pas encore résolues dans leur plus grande généralité, ont grandement contribué à l'orientation de la théorie des équations aux dérivées partielles. Elles ont appelé

l'attention sur des types de déterminations des intégrales, qui ne se seraient pas présentés en restant à un point de vue purement abstrait. L'équation de Laplace s'était déjà rencontrée en Hydrodynamique et dans l'étude de l'attraction en raison inverse du carré de la distance. Cette dernière théorie a conduit à mettre en évidence les éléments les plus essentiels comme les potentiels de simples couches et de doubles couches. On y a rencontré des combinaisons analytiques de la plus haute importance qui ont été depuis notablement généralisées; telle la formule de Green. Les problèmes fondamentaux de l'électricité statique rentrent dans le même ordre d'idées et c'est certes un beau triomphe pour la théorie que la découverte du célèbre théorème sur les phénomènes électriques à l'intérieur d'un conducteur creux, que Faraday retrouva plus tard expérimentalement, sans avoir connaissance du Mémoire de Green. Tout ce magnifique ensemble est resté le type de ces théories déjà anciennes de Physique mathématique, qui nous semblent presque avoir atteint la perfection et qui ont exercé et exercent encore une si heureuse influence sur les progrès de l'Analyse pure, en lui suggérant les plus beaux problèmes. La théorie des fonctions nous offrira encore un rapprochement mémorable. Les transformations analytiques mises en jeu n'y sont pas distinctes de celles que nous avons rencontrées dans le mouvement permanent de la chaleur. Certains problèmes fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe ont pu perdre alors leur énoncé abstrait pour prendre une forme physique comme celui de la distribution de la température sur une surface fermée de connexion quelconque et ne rayonnant pas, en équilibre calorifique, avec deux sources de chaleur qui correspondent nécessairement à des flux égaux et de signes contraires. En transformant, on se trouve devant une question relative aux intégrales abéliennes de troisième espèce dans la théorie des courbes algébriques.

Les exemples qui précèdent, où nous n'avons guère envisagé que les équations de la chaleur et de l'attraction, montrent que l'influence des théories physiques ne s'est pas exercée seulement sur la nature générale des problèmes à résoudre, mais même dans le détail des transformations analytiques. Ainsi l'on désigne couramment, dans les Mémoires récents sur les équations aux dé-

rivées partielles, sous le nom de *formule de Green* une formule inspirée par la formule primitive du physicien anglais. La théorie de l'électricité dynamique et celle du magnétisme, avec Ampère et Gauss, ont été aussi l'origine d'importants progrès; l'étude des intégrales curvilignes et celle des intégrales de surfaces ont pris là tous leurs développements, et des formules, comme celle de Stokes, que l'on pourrait appeler aussi formule d'Ampère, ont apparu pour la première fois dans les Mémoires de Physique. Les équations de la propagation de l'électricité, auxquelles se rattachent les noms de Ohm et de Kirchhoff, tout en présentant une grande analogie avec celles de la chaleur, offrent souvent des conditions aux limites un peu différentes; on sait tout ce que la télégraphie par câbles doit à la discussion approfondie des intégrales d'une équation de Fourier transportée en électricité. Les équations depuis longtemps écrites de l'Hydrodynamique, les équations de la théorie de l'élasticité, celles de Maxwell et de Hertz en électromagnétisme sont venues offrir des problèmes analogues à ceux rappelés plus haut, mais dans des conditions plus variées encore. Il s'y rencontre bien des difficultés insurmontées, mais que de beaux résultats on doit à l'étude de cas particuliers dont on voudrait voir s'accroître le nombre! Il faut noter aussi, comme intéressant à la fois l'Analyse et la Physique, les différences profondes que peut présenter la propagation suivant les phénomènes étudiés. Avec des équations comme celles du son, on a une propagation par ondes; avec l'équation de la chaleur, toute variation se fait sentir instantanément à toute distance, mais très peu à très grande distance, et l'on ne peut parler alors de vitesse de propagation. Dans d'autres cas, dont l'équation de Kirchhoff relative à la propagation de l'électricité avec induction et capacité offre le type le plus simple, il y a un front d'onde avec une vitesse déterminée mais avec un résidu à l'arrière qui ne s'éteint pas. Ces circonstances diverses révèlent des propriétés très différentes des intégrales; leur étude n'a été approfondie que dans un petit nombre de cas particuliers, et elle soulève des problèmes où interviennent les notions les plus profondes de l'Analyse moderne.

V.

J'entrerai dans quelques détails analytiques spécialement intéressants pour la Physique mathématique. La question de la généralité de la solution d'une équation aux dérivées partielles a présenté quelques paradoxes apparents. Pour une même équation le nombre des fonctions arbitraires figurant dans l'intégrale générale n'était pas toujours le même, suivant la forme de l'intégrale envisagée. Ainsi Fourier, étudiant l'équation de la chaleur dans un milieu indéfini, regarde comme évident qu'une solution sera déterminée si l'on se donne sa valeur pour $t = 0$, c'est-à-dire *une* fonction arbitraire des trois coordonnées x, y, z; au point de vue de Cauchy, on peut regarder au contraire qu'il y a dans la solution générale *deux* fonctions arbitraires de trois variables. Au fond, la question, telle qu'on l'a longtemps posée, n'a pas de signification précise. Tout d'abord, quand il ne s'agit que de fonctions analytiques, un nombre fini quelconque de fonctions à un nombre quelconque de variables indépendantes ne présente pas, au point de vue arithmétique, plus de généralité qu'une seule fonction d'une seule variable, puisque dans l'un et l'autre cas l'ensemble des coefficients des développements forme une suite énumérable. Mais il y a quelque chose de plus. En réalité, outre les conditions qui se traduisent par des fonctions données, une intégrale est assujettie à des conditions de continuité, ou doit devenir infinie d'une manière déterminée pour certains éléments; on peut être ainsi amené à regarder comme équivalente à une fonction arbitraire la condition de continuité dans un espace donné, et l'on voit bien alors combien la question du dénombrement des fonctions arbitraires est mal posée. Il est parfois délicat de démontrer que des conditions déterminent d'une manière unique une solution, quand on ne veut pas se contenter de vraisemblances; il faut alors préciser la manière dont se conduisent la fonction et certaines de ses dérivées. Ainsi, dans le problème de Fourier relatif à un milieu indéfini, certaines hypothèses doivent être faites sur la fonction et ses dérivées à l'infini, si l'on veut établir que la solution est unique. Des formules analogues

à celles de Green rendent de grands services, mais les démonstrations qu'on en déduit ne sont pas toujours entièrement rigoureuses, supposant implicitement remplies pour les limites des conditions qui ne sont pas, *a priori* au moins, nécessaires. C'est, après plusieurs autres, un nouvel exemple de l'évolution des exigences dans la rigueur des preuves. Remarquons d'ailleurs que la nouvelle étude, rendue nécessaire, a conduit souvent à mieux se rendre compte de la nature des intégrales; c'est que la vraie rigueur est féconde, se distinguant par là d'une autre purement formelle et ennuyeuse, qui répand l'ombre sur les problèmes qu'elle touche.

Les difficultés dans la démonstration de l'unité d'une solution peuvent être très différentes, suivant qu'il s'agit d'équations dont toutes les intégrales sont ou non analytiques. C'est là un point important, et qui montre que, quand bien même on voudrait les écarter, il faut compter quelquefois avec les fonctions non analytiques. Ainsi, l'on ne peut pas affirmer que le problème de Cauchy détermine, d'une manière unique, une solution, les données du problème étant générales, c'est-à-dire n'étant pas caractéristiques. Il en est sûrement ainsi, si l'on n'envisage que des intégrales analytiques; mais, avec des intégrales non analytiques, il pourrait y avoir des contacts d'ordre infini. Et la théorie ici ne devance pas les applications; au contraire, comme le montre l'exemple suivant. Le théorème célèbre de Lagrange sur les potentiels de vitesse dans un fluide parfait subsiste-t-il dans un fluide visqueux? On a pu donner des exemples (¹) où les coordonnées des différents points d'un fluide visqueux partant du repos ne sont pas exprimables en fonctions analytiques du temps à partir de l'instant initial du mouvement, et où les rotations nulles, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport au temps à cet instant, ne sont cependant pas identiquement nulles; le théorème de Lagrange ne subsiste donc pas. Ces considérations montrent assez l'intérêt qu'il peut y avoir à être assuré que toutes les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles, continues ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé dans un certain champ

(¹) Nous faisons ici allusion à un travail de M. Boussinesq (*Comptes rendus*, 29 mars et 26 avril 1880).

de variables réelles, sont des fonctions analytiques : on suppose, bien entendu, qu'il n'y ait dans les équations que des éléments analytiques. On a, pour les équations linéaires, des théorèmes précis, toutes les intégrales étant analytiques, si les caractéristiques sont imaginaires, et des propositions très générales ont été aussi obtenues dans d'autres cas. Remarquons encore que les conditions aux limites, que l'on est conduit à poser, sont très différentes, suivant qu'il s'agit d'une équation dont les intégrales sont ou ne sont pas analytiques. Un type du premier cas est donné par le problème généralisé de Dirichlet ; des conditions de continuité y jouent un rôle essentiel, et, en général, la solution ne peut être prolongée des deux côtés du continuum qui sert de support aux données; il n'en est plus de même dans le second cas, où la disposition de ce support par rapport aux caractéristiques tient le principal rôle, et où le champ d'existence de la solution se présente dans de tout autres conditions. Toutes ces notions, difficiles à préciser en langage ordinaire et fondamentales pour la Physique mathématique, ne sont pas d'un moindre intérêt pour la Géométrie infinitésimale. Il suffira de rappeler que toutes les surfaces à courbure constante positive sont analytiques, tandis qu'il existe des surfaces à courbure constante négative non analytiques.

Dès l'antiquité s'était fait jour le sentiment confus d'une certaine économie dans les phénomènes naturels; un des premiers exemples précis est fourni par le principe de Fermat relatif à l'économie du temps dans la transmission de la lumière. On arriva ensuite à reconnaître que les équations générales de la Mécanique correspondent à un problème de minimum, ou plus exactement de variation, et l'on obtint ainsi le principe des vitesses virtuelles, puis le principe d'Hamilton et celui de la moindre action. Un grand nombre de problèmes apparurent alors comme correspondant à des minima de certaines intégrales définies. Il y eut là un progrès très important, car l'existence d'un minimum pouvait, dans bien des cas, être regardée comme évidente, et par suite la démonstration de l'existence de la solution était effectuée. Ce raisonnement a rendu d'immenses services; les plus grands géomètres (Gauss, dans le problème de la répartition d'une masse attirante correspondant à un potentiel donné; Riemann, dans sa

théorie des fonctions abéliennes) s'en sont contentés. Aujourd'hui, notre attention a été appelée sur les dangers de ce genre de démonstrations; il se peut que les minima soient simplement des limites et ne puissent être effectivement atteints par des fonctions véritables possédant les propriétés nécessaires de continuité. On ne se contente donc plus des vraisemblances qu'offrait le raisonnement longtemps classique. Soit qu'on procède indirectement, soit qu'on cherche à donner une preuve directe de l'existence d'une fonction répondant au minimum, la route est longue et ardue. Il n'en sera d'ailleurs pas moins toujours utile de rattacher une question de Mécanique ou de Physique mathématique à un problème de minimum; il y a là tout d'abord une source de transformations analytiques fécondes et en outre, dans les calculs mêmes de la recherche des variations, d'utiles indications peuvent apparaître relativement aux conditions aux limites; un bel exemple en a été fourni par Kirchhoff dans la recherche délicate des conditions aux limites de l'équilibre de flexion des plaques.

VI.

J'ai été conduit à m'étendre surtout sur les équations aux dérivées partielles. Des exemples choisis dans la Mécanique rationnelle et dans la Mécanique céleste montreraient aisément le rôle que jouent les équations différentielles ordinaires dans les progrès de ces sciences, dont l'histoire, nous l'avons vu, a été si étroitement liée à celle de l'Analyse. Quand on eut perdu l'espérance d'intégrer avec des fonctions simples, on s'est efforcé de trouver des développements permettant de suivre un phénomène le plus longtemps possible, ou d'obtenir au moins des renseignements sur son allure qualitative. Pour la pratique, il y a dans les méthodes d'approximations une partie extrêmement importante des Mathématiques, et c'est ainsi que les parties les plus élevées de l'Arithmétique théorique se trouvent en relation avec les sciences appliquées. Quant aux séries, les démonstrations mêmes d'existence des intégrales en fournissent tout d'abord; ainsi, la première méthode de Cauchy donne des développements convergents

tant que les intégrales et les coefficients différentiels restent continus. Quand quelque circonstance permet de prévoir qu'il en est toujours ainsi, on obtient des développements toujours convergents. Dans le problème des n corps, on peut de cette manière obtenir des développements valables tant qu'il n'y a pas de chocs. Si les corps, au lieu de s'attirer, se repoussaient, cette circonstance ne serait pas à craindre et l'on obtiendrait des développements valables indéfiniment; malheureusement, comme le disait un jour Fresnel à Laplace, « la nature ne se soucie pas des difficultés analytiques » et les corps célestes s'attirent au lieu de se repousser. On serait même tenté parfois d'aller plus loin que le grand physicien, et de dire que la nature a semé les difficultés sur les chemins des analystes. Ainsi, pour prendre un autre exemple, on peut généralement décider, étant donné un système d'équations différentielles du premier ordre, si la solution générale est stable ou non autour d'un point, et trouver des développements en séries valables pour les solutions stables ; il faut seulement que certaines inégalités soient vérifiées. Mais applique-t-on ces résultats aux équations de la Dynamique pour discuter la stabilité; on se trouve justement dans le cas particulier défavorable. En général, même ici, il n'est pas possible de se prononcer sur la stabilité; dans le cas d'une fonction des forces ayant un maximum, un raisonnement classique mais indirect établit la stabilité, qui ne peut se déduire d'aucun développement valable pour toute valeur du temps. Ne regrettons pas ces difficultés; elles seront la source de progrès futurs. Telles aussi les difficultés que nous offrent encore, malgré tant de travaux, les équations de la Mécanique céleste; les astronomes ont à peu près tiré d'elles, depuis Newton, au moyen de séries pratiquement convergentes et d'approximations heureusement conduites, tout ce qui est nécessaire pour la prévision des mouvements des corps célestes. Les analystes demanderaient davantage, mais ils n'ont plus guère d'espérances d'arriver à l'intégration au moyen de fonctions simples ou de développements toujours convergents. Ce que d'admirables recherches récentes leur ont le mieux appris, c'est l'immense difficulté du problème; une voie nouvelle a toutefois été ouverte par l'étude de solutions particulières, comme les solutions périodiques et les solutions asymptotiques, qui ont déjà été utilisées. Ce n'est peut-être pas tant

pour les besoins de la pratique, que pour ne pas s'avouer vaincue, que l'Analyse ne se résignerait jamais à abandonner, sans une victoire définitive, un sujet où elle a rencontré tant de triomphes éclatants; et aussi, quel plus beau champ pourraient trouver, pour essayer leurs forces, les théories naissantes ou rajeunies de la doctrine moderne des fonctions que ce problème classique des n corps.

C'est une joie pour l'analyste de rencontrer dans les applications des équations qu'il peut intégrer avec des fonctions connues, avec des transcendantes déjà classées. De telles rencontres sont malheureusement rares; le problème du pendule, les cas classiques du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe sont des exemples simples où les fonctions elliptiques ont permis d'effectuer l'intégration. Il serait aussi extrêmement intéressant de rencontrer une question de Mécanique qui puisse être l'origine d'une découverte importante touchant la théorie des fonctions, comme la découverte d'une transcendante nouvelle jouissant de quelque propriété remarquable; je serais embarrassé d'en donner un exemple, à moins de faire remonter au pendule le début de la théorie des fonctions elliptiques. La pénétration entre la théorie et les applications est ici beaucoup moindre que tout à l'heure dans les questions de Physique mathématique. Aussi s'explique-t-on que, depuis une quarantaine d'années, les travaux sur les équations différentielles ordinaires, se rattachant aux fonctions analytiques, aient en grande partie un caractère théorique tout abstrait. La théorie pure a pris ici notablement l'avance; nous avons eu l'occasion de dire qu'il était bon qu'il en fût ainsi, mais il y a évidemment là une question de mesure, et l'on peut souhaiter de voir d'anciens problèmes profiter des progrès accomplis dans la théorie pure. On ne serait pas au surplus embarrassé d'en donner quelques exemples, et je rappellerai seulement ces équations différentielles linéaires où figurent des paramètres arbitraires dont les valeurs singulières sont racines de fonctions transcendantes entières, ce qui, en particulier, fait correspondre les harmoniques successives d'une membrane vibrante aux pôles d'une fonction méromorphe.

Il arrive aussi que la théorie soit un élément de classification, en conduisant à chercher les conditions pour que la solution rentre dans un type déterminé, comme, par exemple, que l'inté-

grale soit uniforme. Il y a eu et il y aura encore bien des découvertes intéressantes dans cette voie; le cas du mouvement d'un corps solide pesant, traité par Mme de Kowalesky, et où ont été utilisées les fonctions abéliennes, est déjà devenu classique.

VII.

En étudiant les relations réciproques de l'Analyse avec la Mécanique et la Physique mathématique, nous avons, chemin faisant, plus d'une fois rencontré la Géométrie infinitésimale, qui a proposé tant de problèmes célèbres; dans maintes questions difficiles, l'heureuse combinaison du calcul et des raisonnements synthétiques a réalisé des progrès considérables, comme le montrent les théories des surfaces applicables et des systèmes triplement orthogonaux. Il est une autre partie de la Géométrie qui joue un grand rôle dans quelques recherches analytiques : je veux parler de la Géométrie de situation ou *analysis situs*. On sait que Riemann a fait à ce point de vue une étude complète des continuum à deux dimensions, sur laquelle repose sa théorie des fonctions algébriques d'une variable et de leurs intégrales. Quand le nombre des dimensions augmente, les questions d'*analysis situs* se compliquent nécessairement; l'intuition géométrique cesse, et l'étude devient purement analytique, l'esprit étant seulement guidé par des analogies qui peuvent être trompeuses et ont besoin d'être discutées de près. La théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes qui nous transporte dans un espace à quatre dimensions, sans tirer de l'*analysis situs* un parti aussi fructueux que la théorie des fonctions d'une variable, lui doit cependant d'utiles orientations. Voici encore un autre ordre de questions où intervient la géométrie de situation; dans l'étude des courbes tracées sur une surface et définies par des équations différentielles, la connexion de cette surface joue un rôle important : c'est ce qui arrive notamment pour les lignes géodésiques. La question de connexité s'est d'ailleurs présentée il y a longtemps en Analyse, quand l'étude des courants électriques et du magnétisme a conduit à des potentiels non uniformes; d'une manière plus générale, certaines intégrales multiformes de quelques équa-

tions aux dérivées partielles se rencontrent dans des théories difficiles, comme celle de la diffraction, et des recherches variées sont à poursuivre dans cette direction.

A un point de vue différent, je dois rappeler encore les relations de l'Analyse algébrique avec la Géométrie, qui se manifestent si élégamment dans la théorie des groupes d'ordre fini. Un polyèdre régulier, comme un icosaèdre, est d'une part le solide que tout le monde connaît; c'est ainsi, pour l'analyste, un groupe d'ordre fini, correspondant aux diverses manières de faire coïncider le polyèdre avec lui-même. La recherche de tous les types de groupes de mouvements d'ordre fini intéresse non seulement les géomètres, mais aussi les cristallographes; elle revient essentiellement à l'étude des groupes de substitutions linéaires ternaires de déterminant ± 1, et conduit aux trente-deux systèmes de symétrie des cristallographes pour la particule complexe. Le groupement en systèmes de polyèdres correspondants, de manière à remplir l'espace, épuise toutes les possibilités dans la recherche de la structure des cristaux. Depuis l'époque où la notion de groupe a été introduite en Algèbre par Galois, elle a pris, dans des voies diverses, des développements considérables au point qu'on la rencontre aujourd'hui dans toutes les parties des Mathématiques. Dans les applications, elle nous apparaît surtout comme un admirable instrument de classification. Qu'il s'agisse des groupes de substitutions ou des groupes de transformations de Sophus Lie, qu'il s'agisse d'équations algébriques ou d'équations différentielles, cette doctrine, si compréhensive, permet de se rendre compte du degré de difficulté des problèmes traités et enseigne à utiliser les circonstances spéciales qui s'y présentent; à ce titre, elle doit intéresser autant la Mécanique et la Physique mathématique que l'Analyse pure.

Le degré de développement de la Mécanique et de la Physique a permis de donner à presque toutes leurs théories une forme mathématique; certaines hypothèses et la connaissance des lois élémentaires ont conduit aux relations différentielles qui constituent la forme dernière sous laquelle se fixent, au moins pour un temps, ces théories. Celles-ci ont vu peu à peu leur champ s'agrandir avec les principes de la Thermodynamique. Aujourd'hui, la Chimie tend à prendre à son tour une forme mathématique. Je n'en pren-

drai comme témoin que le Mémoire célèbre de Gibbs, sur l'équilibre des systèmes chimiques, d'un caractère si analytique, et où il a fallu quelque effort aux chimistes pour reconnaître, sous leur manteau algébrique, des lois d'une importance considérable. Il semble que la Chimie soit sortie aujourd'hui de la méthode prémathématique, par laquelle débute toute science, et qu'un jour doive venir où s'ordonneront de vastes théories, analogues à celles de notre Physique mathématique actuelle, mais bien plus vastes et comprenant l'ensemble des phénomènes physico-chimiques. Il serait prématuré de se demander si l'Analyse trouvera dans leurs développements la source de nouveaux progrès ; on ne sait même pas devant quels types analytiques on pourra se trouver. J'ai constamment parlé d'équations différentielles régissant les phénomènes ; sera-ce toujours là la forme dernière qui condense une théorie? Je n'en sais certes rien, mais cependant nous devons nous souvenir que plusieurs hypothèses ont été faites de nature plus ou moins expérimentale ; parmi elles, il en est une qu'on a pu appeler *principe de non-hérédité*, qui postule que l'avenir d'un système ne dépend que de son état actuel et de son état à l'instant infiniment voisin, ou plus brièvement que les accélérations ne dépendent que des positions et des vitesses. On sait que dans certains cas cette hypothèse n'est pas admissible, au moins avec les grandeurs directement envisagées ; on a même quelquefois abusé à ce sujet de la mémoire de la matière, qui se souvient de son passé, et l'on a parlé en termes émus de la vie d'un morceau d'acier. Différentes tentatives ont été faites pour donner une théorie de ces phénomènes, où un passé lointain semble intervenir ; je n'ai pas à en parler ici. Un analyste peut penser que, dans des cas aussi complexes, il faudra abandonner la forme des équations différentielles, et se résigner à envisager des équations fonctionnelles, où figureront des intégrales définies qui seront le témoignage d'une sorte d'hérédité. A voir l'intérêt qui s'attache en ce moment aux équations fonctionnelles, on pourrait croire à un pressentiment des besoins futurs.

VIII.

Après avoir parlé de non-hérédité, je n'ose guère toucher la question des applications de l'Analyse à la Biologie. On ne formera point sans doute de sitôt les équations fonctionnelles des phénomènes biologiques d'un type analogue à celles dont je parlais, il y a un moment [1]: les tentatives faites jusqu'ici sont dans un ordre d'idées plus modeste. Cependant, l'on s'efforce de sortir du champ purement qualificatif pour introduire des mesures quantitatives. Dans la question de la variation de certains caractères, on se livre à des mensurations et à des mesures statistiques qui se traduisent par des courbes de fréquence. Les modifications de ces courbes avec les générations successives, leurs décompositions en courbes distinctes, pourront donner la mesure de la stabilité des espèces ou de la rapidité des mutations, et l'on sait quel intérêt s'attache à ces questions dans des recherches botaniques récentes. Il y a dans tout ceci un si grand nombre de paramètres, qu'on se demande si la méthode infinitésimale elle-même pourra rendre quelques services. Quelques lois, d'un caractère arithmétique simple, comme celles de Mendel, viennent parfois donner de nouveau confiance dans le vieil aphorisme, que je citais au début, « que toutes choses s'expliquent par les nombres »; mais, malgré de légitimes espérances, il est clair que, dans son ensemble, la Biologie est encore loin d'entrer dans une période vraiment mathématique.

Il n'en est pas de même, d'après certains économistes, pour l'Économie politique. Après Cournot, l'École de Lausanne a fait un effort extrêmement intéressant pour introduire l'Analyse mathématique dans l'Économie politique. Sous certaines hypothèses, qui conviennent au moins à des cas limités, on trouve dans de savants traités une équation entre les quantités de marchandises et

---

(1) Dans son article sur *Le principe de Lamarck et l'hérédité des modifications somatiques*, M. Giard dit de l'hérédité : « C'est une intégrale, c'est la somme des variations produites sur chaque génération antérieure par les facteurs primaires de l'évolution ». Voir *Controverses transformistes*, p. 135.

leurs prix, qui rappelle l'équation des vitesses virtuelles en Mécanique : c'est l'équation de l'équilibre économique. Une fonction des quantités joue dans cette théorie un rôle essentiel rappelant celui de la fonction potentielle. D'ailleurs, les représentants les plus autorisés de l'École insistent sur l'analogie des phénomènes économiques avec les phénomènes mécaniques; « comme la Mécanique rationnelle, dit l'un d'eux, considère des points matériels, l'Économie pure considère l'*homo œconomicus* ». Naturellement, on retrouve là aussi les analogues des équations de Lagrange, moule obligé de toute mécanique. Tout en admirant ces hardis travaux, on se prend à craindre que les auteurs n'aient négligé certaines masses cachées, comme auraient dit Helmholtz et Hertz. Mais, quoi qu'il en advienne, il y a dans ces doctrines une application curieuse des Mathématiques, qui, au moins dans des cas bien circonscrits, a déjà rendu de grands services (1).

J'ai terminé, Messieurs, cette histoire sommaire de quelques-unes des applications de l'Analyse avec les réflexions qu'elle m'a par moment suggérées. Je suis loin d'avoir été complet; ainsi, j'ai omis de parler du calcul des probabilités qui demande tant de subtilité d'esprit, et dont Pascal se refusait d'expliquer les finesses au chevalier de Méré, parce qu'il n'était pas géomètre. Son utilité pratique est de premier ordre. Son intérêt théorique a toujours été considérable; il est encore augmenté aujourd'hui, grâce à l'importance prise par les recherches que Maxwell appelait *statistical* et qui tendent à envisager la Mécanique sous un jour tout nouveau (2).

J'espère cependant avoir montré, dans cette esquisse, l'origine et la raison des liens si profonds qui unissent l'Analyse à la Géométrie et à la Physique, plus généralement à toute science portant sur des grandeurs numériquement mesurables. L'influence réciproque de l'Analyse et des théories physiques a été à cet égard particulièrement instructive. Que réserve l'avenir? Des problèmes plus difficiles, correspondant à une approximation d'ordre plus élevé, amèneront des complications que nous ne pouvons que va-

---

(1) On pourra consulter sur ce sujet : *La méthode mathématique en Économie politique*, par E. Bouvier et le *Petit Traité d'Économie politique mathématique*, par H. Laurent.

(2) *Voir* sur ce sujet le Livre de W. Gibbs : *Elementary Principles in statistical Mechanics* et les *Leçons sur la théorie des gaz* de M. Boltzmann.

guement prévoir, en parlant, comme je le faisais tout à l'heure, d'équations fonctionnelles remplaçant systématiquement nos équations différentielles actuelles, ou encore d'intégrations d'équations en nombre infini à une infinité de fonctions inconnues. Mais, quoi qu'il arrive, l'Analyse mathématique restera toujours cette langue qui, suivant un mot de Fourier « n'a point de signes pour exprimer les notions confuses », langue douée d'une admirable puissance de transformations et capable de condenser dans ses symboles un nombre immense de résultats.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bigourdan (G.). — *Observations de nébuleuses et d'amas stellaires.* Tome V : *Observations différentielles* ($XVIII^h 0^m$-$XXIV^h 0^m$). (Extrait des *Annales de l'Observatoire de Paris.*) In-4°, 430 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

Bowden (J.). — *Elements of theory of the integers.* Gr. in-8°. London, Macmillan. 5 sh.

Constan (P.). — *Cours élémentaire d'Astronomie et de Navigation* (2e Partie). In-8°, 312 p. avec 159 fig. et 3 planches. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr. 50 c.

Forsyth (A.-R.). — *Differential invariants of space.* In-4°, 56 p. London, Dulau. 2 sh.

Guichard (C.). — *Traité de Géométrie* (1re Partie) : *Géométrie élémentaire plane et dans l'espace* (2e édit.). In-8°, II-457 p. avec 491 fig. Paris, Nony et Cie. 5 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

AREXDT (G.). — Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. 1 vol. in-8°, xxiv-476 pages. Braunschweig, Wieweg und Sohn, 1904.

Rien de ce qui touche l'œuvre de Lejeune-Dirichlet, qui fut un géomètre profond et subtil, un merveilleux artiste et, paraît-il, un maître incomparable, ne saurait être indifférent aux mathématiciens. Quoiqu'une bonne partie de ce qu'on trouve dans le Livre de M. Arendt soit déjà connu par le Livre de M. G.-F. Meyer (1), par celui de M. Grube (2), par les œuvres même de Dirichlet, le très consciencieux travail de M. Arendt n'en sera pas moins le très bien venu, et l'on peut être sûr qu'il trouvera sa place dans toutes les bibliothèques mathématiques, qu'il sera lu attentivement par les maîtres et les étudiants. Le Livre de M. Grube touche à un sujet spécial, et ce n'est que quelques pages que l'on peut rapprocher de celui qui nous occupe. Le Livre de M. G.-F. Meyer, qui porte presque le même titre que ce dernier, en est plus voisin : mais l'auteur, comme c'était son droit incontestable, avait usé de quelque liberté en le rédigeant; il ne s'était pas borné à reproduire textuellement l'enseignement dont il s'était inspiré; il avait élagué ici, développé ailleurs des démonstrations que le maître avait seulement indiquées. M. Arendt s'est attaché au contraire à reproduire les notes très complètes du cours professé par Dirichlet, pendant le semestre d'été de 1854 (3), à les reproduire d'une façon scrupuleuse, à nous donner un texte authentique. Il a cru devoir signaler, non seulement quelques très légères additions, mais encore les corrections de ces fautes d'inattention qui échappent à tous ceux

(1) *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grösse* (Leipzig, 1871).

(2) *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrate der Entfernung wirkenden Kräfte*, 2e édition, Leipzig, 1887.

(3) Le Livre de M. F.-G. Meyer se rapporte au cours de 1858.

qui prennent des notes, et qui peuvent même, parfois, échapper, lorsqu'il parle, à un savant aussi impeccable que l'était Dirichlet. Si les notes qu'a conservées M. Arendt n'avaient pas été prises avec un soin minutieux, ces scrupules auraient été impossibles et leur excès même peut inspirer au lecteur une entière confiance : il a, sous les yeux, la parole écrite de Dirichlet, il en suit le mouvement, il en ressent la suggestion.

Au reste, la perfection même de l'exposition aurait suffi à lui garantir cette authenticité dont nous répond M. Arendt : l'ordre dans lequel les sujets se déroulent, la façon dont les idées sont préparées, introduites, mises en pleine lumière, le choix des exemples, la précision des détails, tout est d'un maître admirable.

Le Livre est partagé en deux parties : les intégrales simples et les intégrales multiples auxquelles s'ajoutent environ soixante-dix pages, intitulées : *Quelques applications des intégrales définies*. Ces *applications* ont été développées par Dirichlet dans un cours public, comportant une leçon par semaine; le cours principal, où ont été exposés les autres sujets, comportait quatre leçons.

La première Partie se rapporte aux intégrales définies simples, et débute par la notion même de l'intégrale, en supposant que la fonction sous le signe $\int$ soit continue. On y notera les explications relatives à *l'uniformité de la continuité*, l'introduction du premier théorème de la moyenne, enfin les explications géométriques sur lesquelles Dirichlet ne craint pas de s'arrêter : au reste, il invoque les considérations de cette nature, toutes les fois qu'elles facilitent l'exposition : il fait remarquer que, bien souvent, la signification analytique d'une démonstration soi-disant géométrique saute aux yeux, que la géométrie n'y est qu'une façon commode de parler et n'ajoute rien à l'analyse, qui se suffit à elle-même. Après quelques exemples simples, l'auteur traite des intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx,$$

où $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont des polynomes, dont le second n'a pas de racines réelles et est d'un degré supérieur de deux unités au moins au degré du premier, pour en tirer, en particulier, diverses

formules célèbres, dues à Euler. En lisant ces pages, je me suis rappelé combien Ch. Hermite aimait ce même sujet, et les riches développements dont il se plaisait à l'orner, il y a près de quarante ans, dans ses leçons à l'École Normale ou à la Sorbonne.

Après avoir traité, en se bornant d'ailleurs aux circonstances les plus simples, du cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie, Dirichlet s'occupe des intégrales de Fresnel. Sa méthode d'exposition est d'ailleurs devenue classique.

Il passe ensuite aux intégrales eulériennes, dont l'étude est précédée d'un Chapitre sur les intégrales doubles, qui lui serviront pour le passage des intégrales de première espèce aux intégrales de seconde espèce.

Une soixantaine de pages, fort intéressantes, concernent l'introduction d'un paramètre imaginaire dans une intégrale définie, dans celle en particulier qui représente la fonction Γ, et les nombreuses formules qu'on peut obtenir par cette méthode. On remarquera avec quelle netteté, dès le début, Dirichlet fait ressortir les difficultés que comporte cette introduction, et la façon dont elle change la signification de l'intégrale : il s'arrête d'ailleurs, avec détails, sur quelques notions et propriétés très élémentaires de la théorie des fonctions analytiques, en particulier sur celle qui concerne l'identité de deux pareilles fonctions, lorsqu'elles coïncident sur un élément de courbe si petit qu'il soit : on voit assez l'importance de cette proposition dans le sujet qu'on vient de dire.

Le dernier Chapitre de cette première Partie se rapporte à diverses intégrales importantes, qui se traitent par des procédés particuliers : intégration et différentiation sous le signe $\int$, transformation, etc. On remarquera l'art avec lequel sont présentés des procédés qui semblent parfois artificiels aux débutants; loin de chercher à étonner son auditeur par des réussites heureuses et inattendues, Dirichlet s'efforce toujours de rendre l'exposition naturelle. On notera, dans ce Chapitre, l'introduction des séries semi-convergentes.

La seconde Partie concerne les intégrales multiples.

Pour ce qui est des intégrales doubles, Dirichlet, après avoir exposé le concept et expliqué la transformation, s'arrête sur l'évaluation de l'aire de l'ellipsoïde : il développe successivement la

méthode de Catalan et celle de Jacobi : il rattache celle-ci à la notion de la courbure totale, d'après Gauss. Le problème de l'attraction exercée par un ellipsoïde homogène sur un point intérieur fournit une belle application des intégrales triples. Le second cas est ramené au premier par le théorème d'Ivory. Le problème, ou plutôt la recherche du potentiel, est ensuite traité par cette belle méthode du facteur de discontinuité, exposée d'abord dans toute sa généralité. C'est encore en employant un tel facteur qu'est obtenue la réduction à des fonctions Γ de l'intégrale

$$\int\int\int \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots .$$

Les *applications* qui terminent le Volume se rapportent à diverses conséquences, relatives soit aux séries harmoniques, soit aux facultés, qui se rattachent à l'étude des intégrales eulériennes ou d'autres qui leur sont liées étroitement, à la discussion de la façon dont se comporte l'expression

$$\left(1 + \frac{t}{m}\right)^m$$

lorsque t et m croissent ensemble, à la valeur asymptotique de $\Gamma(a+n)$, pour n infini, aux propriétés fondamentales de la série hypergéométrique : on voit assez la connexion de tous ces sujets, qui sont d'ailleurs traités avec beaucoup de détails et rendus faciles. Enfin un dernier Chapitre est consacré à la définition de l'intégrale prise entre des limites imaginaires et aux conséquences immédiates de cette définition. J. T.



KOENIGSBERGER (L.). — Carl Gustav Jacob Jacobi. *Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages:* mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. 1 vol. in-8°, XVIII-554 pages. Leipzig, Teubner, 1904.

On trouvera dans ce beau Volume une biographie complète de Jacobi. C'est vraiment une biographie scientifique, où l'histoire

des travaux du savant illustre tient, comme il convient, la plus grande place; M. Kœnigsberger a suivi ces travaux dans leur développement continu ou leurs brusques éclosions.

Il prend Jacobi à sa naissance (10 décembre 1804), retrace en quelques mots son enfance, nous dit ses succès au gymnase de Potsdam, nous le montre s'occupant, à quinze ans, de la résolution de l'équation du cinquième degré. Le voici étudiant à l'Université, privat-docent à 21 ans. Ses découvertes ont déjà commencé : elles ne s'arrêteront plus, pendant les trente-cinq glorieuses années qui lui restent à vivre. M. Kœnigsberger a su replacer ces découvertes dans le milieu de famille, d'amis, d'admirateurs et d'élèves où Jacobi a vécu : la peinture de ce milieu, les fragments de lettres, le récit des événements essentiels, les anecdotes, encadrent les théories mathématiques : tout cela fait un Livre vivant et instructif que l'on se plaît à feuilleter ou à lire : le Comité du 3e Congrès international de Mathématiciens a été singulièrement bien inspiré lorsqu'il a prié M. Kœnigsberger de l'écrire, à l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jacobi, que la réunion du Congrès devait précéder de quelques mois.

Voici les titres des différents Chapitres : ces Chapitres sont courts au début : leur longueur, en raison des travaux qu'il faut énumérer, croît rapidement.

Années de jeunesse de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1821).

Jacobi étudiant à l'Université de Berlin, de Pâques 1821 à Pâques 1825.

Jacobi privat-docent à l'Université de Kœnigsberg, de Pâques 1826 à décembre 1827.

Jacobi professeur extraordinaire à l'Université de Kœnigsberg, de janvier 1827 à juillet 1832.

Jacobi professeur ordinaire de l'Université de Kœnigsberg, de juillet 1832 à octobre 1844.

Jacobi membre de l'Académie de Berlin, d'octobre 1844 jusqu'à sa mort (18 février 1851).

Coup d'œil en arrière.

J. T.

MÉLANGES.

L'ÉTAT ACTUEL ET L'AVENIR DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE;

PAR M. HENRI POINCARÉ.

CONFÉRENCE LUE LE 24 SEPTEMBRE 1904 AU CONGRÈS D'ART ET DE SCIENCE DE SAINT-LOUIS.

Quel est l'état actuel de la Physique mathématique? Quels sont les problèmes qu'elle est amenée à se poser? Quel est son avenir? Son orientation est-elle sur le point de se modifier? Le but et les méthodes de cette Science vont-ils apparaître dans dix ans à nos successeurs immédiats sous le même jour qu'à nous-mêmes; ou au contraire allons-nous assister à une transformation profonde? Telles sont les questions que nous sommes forcés de soulever, en abordant aujourd'hui notre enquête.

S'il est facile de les poser, il est difficile d'y répondre. Si nous nous sentions tentés de risquer un pronostic, nous résisterions aisément à cette tentation en songeant à toutes les sottises qu'auraient dites les savants les plus éminents d'il y a cent ans, si on leur avait demandé ce que serait la Science au XIX[e] siècle. Ils auraient cru être hardis dans leurs prédictions, et combien, après l'événement, nous les trouverions timides. N'attendez donc de moi aucune prophétie.

Mais si, comme tous les médecins prudents, je répugne à donner un pronostic, je ne puis pourtant me dispenser d'un petit diagnostic; eh bien, oui, il y a des indices d'une crise sérieuse, comme si nous devions nous attendre à une transformation pro-

chaîne. Ne soyons pas toutefois trop inquiets. Nous sommes assurés que la malade n'en mourra pas et même nous pouvons espérer que cette crise sera salutaire, car l'histoire du passé semble nous le garantir. Cette crise, en effet, n'est pas la première et il importe, pour la comprendre, de se rappeler celles qui l'ont précédée. Pardonnez-moi un court historique.

La Physique mathématique, nous le savons, est née de la Mécanique céleste qui l'a engendrée à la fin du XVIIIe siècle, au moment où elle venait elle-même d'atteindre son complet développement. Dans ses premières années surtout, l'enfant ressemblait à sa mère d'une manière frappante.

L'Univers astronomique est formé de masses, très grandes sans doute, mais séparées par des distances tellement immenses qu'elles ne nous apparaissent que comme des points matériels; ces points s'attirent en raison inverse du carré des distances et cette attraction est la seule force qui influe sur leurs mouvements. Mais si nos sens étaient assez subtils pour nous montrer tous les détails des corps qu'étudie le physicien, le spectacle que nous y découvririons différerait à peine de celui que contemple l'astronome. Là aussi nous verrions des points matériels séparés les uns des autres par des intervalles énormes par rapport à leurs dimensions et décrivant des orbites suivant des lois régulières. Ces astres infiniment petits, ce sont les atomes. Comme les astres proprement dits, ils s'attirent ou se repoussent, et cette attraction ou cette répulsion, dirigée suivant la droite qui les joint, ne dépend que de la distance. La loi suivant laquelle cette force varie en fonction de la distance n'est peut-être pas la loi de Newton, mais c'est une loi analogue; au lieu de l'exposant -2, nous avons probablement un exposant différent, et c'est de ce changement d'exposant que sort toute la diversité des phénomènes physiques, la variété des qualités et des sensations, tout le monde coloré et sonore qui nous entoure, toute la Nature en un mot.

Telle est la conception primitive dans toute sa pureté. Il ne reste plus qu'à chercher dans les différents cas quelle valeur il convient de donner à cet exposant afin de rendre compte de tous les faits. C'est sur ce modèle que Laplace, par exemple, a construit sa belle théorie de la Capillarité; il ne la regarde que comme un cas particulier de l'attraction ou, comme il dit, de la pesanteur

universelle, et personne ne s'étonne de la trouver au milieu de l'un des cinq volumes de la Mécanique céleste. Plus récemment, Briot croit avoir pénétré le dernier secret de l'Optique quand il a démontré que les atomes d'éther s'attirent en raison inverse de la sixième puissance de la distance; et Maxwell, Maxwell lui-même, ne dit-il pas quelque part que les atomes de gaz se repoussent en raison inverse de la cinquième puissance de la distance. Nous avons l'exposant — 6, ou — 5, au lieu de l'exposant — 2, mais c'est toujours un exposant.

Parmi les théories de cette époque, une seule fait exception, celle de Fourier; il y a bien des atomes, agissant à distance l'un sur l'autre; ils s'envoient mutuellement de la chaleur, mais ils ne s'attirent pas, ils ne bougent pas. A ce point de vue, la théorie de Fourier devait apparaître aux yeux de ses contemporains, à ceux de Fourier lui-même, comme imparfaite et provisoire.

Cette conception n'était pas sans grandeur; elle était séduisante, et beaucoup d'entre nous n'y ont pas définitivement renoncé; ils savent qu'on n'atteindra les éléments ultimes des choses qu'en débrouillant patiemment l'écheveau compliqué que nous donnent nos sens; qu'il faut avancer pas à pas en ne négligeant aucun intermédiaire, que nos pères ont eu tort de vouloir brûler les étapes, mais ils croient que, quand on arrivera à ces éléments ultimes, on y retrouvera la simplicité majestueuse de la Mécanique céleste.

Cette conception n'a pas non plus été inutile; elle nous a rendu un service inappréciable, puisqu'elle a contribué à préciser en nous la notion fondamentale de la loi physique. Je m'explique: comment les anciens comprenaient-ils la Loi? C'était pour eux une harmonie interne, statique pour ainsi dire et immuable; ou bien c'était comme un modèle que la nature s'efforçait d'imiter. Une loi, pour nous, ce n'est plus cela du tout; c'est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.

Voilà la forme idéale de la loi physique; eh bien, c'est la loi de Newton qui l'a revêtue la première. Si ensuite on a acclimaté cette forme en Physique, c'est précisément en copiant autant que possible cette loi de Newton, c'est en imitant la Mécanique céleste.

Néanmoins, il est arrivé un jour où la conception des forces

centrales n'a plus paru suffisante, et c'est la première de ces crises dont je vous parlais tout à l'heure.

Que fit-on alors? On renonça à pénétrer dans le détail de la structure de l'Univers, à isoler les pièces de ce vaste mécanisme, à analyser une à une les forces qui les mettent en branle et l'on se contenta de prendre pour guides certains principes généraux qui ont précisément pour objet de nous dispenser de cette étude minutieuse. Comment cela? Supposons que nous ayons en face de nous une machine quelconque; le rouage initial et le rouage final sont seuls apparents, mais les transmissions, les rouages intermédiaires par lesquels le mouvement se communique de l'un à l'autre sont cachés à l'intérieur et échappent à notre vue; nous ignorons si la communication se fait par des engrenages ou par des courroies, par des bielles ou par d'autres dispositifs. Dirons-nous qu'il nous est impossible de rien comprendre à cette machine tant qu'on ne nous permettra pas de la démonter? Vous savez bien que non et que le principe de la conservation de l'énergie suffit pour nous fixer sur le point le plus intéressant; nous constatons aisément que la roue finale tourne dix fois moins vite que la roue initiale, puisque ces deux roues sont visibles; nous pouvons en conclure qu'un couple appliqué à la première fera équilibre à un couple dix fois plus grand appliqué à la seconde. Point n'est besoin pour cela de pénétrer le mécanisme de cet équilibre et de savoir comment les forces se compenseront à l'intérieur de la machine; c'est assez de s'assurer que cette compensation ne peut pas ne pas se produire.

Eh bien, en présence de l'Univers, le principe de la conservation de l'énergie peut nous rendre le même service. C'est aussi une machine, beaucoup plus compliquée que toutes celles de l'industrie, et dont presque toutes les parties nous sont profondément cachées; mais, en observant le mouvement de celles que nous pouvons voir, nous pouvons, en nous aidant de ce principe, tirer des conclusions qui resteront vraies quels que soient les détails du mécanisme invisible qui les anime.

Le principe de la conservation de l'énergie, ou principe de Mayer, est certainement le plus important, mais ce n'est pas le seul, il y en a d'autres dont nous pouvons tirer le même parti. Ce sont :

Le principe de Carnot, ou principe de la dégradation de l'énergie.

Le principe de Newton, ou principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Le principe de la relativité, d'après lequel les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme; de sorte que nous n'avons et ne pouvons avoir aucun moyen de discerner si nous sommes, oui ou non, emportés dans un pareil mouvement.

Le principe de la conservation de la masse, ou principe de Lavoisier.

J'ajouterai le principe de moindre action.

L'application de ces cinq ou six principes généraux aux différents phénomènes physiques suffit pour nous en apprendre ce que nous pouvons raisonnablement espérer en connaître. Le plus remarquable exemple de cette nouvelle Physique mathématique est sans contredit la théorie électromagnétique de la Lumière de Maxwell. Qu'est-ce que l'éther, comment sont disposées ses molécules, s'attirent-elles ou se repoussent-elles? nous n'en savons rien; mais nous savons que ce milieu transmet à la fois les perturbations optiques et les perturbations électriques; nous savons que cette transmission doit se faire conformément aux principes généraux de la Mécanique et cela nous suffit pour établir les équations du champ électromagnétique.

Ces principes sont des résultats d'expériences fortement généralisés; mais ils semblent emprunter à leur généralité même un degré éminent de certitude. Plus ils sont généraux, en effet, plus on a fréquemment l'occasion de les contrôler et les vérifications, en se multipliant, en prenant les formes les plus variées et les plus inattendues, finissent par ne plus laisser de place au doute.

Telle est la seconde phase de l'histoire de la Physique mathématique et nous n'en sommes pas encore sortis. Dirons-nous que la première a été inutile, que pendant cinquante ans la Science avait fait fausse route et qu'il n'y a plus qu'à oublier tant d'efforts accumulés qu'une conception vicieuse condamnait d'avance à l'insuccès? Pas le moins du monde. Croyez-vous que la seconde phase aurait pu exister sans la première? L'hypothèse des forces centrales contenait tous les principes; elle les entraînait comme des conséquences nécessaires; elle entraînait et la conservation de

l'énergie, et celle des masses, et l'égalité de l'action et de la réaction, et la loi de moindre action, qui apparaissaient, il est vrai, non comme des vérités expérimentales, mais comme des théorèmes; et dont l'énoncé avait en même temps je ne sais quoi de plus précis et de moins général que sous leur forme actuelle.

C'est la Physique mathématique de nos pères qui nous a familiarisés peu à peu avec ces divers principes, qui nous a habitués à les reconnaître sous les différents vêtements dont ils se déguisent. On les a comparés aux données de l'expérience, on a vu comment il fallait en modifier l'énoncé pour les adapter à ces données; par là on les a élargis et consolidés. On a été conduit ainsi à les regarder comme des vérités expérimentales; la conception des forces centrales devenait alors un soutien inutile, ou plutôt une gêne, puisqu'elle faisait participer les principes de son caractère hypothétique.

Les cadres ne sont donc pas brisés, parce qu'ils étaient élastiques; mais ils se sont élargis; nos pères, qui les avaient établis, n'avaient pas travaillé en vain; et nous reconnaissons dans la Science d'aujourd'hui les traits généraux de l'esquisse qu'ils avaient tracée.

Allons-nous entrer maintenant dans une troisième phase? Sommes-nous à la veille d'une seconde crise? Ces principes sur lesquels nous avons tout bâti vont-ils s'écrouler à leur tour? Depuis quelque temps, on peut se le demander.

En m'entendant parler ainsi, vous pensez sans doute au radium, ce grand révolutionnaire des temps présents, et, en effet, je vais y revenir tout à l'heure; mais il y a autre chose; ce n'est pas seulement la conservation de l'énergie qui est en cause; tous les autres principes sont également en danger, comme nous allons le voir en les passant successivement en revue.

Commençons par le principe de Carnot. C'est le seul qui ne se présente pas comme une conséquence immédiate de l'hypothèse des forces centrales; bien mieux, il semble sinon contredire directement cette hypothèse, du moins ne pas se concilier avec elle sans un certain effort. Si les phénomènes physiques étaient dus exclusivement aux mouvements d'atomes dont les attractions mutuelles ne dépendraient que de la distance, il semble que tous ces phénomènes devraient être réversibles; si toutes les vitesses ini-

tiales étaient renversées, ces atomes toujours soumis aux mêmes forces devraient parcourir leurs trajectoires en sens contraire, de même que la Terre décrirait dans le sens rétrograde cette même orbite elliptique qu'elle décrit dans le sens direct, si les conditions initiales de son mouvement avaient été renversées. A ce compte, si un phénomène physique est possible, le phénomène inverse doit l'être également et l'on doit pouvoir remonter le cours du temps. Or, il n'en est pas ainsi dans la Nature, et c'est précisément ce que le principe de Carnot nous enseigne, la chaleur peut passer du corps chaud sur le corps froid, et il est impossible ensuite de lui faire reprendre le chemin inverse et de rétablir des différences de température qui se sont effacées. Le mouvement peut être intégralement dissipé et transformé en chaleur par le frottement; la transformation contraire ne pourra jamais se faire que d'une manière partielle.

On s'est efforcé de concilier cette apparente contradiction. Si le monde tend vers l'uniformité, ce n'est pas parce que ses parties ultimes, d'abord dissemblables, tendent à devenir de moins en moins différentes, c'est parce que, se déplaçant au hasard, elles finissent par se mélanger. Pour un œil qui distinguerait tous les éléments, la variété resterait toujours aussi grande; chaque grain de cette poussière conserve son originalité et ne se modèle pas sur ses voisins; mais, comme le mélange devient de plus en plus intime, nos sens grossiers n'aperçoivent plus que l'uniformité. Voilà pourquoi, par exemple, les températures tendent à se niveler sans qu'il soit possible de revenir en arrière.

Qu'une goutte de vin tombe dans un verre d'eau : quelle que soit la loi du mouvement interne du liquide, nous le verrons bientôt se colorer d'une teinte rosée uniforme et, à partir de ce moment, on aura beau agiter le vase, le vin et l'eau ne paraîtront plus pouvoir se séparer. Ainsi voici quel serait le type du phénomène physique irréversible : cacher un grain d'orge dans un tas de blé, c'est facile; l'y retrouver ensuite et l'en faire sortir, c'est pratiquement impossible. Tout cela, Maxwell et Boltzmann l'ont expliqué, mais celui qui l'a vu le plus nettement, dans un livre trop peu lu parce qu'il est un peu difficile à lire, c'est Gibbs, dans ses principes élémentaires de Mécanique statique.

Pour ceux qui se placent à ce point de vue, le principe de Car-

not n'est qu'un principe imparfait, une sorte de concession à l'infirmité de nos sens; c'est parce que nos yeux sont trop grossiers que nous ne distinguons pas les éléments du mélange; c'est parce que nos mains sont trop grossières que nous ne savons pas les forcer à se séparer; le démon imaginaire de Maxwell, qui peut trier les molécules une à une, saurait bien contraindre le monde à revenir en arrière. Y peut-il revenir de lui-même, cela n'est pas impossible, cela n'est qu'infiniment peu probable; il y a des chances pour que nous attendions longtemps le concours des circonstances qui permettraient une rétrogradation; mais, tôt ou tard, elles se réaliseront, après des années dont il faudrait des millions de chiffres pour écrire le nombre. Ces réserves, cependant, restaient toutes théoriques, elles n'étaient pas bien inquiétantes et le principe de Carnot conservait toute sa valeur pratique. Mais voici que la scène change. Le biologiste, armé de son microscope, a remarqué il y a longtemps dans ses préparations des mouvements désordonnés des petites particules en suspension; c'est le mouvement brownien. Il a cru d'abord que c'était un phénomène vital, mais il a vu bientôt que les corps inanimés ne dansaient pas avec moins d'ardeur que les autres; il a alors passé la main aux physiciens. Malheureusement, les physiciens se sont longtemps désintéressés de cette question; on concentre de la lumière pour éclairer la préparation microscopique, pensaient-ils; la lumière ne va pas sans chaleur, de là des inégalités de température et dans le liquide des courants intérieurs qui produisent les mouvements dont on nous parle.

M. Gouy eut l'idée d'y regarder de plus près et il vit, ou crut voir, que cette explication est insoutenable, que les mouvements deviennent d'autant plus vifs que les particules sont plus petites, mais qu'ils ne sont pas influencés par le mode d'éclairage. Si alors ces mouvements ne cessent pas, ou plutôt renaissent sans cesse, sans rien emprunter à une source extérieure d'énergie, que devons-nous croire? Nous ne devons pas, sans doute, renoncer pour cela à la conservation de l'énergie, mais nous voyons sous nos yeux tantôt le mouvement se transformer en chaleur par le frottement, tantôt la chaleur se changer inversement en mouvement, et cela sans que rien ne se perde, puisque le mouvement dure toujours. C'est le contraire du principe de Carnot. S'il en est ainsi, pour

voir le monde revenir en arrière, nous n'avons plus besoin de l'œil infiniment subtil du démon de Maxwell, notre microscope nous suffit. Les corps trop gros, ceux qui ont, par exemple, un dixième de millimètre, sont heurtés de tous les côtés par les atomes en mouvement, mais ils ne bougent pas parce que ces chocs sont très nombreux et que la loi du hasard veut qu'ils se compensent; mais les particules plus petites reçoivent trop peu de chocs pour que cette compensation se fasse à coup sûr et sont incessamment ballottées. Et voilà déjà l'un de nos principes en péril.

Venons au principe de la relativité; celui-là non seulement est confirmé par l'expérience quotidienne, non seulement il est une conséquence nécessaire de l'hypothèse des forces centrales, mais il s'impose à notre bon sens d'une façon irrésistible; et pourtant lui aussi est battu en brèche. Supposons deux corps électrisés; bien qu'ils nous semblent en repos, ils sont l'un et l'autre entraînés par le mouvement de la Terre; une charge électrique en mouvement, Rowland nous l'a appris, équivaut à un courant; ces deux corps chargés équivaudront donc à deux courants parallèles et de même sens et ces deux courants devront s'attirer. En mesurant cette attraction, nous mesurerons la vitesse de la Terre; non pas sa vitesse par rapport au Soleil ou aux étoiles fixes, mais sa vitesse absolue.

Je sais bien ce qu'on va dire, ce n'est pas sa vitesse absolue que l'on mesure, c'est sa vitesse par rapport à l'éther. Que cela est peu satisfaisant! Ne voit-on pas que du principe ainsi compris on ne pourra plus rien tirer? Il ne pourrait plus rien nous apprendre justement parce qu'il ne craindrait plus aucun démenti. Si nous parvenons à mesurer quelque chose, nous serons toujours libres de dire que ce n'est pas la vitesse absolue, et si ce n'est pas la vitesse par rapport à l'éther, cela pourra toujours être la vitesse par rapport à quelque nouveau fluide inconnu dont nous remplirions l'espace.

Aussi bien l'expérience s'est chargée de ruiner cette interprétation du principe de relativité; toutes les tentatives pour mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther ont abouti à des résultats négatifs. Cette fois la Physique expérimentale a été plus fidèle au principe que la Physique mathématique; les théoriciens en auraient fait bon marché afin de mettre en concordance les autres

vues générales; mais l'expérience s'est obstinée à le confirmer. On a varié les moyens, enfin Michelson a poussé la précision jusqu'à ses dernières limites; rien n'y a fait. C'est précisément pour expliquer cette obstination que les mathématiciens sont forcés aujourd'hui de déployer toute leur ingéniosité.

Leur tâche n'était pas facile, et si Lorentz s'en est tiré, ce n'est qu'en accumulant les hypothèses.

L'idée la plus ingénieuse a été celle du temps local. Imaginons deux observateurs qui veulent régler leurs montres par des signaux optiques; ils échangent des signaux, mais, comme ils savent que la transmission de la lumière n'est pas instantanée, ils prennent soin de les croiser. Quand la station B aperçoit le signal de la station A, son horloge ne doit pas marquer la même heure que celle de la station A au moment de l'émission du signal, mais cette heure augmentée d'une constante représentant la durée de la transmission. Supposons, par exemple, que la station A envoie son signal quand son horloge marque l'heure zéro, et que la station B l'aperçoive quand son horloge marque l'heure t. Les horloges sont réglées si le retard égal à t représente la durée de la transmission, et pour le vérifier la station B expédie à son tour un signal quand son horloge marque zéro, la station A doit alors l'apercevoir quand son horloge marque t. Les montres sont alors réglées.

Et, en effet, elles marquent la même heure au même instant physique, mais à une condition, c'est que les deux stations soient fixes. Dans le cas contraire, la durée de la transmission ne sera pas la même dans les deux sens, puisque la station A, par exemple, marche au devant de la perturbation optique émanée de B, tandis que la station B fuit devant la perturbation émanée de A. Les montres réglées de la sorte ne marqueront donc pas le temps vrai, elles marqueront ce qu'on peut appeler le *temps local*, de sorte que l'une d'elles retardera sur l'autre. Peu importe, puisque nous n'avons aucun moyen de nous en apercevoir. Tous les phénomènes qui se produiront en A, par exemple, seront en retard, mais tous le seront également, et l'observateur ne s'en apercevra pas puisque sa montre retarde; ainsi, comme le veut le principe de relativité, il n'aura aucun moyen de savoir s'il est en repos ou en mouvement absolu.

Cela malheureusement ne suffit pas, et il faut des hypothèses

complémentaires; il faut admettre que les corps en mouvement subissent une contraction uniforme dans le sens du mouvement. L'un des diamètres de la Terre, par exemple, est raccourci de $\frac{1}{200000000}$ par suite du mouvement de notre planète, tandis que l'autre diamètre conserve sa longueur normale. Ainsi se trouvent compensées les dernières petites différences. Et puis il y a encore l'hypothèse sur les forces. Les forces, quelle que soit leur origine, la pesanteur comme l'élasticité, seraient réduites dans une certaine proportion, dans un monde animé d'une translation uniforme, ou plutôt c'est ce qui arriverait pour les composantes perpendiculaires à la translation; les composantes parallèles ne changeraient pas. Reprenons alors notre exemple de deux corps électrisés; ces corps se repoussent, mais en même temps, si tout est entraîné dans une translation uniforme, ils équivalent à deux courants parallèles et de même sens qui s'attirent.

Cette attraction électrodynamique se retranche donc de la répulsion électrostatique et la répulsion totale est plus faible que si les deux corps étaient en repos. Mais comme, pour mesurer cette répulsion, nous devons l'équilibrer par une autre force, et que toutes ces autres forces sont réduites dans la même proportion, nous ne nous apercevons de rien. Tout semble ainsi arrangé, mais tous les doutes sont-ils dissipés? Qu'arriverait-il si l'on pouvait communiquer par des signaux qui ne seraient plus lumineux et dont la vitesse de propagation différerait de celle de la lumière? Si, après avoir réglé les montres par le procédé optique, on voulait vérifier le réglage à l'aide de ces nouveaux signaux, on constaterait des divergences qui mettraient en évidence la translation commune des deux stations. Et de pareils signaux sont-ils inconcevables, si l'on admet avec Laplace que la gravitation universelle se transmet un million de fois plus vite que la lumière?

Ainsi le principe de la relativité a été dans ces derniers temps vaillamment défendu, mais l'énergie même de la défense prouve combien l'attaque était sérieuse.

Parlons maintenant du principe de Newton, sur l'égalité de l'action et de la réaction. Celui-ci est intimement lié au précédent et il semble bien que la chute de l'un entraînerait celle de l'autre. Aussi ne devons-nous pas nous étonner de retrouver ici les mêmes difficultés.

Les phénomènes électriques, pense-t-on, sont dus aux déplacements de petites particules chargées appelées *électrons* et plongées dans le milieu que nous nommons *éther*. Les mouvements de ces électrons produisent des perturbations dans l'éther avoisinant; ces perturbations se propagent dans tous les sens avec la vitesse de la lumière, et à leur tour d'autres électrons, primitivement en repos, se trouvent ébranlés quand la perturbation atteint les parties de l'éther qui les touchent. Les électrons agissent donc les uns sur les autres, mais cette action n'est pas directe, elle se fait par l'intermédiaire de l'éther. Dans ces conditions peut-il y avoir compensation entre l'action et la réaction, du moins pour un observateur qui ne tiendrait compte que des mouvements de la matière, c'est-à-dire des électrons, et qui ignorerait ceux de l'éther qu'il ne peut pas voir? Évidemment non. Quand même la compensation serait exacte elle ne saurait être simultanée. La perturbation se propage avec une vitesse finie; elle n'atteint donc le second électron que quand le premier est depuis longtemps rentré dans le repos. Ce second électron subira donc, avec un retard, l'action du premier, mais certainement à ce moment il ne réagira pas sur lui puisque autour de ce premier électron rien ne bouge plus.

L'analyse des faits va nous permettre de préciser davantage. Imaginons, par exemple, un excitateur de Herz comme ceux que l'on emploie en télégraphie sans fil; il envoie de l'énergie dans tous les sens; mais nous pouvons le munir d'un miroir parabolique, comme l'a fait Herz avec ses plus petits excitateurs, afin de renvoyer toute l'énergie produite dans une seule direction. Qu'arrive-t-il alors, d'après la théorie? c'est que l'appareil va reculer, comme s'il était un canon et si l'énergie qu'il a projetée était un boulet, et cela est contraire au principe de Newton, puisque notre projectile ici n'a pas de masse, ce n'est pas de la matière, c'est de l'énergie. Il en est encore de même d'ailleurs avec un phare pourvu d'un réflecteur, puisque la lumière n'est autre chose qu'une perturbation du champ électromagnétique. Ce phare devra reculer comme si la lumière qu'il envoie était un projectile. Quelle est la force qui doit produire ce recul? c'est ce qu'on a appelé la *pression Maxwell-Bartholdi;* elle est très petite et l'on a eu bien du mal à la mettre en évidence avec les radiomètres les plus sensibles; mais il suffit qu'elle existe.

Si toute l'énergie issue de notre excitateur va tomber sur un récepteur, celui-ci se comportera comme s'il avait reçu un choc mécanique, qui représentera en un sens la compensation du recul de l'excitateur; la réaction sera égale à l'action, mais elle ne sera pas simultanée, le récepteur avancera, mais pas au moment où l'excitateur reculera. Si l'énergie se propage indéfiniment sans rencontrer de récepteur, la compensation ne se fera jamais.

Dira-t-on que l'espace qui sépare l'excitateur du récepteur et que la perturbation doit parcourir pour aller de l'un à l'autre n'est pas vide, qu'il est rempli, non seulement d'éther, mais d'air, ou même, dans les espaces interplanétaires, de quelque fluide subtil, mais encore pondérable; que cette matière subit le choc comme le récepteur au moment où l'énergie l'atteint et recule à son tour quand la perturbation la quitte? Cela sauverait le principe de Newton, mais cela n'est pas vrai; si l'énergie en se propageant restait toujours attachée à quelque substratum matériel, la matière en mouvement entraînerait la lumière avec elle et Fizeau a démontré qu'il n'en est rien, au moins pour l'air. C'est ce que Michelson et Morley ont confirmé depuis. On peut supposer aussi que les mouvements de la matière proprement dite sont exactement compensés par ceux de l'éther, mais cela nous amènerait aux mêmes réflexions que tout à l'heure. Le principe ainsi entendu pourra tout expliquer, puisque, quels que soient les mouvements visibles, on aura toujours la faculté d'imaginer des mouvements hypothétiques qui les compensent. Mais, s'il peut tout expliquer, c'est qu'il ne nous permet de rien prévoir, il ne nous permet pas de choisir entre les différentes hypothèses possibles, puisqu'il explique tout d'avance. Il devient donc inutile.

Et puis les suppositions qu'il faudrait faire sur les mouvements de l'éther ne sont pas très satisfaisantes. Si les charges électriques doublent, il serait naturel d'imaginer que les vitesses des divers atomes d'éther doublent aussi et, pour la compensation, il faut que la vitesse moyenne de l'éther quadruple.

C'est pourquoi j'ai longtemps pensé que ces conséquences de la théorie, contraires au principe de Newton, finiraient un jour par être abandonnées et pourtant les expériences récentes sur les mouvements des électrons issus du radium semblent plutôt les confirmer.

J'arrive au principe de Lavoisier sur la conservation des masses. Certes, c'en est un auquel on ne saurait toucher sans ébranler la Mécanique. Et maintenant certaines personnes pensent qu'il ne nous paraît vrai que parce qu'on ne considère en Mécanique que des vitesses modérées, mais qu'il cesserait de l'être pour des corps animés de vitesses comparables à celle de la lumière. Or, ces vitesses, on croit maintenant les avoir réalisées; les rayons cathodiques et ceux du radium seraient formés de particules très petites ou d'électrons qui se déplaceraient avec des vitesses, plus petites sans doute que celle de la lumière, mais qui en seraient le dixième ou le tiers.

Ces rayons peuvent être déviés soit par un champ électrique, soit par un champ magnétique et l'on peut, en comparant ces déviations, mesurer à la fois la vitesse des électrons et leur masse (ou plutôt le rapport de leur masse à leur charge). Mais, quand on a vu que ces vitesses se rapprochaient de celle de la lumière, on s'est avisé qu'une correction était nécessaire. Ces molécules, étant électrisées, ne peuvent se déplacer sans ébranler l'éther; pour les mettre en mouvement, il faut triompher d'une double inertie, de celle de la molécule elle-même et de celle de l'éther. La masse totale ou apparente que l'on mesure se compose donc de deux parties : la masse réelle ou mécanique de la molécule, et la masse électro-dynamique représentant l'inertie de l'éther.

Les calculs d'Abraham et les expériences de Kauffmann ont alors montré que la masse mécanique proprement dite est nulle et que la masse des électrons, ou au moins des électrons négatifs, est d'origine exclusivement électro-dynamique. Voilà qui nous force à changer la définition de la masse; nous ne pouvons plus distinguer la masse mécanique et la masse électro-dynamique, parce qu'alors la première s'évanouirait; il n'y a pas d'autre masse que l'inertie électro-dynamique; mais dans ce cas la masse ne peut plus être constante, elle augmente avec la vitesse; et même, elle dépend de la direction, et un corps animé d'une vitesse notable n'opposera pas la même inertie aux forces qui tendent à le dévier de sa route, et à celles qui tendent à accélérer ou à retarder sa marche.

Il y a bien encore une ressource : les éléments ultimes des corps sont des électrons, les uns chargés négativement, les autres chargés

positivement. Les électrons négatifs n'ont pas de masse, c'est entendu; mais les électrons positifs, d'après le peu qu'on en sait, semblent beaucoup plus gros. Peut-être ont-ils, outre leur masse électro-dynamique, une vraie masse mécanique. La véritable masse d'un corps, ce serait alors la somme des masses mécaniques de ses électrons positifs, les électrons négatifs ne compteraient pas; la masse ainsi définie pourrait encore être constante.

Hélas! cette ressource aussi nous échappe. Rappelons-nous ce que nous avons dit au sujet du principe de relativité et des efforts faits pour le sauver. Et ce n'est pas seulement un principe qu'il s'agit de sauver, ce sont les résultats indubitables des expériences de Michelson. Eh bien, ainsi que nous l'avons vu plus haut, pour rendre compte de ces résultats, Lorentz a été obligé de supposer que toutes les forces, quelle que soit leur origine, étaient réduites dans la même proportion dans un milieu animé d'une translation uniforme; ce n'est pas assez, il ne suffit pas que cela ait lieu pour les forces réelles, il faut encore qu'il en soit de même pour les forces d'inertie; il faut donc, dit-il, que *les masses de toutes les particules soient influencées par une translation au même degré que les masses électro-magnétiques des électrons*.

Ainsi les masses mécaniques doivent varier d'après les mêmes lois que les masses électro-dynamiques; elles ne peuvent donc pas être constantes.

Ai-je besoin de faire observer que la chute du principe de Lavoisier entraîne celle du principe de Newton. Ce dernier signifie que le centre de gravité d'un système isolé se meut en ligne droite; mais, s'il n'y a plus de masse constante, il n'y a plus de centre de gravité, on ne sait même plus ce que c'est. C'est pourquoi j'ai dit plus haut que les expériences sur les rayons cathodiques avaient paru justifier les doutes de Lorentz au sujet du principe de Newton.

De tous ces résultats, s'ils se confirmaient, sortirait une mécanique entièrement nouvelle qui serait surtout caractérisée par ce fait qu'aucune vitesse ne pourrait dépasser celle de la lumière [1], pas plus qu'aucune température ne peut tomber au-dessous du

---

[1] Car les corps opposeraient une inertie croissante aux causes qui tendraient à accélérer leur mouvement; et cette inertie deviendrait infinie quand on approcherait de la vitesse de la lumière.

zéro absolu. Pour un observateur, entraîné lui-même dans une translation dont il ne se doute pas, aucune vitesse apparente ne pourrait non plus dépasser celle de la lumière; et ce serait là une contradiction, si l'on ne se rappelait que cet observateur ne se servirait pas des mêmes horloges qu'un observateur fixe, mais bien d'horloges marquant le « temps local ».

Nous voici alors en face d'une question que je me borne à poser. S'il n'y a plus de masse, que devient la loi de Newton?

La masse a deux aspects : c'est à la fois un coefficient d'inertie et une masse attirante entrant comme facteur dans l'attraction newtonienne. Si le coefficient d'inertie n'est pas constant, la masse attirante pourra-t-elle l'être? Voilà la question.

Du moins le principe de la conservation de l'énergie nous restait encore et celui-là paraissait plus solide. Vous rappellerai-je comment il fut à son tour jeté en discrédit? L'événement a fait plus de bruit que les précédents et il est dans toutes les mémoires. Dès les premiers travaux de Becquerel et surtout quand les Curie eurent découvert le radium, on vit que tout corps radioactif était une source inépuisable de radiation. Son activité semblait subsister sans altération à travers les mois et les années. C'était déjà là une entorse aux principes; ces radiations, c'était en effet de l'énergie, et de ce même morceau de radium, il en sortait et il en sortait toujours. Mais ces quantités d'énergie étaient trop faibles pour être mesurées; du moins on le croyait et l'on ne s'en inquiétait pas trop.

La scène changea quand Curie s'avisa de mettre le radium dans un calorimètre; on vit alors que la quantité de chaleur incessamment créée était très notable.

Les explications proposées furent nombreuses; mais en pareille matière on ne peut pas dire qu'abondance de biens ne nuit pas; tant que l'une d'elles n'aura pas triomphé des autres, nous ne pourrons pas être sûrs qu'aucune d'entre elles soit bonne. Depuis quelque temps toutefois, une de ces explications semble prendre le dessus et l'on peut raisonnablement espérer que nous tenons la clef du mystère.

Sir W. Ramsay a cherché à montrer que le radium se transforme, qu'il renferme une provision d'énergie énorme, mais non inépuisable. La transformation du radium produirait alors un

million de fois plus de chaleur que toutes les transformations connues; le radium s'épuiserait en 1250 ans; c'est bien court, mais vous voyez que nous sommes du moins certains d'être fixés sur ce point d'ici quelques centaines d'années. En attendant nos doutes subsistent.

Au milieu de tant de ruines, que reste-t-il debout? Le principe de moindre action est intact jusqu'ici, et Larmor paraît croire qu'il survivra longtemps aux autres; il est en effet plus vague et plus général encore.

En présence de cette débâcle générale des principes, quelle attitude va prendre la Physique mathématique? Et d'abord, avant de trop s'émouvoir, il convient de se demander si tout cela est bien vrai. Toutes ces dérogations aux principes, on ne les rencontre que dans les infiniment petits; il faut le microscope pour voir le mouvement brownien; les électrons sont bien légers; le radium est bien rare et l'on n'en a jamais que quelques milligrammes à la fois; et alors on peut se demander si, à côté de l'infiniment petit qu'on a vu, il n'y avait pas un autre infiniment petit qu'on ne voyait pas et qui faisait contre-poids au premier.

Il y a donc là une question préjudicielle, et à ce qu'il semble l'expérience seule peut la résoudre. Nous n'aurions donc qu'à passer la main aux expérimentateurs et, en attendant qu'ils aient tranché définitivement le débat, à ne pas nous préoccuper de ces inquiétants problèmes, et à continuer tranquillement notre œuvre comme si les principes étaient encore incontestés. Certes nous avons beaucoup à faire sans sortir du domaine où l'on peut les appliquer en toute sûreté; nous avons de quoi employer notre activité pendant cette période de doutes.

Et pourtant ces doutes, est-il bien vrai que nous ne puissions rien faire pour en débarrasser la Science? Il faut bien le dire, ce n'est pas seulement la physique expérimentale qui les a fait naître, la physique mathématique y a bien contribué pour sa part. Ce sont les expérimentateurs qui ont vu le radium dégager de l'énergie, mais ce sont les théoriciens qui ont mis en évidence toutes les difficultés soulevées par la propagation de la lumière à travers un milieu en mouvement; sans eux il est probable qu'on ne s'en serait pas avisé. Eh bien, alors, s'ils ont fait de leur mieux pour nous mettre dans l'embarras, il convient aussi qu'ils nous aident à en sortir.

Il faut qu'ils soumettent à la critique toutes ces vues nouvelles que je viens d'esquisser devant vous, et qu'ils n'abandonnent les principes qu'après avoir fait un effort loyal pour les sauver. Que peuvent-ils faire dans ce sens? C'est ce que je vais chercher à expliquer.

Parmi les problèmes les plus intéressants de la Physique mathématique, il convient de faire une place à part à ceux qui se rapportent à la théorie cinétique des gaz.

On a déjà beaucoup fait pour les résoudre, mais il reste encore beaucoup à faire. Cette théorie est un éternel paradoxe. Nous avons la réversibilité dans les prémisses et l'irréversibilité dans les conclusions; et entre les deux un abîme; les considérations statistiques, la loi des grands nombres suffisent-elles pour le combler? Bien des points restent encore obscurs sur lesquels il faudra revenir et sans doute à plusieurs reprises. En les éclaircissant on comprendra mieux le sens du principe de Carnot, et sa place dans l'ensemble de la Dynamique, et l'on sera mieux armé pour interpréter convenablement la curieuse expérience de Gouy dont je parlais plus haut.

Ne devrions-nous pas aussi nous efforcer d'obtenir une théorie plus satisfaisante de l'électrodynamique des corps en mouvement? C'est là surtout, je l'ai suffisamment montré plus haut, que les difficultés s'accumulent; on a beau entasser les hypothèses, on ne peut satisfaire à tous les principes à la fois; on n'a pu réussir jusqu'ici à sauvegarder les uns qu'à la condition de sacrifier les autres; mais tout espoir d'obtenir de meilleurs résultats n'est pas encore perdu. Prenons donc la théorie de Lorentz, retournons-la dans tous les sens; modifions-la peu à peu, et tout s'arrangera peut-être.

Ainsi, au lieu de supposer que les corps en mouvement subissent une contraction dans le sens du mouvement et que cette contraction est la même quelles que soient la nature de ces corps et les forces auxquelles ils sont d'ailleurs soumis, ne pourrait-on pas faire une hypothèse plus simple et plus naturelle? On pourrait imaginer, par exemple, que c'est l'éther qui se modifie quand il se trouve en mouvement relatif par rapport au milieu matériel qui le pénètre, que, quand il est ainsi modifié, il ne transmet plus les perturbations avec la même vitesse dans tous les sens. Il transmettrait plus

rapidement celles qui se propageraient parallèlement au mouvement du milieu, soit dans le même sens, soit en sens contraire, et moins rapidement celles qui se propageraient perpendiculairement. Les surfaces d'onde ne seraient plus des sphères, mais des ellipsoïdes et l'on pourrait se passer de cette extraordinaire contraction de tous les corps.

Je ne cite cela qu'à titre d'exemple, car les modifications que l'on pourrait essayer seraient évidemment susceptibles de varier à l'infini.

Il est possible aussi que l'Astronomie nous fournisse un jour des données sur ce point: c'est elle, en somme, qui a soulevé la question en nous faisant connaître le phénomène de l'aberration de la lumière. Si l'on fait brutalement la théorie de l'aberration, on arrive à un résultat bien curieux. Les positions apparentes des étoiles diffèrent de leurs positions réelles, à cause du mouvement de la Terre et, comme ce mouvement est variable, ces positions apparentes varient. La position réelle nous ne pouvons la connaître, mais nous pouvons observer les variations de la position apparente. Les observations de l'aberration nous montrent donc non le mouvement de la Terre, mais les variations de ce mouvement; elles ne peuvent par conséquent nous renseigner sur le mouvement absolu de la Terre.

C'est du moins ce qui est vrai en première approximation, mais il n'en serait plus de même si l'on pouvait apprécier les millièmes de seconde. On verrait alors que l'amplitude de l'oscillation dépend non seulement de la variation du mouvement, variation qui est bien connue, puisque c'est le mouvement de notre globe sur son orbite elliptique, mais de la valeur moyenne de ce mouvement, de sorte que la constante de l'aberration ne serait pas tout à fait la même pour toutes les Étoiles, et que les différences nous feraient connaître le mouvement absolu de la Terre dans l'espace.

Ce serait là, sous une autre forme, la ruine du principe de la relativité. Nous sommes loin, il est vrai, d'apprécier le millième de seconde, mais après tout, disent quelques personnes, la vitesse absolue totale de la Terre est peut-être beaucoup plus grande que sa vitesse relative par rapport au Soleil; si elle était, par exemple, de 300^{km} par seconde au lieu de 30^{km}, cela suffirait pour que le phénomène devînt observable.

Je crois qu'en raisonnant ainsi on admet une théorie trop simpliste de l'aberration; Michelson nous a montré, je vous l'ai dit, que les procédés physiques sont impuissants à mettre en évidence le mouvement absolu; je suis persuadé qu'il en sera de même des procédés astronomiques quelque loin que l'on pousse la précision.

Quoi qu'il en soit, les données que l'Astronomie nous fournira dans ce sens seront un jour précieuses pour le physicien. En attendant, je crois que les théoriciens, se rappelant l'expérience de Michelson, peuvent escompter un résultat négatif, et qu'ils feraient œuvre utile en construisant une théorie de l'aberration qui en rendrait compte d'avance.

Mais revenons sur la Terre; là aussi nous pouvons aider les expérimentateurs. Nous pouvons, par exemple, préparer le terrain en étudiant à fond la dynamique des électrons; non pas, bien entendu, en partant d'une hypothèse unique, mais en multipliant les hypothèses autant que possible; ce sera ensuite aux physiciens à utiliser notre travail pour chercher l'expérience cruciale qui doit décider entre elles.

Cette dynamique des électrons peut être abordée par bien des côtés; mais, parmi les chemins qui y conduisent, il y en a un qui a été quelque peu négligé, et c'est pourtant un de ceux qui nous promettent le plus de surprises. Ce sont les mouvements des électrons qui produisent les raies des spectres d'émission; ce qui le prouve, c'est le phénomène de Zeemann; dans un corps incandescent, ce qui vibre est sensible à l'aimant, donc électrisé. C'est là un premier point très important, mais on n'est pas entré plus avant; pourquoi les raies du spectre sont-elles distribuées d'après une loi régulière? Ces lois ont été étudiées par les expérimentateurs dans leurs moindres détails; elles sont très précises et relativement simples. La première étude de ces distributions fait songer aux harmoniques que l'on rencontre en Acoustique; mais la différence est grande; non seulement les nombres de vibrations ne sont pas les multiples successifs d'un même nombre; mais nous ne retrouvons même rien d'analogue aux racines de ces équations transcendantes auxquelles nous conduisent tant de problèmes de Physique mathématique : celui des vibrations d'un corps élastique de forme quelconque, celui des oscillations hertziennes dans un excitateur

de forme quelconque, le problème de Fourier pour le refroidissement d'un corps solide.

Les lois sont plus simples, mais elles sont de tout autre nature et, pour ne citer qu'une de ces différences, pour les harmoniques d'ordre élevé le nombre des vibrations tend vers une limite finie, au lieu de croître indéfiniment.

De cela on n'a pas encore rendu compte, et je crois que c'est là un des plus importants secrets de la nature. Lindemann a fait une louable tentative, mais à mon avis sans succès; cette tentative, il faudrait la renouveler. Nous pénétrerons ainsi pour ainsi dire dans l'intimité de la matière. Et, au point de vue particulier qui nous occupe aujourd'hui, quand nous saurons pourquoi les vibrations des corps incandescents diffèrent ainsi des vibrations élastiques ordinaires, pourquoi les électrons ne se comportent pas comme la matière qui nous est familière, nous comprendrons mieux la dynamique des électrons et il nous sera peut-être plus facile de la concilier avec les principes.

Supposons maintenant que tous ces efforts échouent et, tout compte fait, je ne le crois pas; que faudra-t-il faire? Faudra-t-il chercher à raccommoder les principes ébréchés, en donnant ce que nous autres Français nous appelons un coup de pouce? Cela est évidemment toujours possible et je ne retire rien de ce que j'ai dit autrefois. N'avez-vous pas écrit, pourriez-vous me dire si vous vouliez me chercher querelle, n'avez-vous pas écrit que les principes, quoique d'origine expérimentale, sont maintenant hors des atteintes de l'expérience parce qu'ils sont devenus des conventions? Et maintenant vous venez nous dire que les conquêtes les plus récentes de l'expérience mettent ces principes en danger.

Et bien, j'avais raison autrefois et je n'ai pas tort aujourd'hui. J'avais raison autrefois et ce qui se passe maintenant en est une preuve nouvelle. Prenons, par exemple, l'expérience calorimétrique de Curie sur le radium. Est-il possible de la concilier avec le principe de la conservation de l'énergie? On l'a tenté de bien des manières; mais il y en a une entre autres que je voudrais vous faire remarquer; ce n'est pas l'explication qui tend aujourd'hui à prévaloir, mais c'est une de celles qui ont été proposées. On a supposé que le radium n'était qu'un intermédiaire, qu'il ne faisait qu'emmaganiser des radiations de nature inconnue qui sillonnaient

l'espace dans tous les sens, en traversant tous les corps, sauf le radium, sans être altérées par ce passage et sans exercer sur eux aucune action. Le radium seul leur prendrait un peu de leur énergie et il nous la rendrait ensuite sous diverses formes.

Quelle explication avantageuse et combien elle est commode! D'abord elle est invérifiable et par là même irréfutable. Ensuite elle peut servir pour rendre compte de n'importe quelle dérogation au principe de Mayer; elle répond d'avance non seulement à l'objection de Curie, mais à toutes les objections que les expérimentateurs futurs pourraient accumuler. Cette énergie nouvelle et inconnue pourra servir à tout.

C'est bien ce que j'avais dit, et avec cela on nous montre bien que notre principe est hors des atteintes de l'expérience.

Et après, qu'avons-nous gagné à ce coup de pouce? Le principe est intact, mais à quoi désormais peut-il servir? Il nous permettait de prévoir que dans telle ou telle circonstance nous pouvions compter sur telle quantité totale d'énergie; il nous limitait; mais maintenant qu'on met à notre disposition cette provision indéfinie d'énergie nouvelle, nous ne sommes plus limités par rien; et, comme je l'avais écrit aussi, si un principe cesse d'être fécond, l'expérience, sans le contredire directement, l'aura cependant condamné.

Ce n'est donc pas cela qu'il faudrait faire; nous devrions rebâtir à neuf. Si l'on était acculé à cette nécessité, nous pourrions d'ailleurs nous en consoler. Il ne faudrait pas en conclure que la Science ne peut faire qu'un travail de Pénélope, qu'elle ne peut élever que des constructions éphémères qu'elle est bientôt forcée de démolir de fond en comble de ses propres mains.

Comme je vous l'ai dit, nous avons déjà passé par une crise semblable. Je vous ai montré que, dans la seconde Physique mathématique, celle des principes, on retrouve les traces de la première, celle des forces centrales; il en sera encore de même si nous devons en connaître une troisième. Tel l'animal qui mue, qui brise sa carapace trop étroite et s'en fait une plus jeune; sous son enveloppe nouvelle, on reconnaîtra aisément les traits essentiels de l'organisme qui ont subsisté.

Dans quel sens allons-nous nous étendre, nous ne pouvons le prévoir; peut-être est-ce la théorie cinétique des gaz qui va prendre

du développement et servir de modèle aux autres. Alors les faits qui d'abord nous apparaissaient comme simples ne seraient plus que les résultantes d'un très grand nombre de faits élémentaires que les lois seules du hasard feraient concourir à un même but. La loi physique alors prendrait un aspect entièrement nouveau; ce ne serait plus seulement une équation différentielle, elle prendrait le caractère d'une loi statistique.

Peut-être aussi devons-nous construire toute une Mécanique nouvelle que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable. La Mécanique vulgaire, plus simple, resterait une première approximation puisqu'elle serait vraie pour les vitesses qui ne seraient pas très grandes, de sorte qu'on retrouverait encore l'ancienne Dynamique sous la nouvelle. Nous n'aurions pas à regretter d'avoir cru aux principes, et même, comme les vitesses trop grandes pour les anciennes formules ne seraient jamais qu'exceptionnelles, le plus sûr dans la pratique serait encore de faire comme si l'on continuait à y croire. Ils sont si utiles qu'il faudrait leur conserver une place. Vouloir les exclure tout à fait, ce serait se priver d'une arme précieuse. Je me hâte de dire, pour terminer, que nous n'en sommes pas là et que rien ne prouve encore qu'ils ne sortiront pas de la lutte victorieux et intacts.



BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Jordan (W.). — *Handbuch der Vermessungskunde.* 1. Bd., 5. Aufl., durchgesehen von C. Reinhertz. 1. Lfg. Gr. in-8°. Stuttgart, Metzler. 7 m.

— *Handbuch der Vermessungskunde.* 2. Bd. *Feld- und Landmessung.* 6. Aufl., bearb. von C. Reinhertz. Gr. in-8°, XIV-863 et 47 p. avec gravure sur bois. Stuttgart, Metzler. 17 m. 80 pf.

APPELL (P.). — *Traité de Mécanique rationnelle*, 2[e] édit., Tome II. In-8°, VIII-552 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

FOURNIER (E.-F.). — *Recherches des lois dynamiques de l'air dans les cylones et leur application à la détermination de la route de sécurité des navires dans ces ouragans.* In-8°, 47 p. avec fig. Paris, Chapelot et C[ie]. 3 fr.

GIBBS (J.-W.). — *Diagrammes et surfaces thermodynamiques* (Collection *Scientia*, série physico-mathématique, n° 22). Traduit par G. Roy. In-8°, 86 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

HADAMARD (J.). — *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.* In-8°, XIII-377 p. avec fig. Paris, Hermann.

MACH (E.). — *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement.* Traduit de l'allemand par E. Bertrand. In-8°, IX-499 p. avec fig. Paris, Hermann.

THEVENET. — *Recherches de Thermodynamique sur la distribution des éléments météorologiques à l'intérieur des masses d'air en mouvement.* Petit in-4°, X-94 p. avec fig. Alger, Jourdan.

WIEBE (H.-F.). — *Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfes zwischen* 76 *u.* 101,1 *Grad bezogen auf das Luftthermometer.* 2. Aufl. Gr. in-8°, IX-II-30 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 2 m. 80 pf.; relié, 3 m. 60 pf.

ANNALES *de l'Observatoire de Paris*, publiées sous la direction de Maurice Lœwy. (*Observations*, année 1899). In-4°, VIII-534 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

BERICHTE *mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn.* Herausgeg. von R. Baron v. Eötvös u. A. 19. Bd., 1901. Gr. in-8°, XIV-492 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

ENCKE (J.-F.). — *Ueber die Bestimmung der elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen.* — HANSEN (P.-A.). — *Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen.* (*Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissenschaften.*, n° 141.) Herausgeg. v. J. Bauschinger. In-8°, 162 p. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m. 50 pf.

FORT (O.) et SCHLÖMILCH (O.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* 1. Tl. 7. Aufl., besorgt v. R. Heger. Gr. in-8°, XVII-268 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 4 m.; relié, 4 m. 80 pf.

GEISSLER (KURT). — *Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde.* Gr. in-8°, VI-199 p. avec 52 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 3 m.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann. Herausgeg. von Emil Lampe u. G. Wallenberg. 32. Bd. Jahrg. 1901. 3. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 12 m. 40 pf.

Nielsen (Niels). — *Handbuch d. Theorie d. Cylinderfunktionen.* Gr. in-8°, 408 p. Leipzig, Teubner. Relié, 14 m.

Bauschinger (J.). — *Genäherte Oppositions-Ephemeriden von* 41 *kleinen Planeten f.* 1904 *Januar bis August.* 15 p. (*Veröffentlichungen des königl. astronom. Rechen-Instituts zu Berlin,* n° 22). In-4°. Berlin, Dümmler. 1 m. 20 pf.

— *Ueber das Problem der Bahnverbesserung.* 35 p. avec 1 planche (*Ibid.,* n° 23).

Zimmermann (H.). – *Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerthe.* 9.-11. Tausend. In-8°, xxxiv-204 p. Berlin, Ernst und Sohn. Relié, 5 m.

Burali-Forti (C.). — *Lezioni di geometrica metrico-proiettiva.* In-8°. Torino, Bocca. 8 l.

Grünbaum (Heinr.). — *Isolierte eine reine Gruppen und Marbe'sche Zahl p*; eine kritische Studie zur Wahrscheinlichkeitslehre. Gr. in-8°, 34 p. Würzburg, Ballhorn et Gramer. 1 m. 20 pf.

Jahresbericht *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* In Monatsheften herausgeg. von A. Gutzmer. 13. Bd., 12. Hefte (1. Heft., 32 p.). Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 18 m.

Klein (Felix). — *Ueber die Aufgaben u. die Zukunft der philosophischen Fakultät.* Rede. Gr. in-8°, 13 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 40 pf.

Leaming (J.). — *Quantity surveying.* 5e édit. In-8°, 944 p. London, Spon. 25 sh.

Pickering (W.-H.). — *Photographic atlas of the Moon.* 86 planches. In-4°. London, Wesley. 25 sh.

Rosenmund (M.). — *Die Aenderung des Projektionssystems d. schweiz. Landesvermessung.* Gr. in-8°, viii-117-20 p. avec 1 planche. Bern, Francke. Relié, 5 m. 50 pf.

Stroobant (P.). — *Précis d'Astronomie pratique.* In-12, 188 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 50.

Schumann (R.). — *Ergebnisse einer Untersuchung über Verändergn.*

von Höhenunterschieden auf dem Telegraphenberge bei Potsdam. III-42 p. avec 4 planches (*Veröffentlichungen des königl. preuss. geodätischen Instituts.* Neue Folge. N° 14). In-8°. Berlin, Stankiewicz. 3 m.

FIEDLER (WILH.). — *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.* 4e édit., 1re partie. Gr. in-8°, XXIV-431 p. avec fig. et 2 planches. Leipzig, Teubner. 10 m.; relié, 11 m.

GOLDBERG (ALF.). — *Sur certaines équations aux différences.* In-8°, Christiania, Cammermeyer. 80 ö.

— *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, die gemeinsame Lösungen besitzen* In-8°. Christania, Cammermeyer. 80 ö.

KRAFT (ALB.). — *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung.* (Dissert.) Gr. in-8°, 75 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 2 m.

LEBESGUE (H.). — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* In-8°, VII-139 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

SELIWANOFF (D.). — *Lehrbuch der Differenzenrechnung.* VI-92 p. [*Teubner's (B.-G.) Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* 13. Bd.]. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 4 m.

TRESSE (A.) et THYBAUT (A.). — *Cours de Géométrie analytique.* Fasc I. In-8°, III-256 p. avec fig. Paris, Colin. 6 fr.

— *Cours de Géométrie analytique.* Fasc. II. In-8° avec fig. Paris, Colin. 6 fr.

DUHEM (P.). — *Recherches sur l'Hydrodynamique.* 2e série. In-4°, 158 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

FESTSCHRIFT *Ludwig Boltzmann gewidmet zum* 60. *Geburtstage* (20 février 1904). Gr. in-8°, XII-930 p. avec 1 portr., 101 fig. et 2 pl. Leipzig, Barth. 18 m.

POINCARÉ (H.). — *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes.* 2e édition. In-8°, 116 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars (Collection *Scientia,* série physico-mathématique, n° 23). Cart. 2 fr.

DARWIN (G.-H.). — *On integrals of squares of ellipsoidal surface harmonic fonctions.* In-4°, 26 p. London, Dulau. 1 sh.

GAZZANIGA (P.). — *Gli elementi della teoria dei numeri.* In-8°. Verona, Drucker. 8 l.

Hinton (C.-H.). — *The fourth dimension*. In-8°, 256 p. London, Sonnenschein. 4 sh. 6 d.

Humbert (G.). — *Cours d'Analyse*, professé à l'École Polytechnique. Tome II : *Compléments du Calcul intégral*. In-8°, XVIII-496 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

Jahrbuch *der Astronomie u. Geophysik*. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Herausgeg. von Herm. J. Klein. 14. Jahrg. 1903. Gr. in-8°, VIII-368 p. avec 6 planches. 7 m.

Pech (Rob.). — *Ueber Modulargleichungen elliptischer Funktionen* (Fortsetzung). In-4°, 10 p. Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 m.

Runge (C.). — *Theorie und Praxis der Reihen* (*Sammlung Schubert*, XXXII. Bd.). In-8°, 266 p. avec 8 fig. Leipzig, Göschen. Relié, 7 m.

Schlesinger (Ludw.). — *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen m. einer unabhängigen Variabeln* (*Sammlung Schubert*, XIII. Bd.). 2e édit. In-8°, 320 p. Leipzig, Göschen. Relié, 8 m.

Troncet (L.). — *Horomètre. Cadran donnant l'heure universelle*. Grand in-16, avec fig. Paris, imp. Gambart et Cie.

ERRATA.

Numéro de janvier, page 31, note : *au lieu de* le système V, *lire* le système II ; page 34, ligne 4, *au lieu de*

$$(B+1)^n - B^n = 0,$$

lire

$$(B+1)^n - B^n = n.$$

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVIII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXVIII; 1904. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
34579 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1903 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVIII. — ANNÉE 1904.

(XXXVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série
Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, éditeur (1).

Tome XXII; 1889.

Brioschi (F.). — [B7e, ref. F1g]. Sur un symbole d'opération dans la théorie des formes. (117-121).

Symboles, pour les formes binaires d'ordre n, analogues à

$$D = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

qui est employé dans la théorie des fonctions elliptiques.

Beltrami (E.). — [S2c]. Considérations hydrodynamiques. (121-130).

L'auteur se propose d'étudier le cas où les lignes de flux

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVII2, p. 188.

coïncident avec les lignes vorticales

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r};$$

c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\frac{p}{u} = \frac{q}{v} = \frac{r}{w}.$$

En laissant de côté le cas où

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

dans lequel il n'y a pas, à proprement parler, de lignes vorticales, il trouve que le fait mentionné a lieu dans un mouvement d'un fluide incompressible où chaque molécule fluide se meut parallèlement au plan des x, y, et où l'on pose

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = 0,$$

la fonction φ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

Il prend

$$2\varphi = \mathrm{F}e^{iZ} + \mathrm{F}_1 e^{-iZ},$$

F étant une fonction arbitraire de $x + iy$ et de t, F_1 sa conjuguée, et Z une fonction réelle de z et de t. Ici les lignes de flux (et vorticales) sont des droites.

Il y a une autre classe de solutions, qui convient aussi à des fluides compressibles, et dans laquelle, si le fluide est incompressible, les lignes se réduisent à des hélices. Pour ces mouvements, que l'auteur appelle *hélicoïdaux*, a lieu le théorème suivant :

Lorsqu'il y a un potentiel d'accélération, on ne peut avoir de mouvement hélicoïdal à moins qu'il ne soit aussi stationnaire.

Celoria (*G.*). — [U]. Sur l'éclipse partielle de Lune du 17 janvier 1889. (130-131).

Morera (*G.*). — [D3*b*]. Sur l'intégrale de Cauchy. (191-200).

Celoria (*G.*). — [U]. Nouvelle détermination de l'orbite de l'étoile double γ *Coronæ borealis* Σ 1967. (224-238).

Jorini (*A.*). — [T2*b*]. Poutres réticulaires rectilignes de résistance uniforme. (255-269).

Somigliana (*C.*). — [C4*d*]. Sur les paramètres différentiaux. (275-288).

Nouveau procès pour former les paramètres différentiaux, et démontrer l'invariabilité de ceux du premier ordre. Nouvelle définition de la courbure moyenne d'une surface (de $n-1$ dimensions dans un espace de n dimensions), indépendamment de la notion de rayons de courbure.

Ascoli (*G.*). — [D1*d*]. Sur les fonctions à deux variables réelles, croissant ou décroissant dans le sens positif de chacun des axes dans une portion de plan à distance finie. (317-335, 438-448, 686-726).

Ces fonctions sont étudiées principalement au point de vue de leurs maxima et minima.

Un compte rendu de ce travail est donné par l'auteur même dans ce Tome des *Rendiconti*, p. 804-816.

Casorati (*F.*). — [O5*p*]. Nouvelle mesure de la courbure des surfaces. (335-346).

L'auteur propose la mesure suivante. On décrit sur la surface donnée un cercle géodésique ayant son centre au point O de la surface; sur chaque rayon OP de ce cercle, on prend OQ proportionnel à l'angle que la normale en P fait avec la normale en O : on a ainsi une image du cercle; le rapport C de l'aire de cette image à l'aire du cercle est la quantité que l'auteur appelle *courbure* de la surface en O, et l'on a

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right),$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbure principale.

Cette Note se trouve reproduite avec des corrections dans le Tome XIV des *Acta mathematica*.

Aschieri (*F.*). — [L[1] 1*d*]. Sur les homographies sur une conique et sur leurs systèmes linéaires. (424-428, 484-496, 558-565, 624-646).

Beltrami (*E.*). — [T2*a*]. Sur le principe de Huygens. (428-438).

On pose

$$G(t) = \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \frac{1}{ar}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dn},$$

φ étant une fonction de x, y, z et t qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \Delta \varphi.$$

et a étant la vitesse de propagation d'un mouvement vibratoire. Kirchhoff (*Leçons de Mécanique*, t. XXIII) a donné la formule

$$[G] = \frac{\partial}{\partial u}\frac{[\varphi]}{r} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right],$$

la dérivation ∂ étant prise n'ayant égard qu'à la variabilité de r, et les crochets [ ] indiquant que l'on doit substituer $t - \frac{r}{a}$ au lieu de t. Cette formule, qui est une traduction analytique du principe de Huygens pour les milieux isotropes, est ici établie en prenant pour point de départ le théorème de Green, et de manière à ne pas donner lieu à une objection élevée contre la démonstration de Kirchhoff par M. Maggi (*Annali di Matematica*, t. XVI), qui a aussi donné de cette formule une autre démonstration.

Bardelli (*G.*). — [R2*b*, *c*]. Barycentres et moments d'inertie de surfaces et de solides de rotation. (497-509).

Pincherle (*S.*). — [D2*f*]. Sur une extension de l'algorithme des fractions continues. (555-558).

Succession de fonctions déduite de deux fonctions données par une relation récurrente à quatre termes.

Ferrini (*R.*). — [R9*d*]. Esquisse sur le calcul de la spirale de compensation pour une dyname à potentiel constant. (565-575).

Maggi (*G.-A.*). — [R5*a*]. Sur les principes de la théorie de la fonction potentielle. (647-657).

Étant

$$(1) \qquad U' = \int \frac{k\,d\tau'}{r}, \qquad V' = \int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau',$$

où $k = k(a, b, c)$ est la densité en (a, b, c),

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

et l'intégration est étendue à un espace dont le point (x, y, z) est enlevé par un petit espace ayant ce point dans son intérieur, on pose

$$(2) \qquad U = \int \frac{k\,d\tau}{r}, \qquad V = \int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau,$$

en entendant d'indiquer avec ces expressions les limites des (1), prises en faisant tendre à zéro le petit espace qui renferme le point (x, y, z). L'auteur

démontre que, comme on a

$$V' = \frac{\partial U'}{\partial x},$$

on a aussi

$$V = \frac{\partial U}{\partial x};$$

puis il fait la recherche analogue pour les dérivées secondes, en retrouvant les formules données par M. Morera dans ces *Rendiconti*, t. XX.

Voir un appendice à cette Note dans le Tome XXIV, page 232.

Bertini (*E.*). — [P6]. Déduction des transformations planes doubles des types fondamentaux des transformations involutives. (771-778).

Maggi (*G.-A.*). — [R5*c*]. Sur la théorie des doubles couches agentes. (785-796).

Étude de l'intégrale

$$\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma,$$

que l'auteur, au moyen du théorème de Stokes, réduit à la forme

$$\int \cos\varphi\,d\theta.$$

Ascoli (*G.*). — [D1*d*]. Index très détaillé de ce qui est contenu dans mon Mémoire : « Sur les fonctions de deux variables réelles, qui sont toujours croissantes ou décroissantes dans le sens positif de chacun des axes dans une portion de plan à distance finie ». (804-816).

C'est le Mémoire inséré dans ce Tome, p. 317.

Tome XXIII; 1890.

Berzolari (*L.*). — [M³6*a*]. Sur la courbe gauche rationnelle du 4ᵉ ordre. (96-106).

On appelle hyperboloïde correspondant à un point donné de la courbe C_4^2, du 4ᵉ ordre et de 2ᵉ espèce, celui qui est déterminé par les tangentes de la courbe aux trois points dont les plans osculateurs passent par le point donné. L'auteur étudie le système de ces hyperboloïdes et une correspondance (ou système symétrique) du 2ᵉ degré, que l'on obtient entre les points de C_4^2.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Considérations sur le mouvement de rotation de la planète Vénus (149-160), Note II (194-208), Note III (257-270), Note IV (383-394), Note V (420-439), 1 planche.

La rotation se fait en 224,7 jours, temps égal à celui de la révolution sidérale de la planète.

Bertini (*E.*). — [$M^1 1 b$]. Sur le nombre des points de diramation d'une singularité quelconque d'une courbe plane algébrique. (307-311).

Ce travail se rattache à celui que l'auteur a publié dans le Tome XXI de ces *Rendiconti*, p. 326, et a pour but de montrer que la définition que l'auteur y a donnée de nombre de points de diramation, différente de celle de Nœther, conduit pourtant au même résultat.

Aschieri (*F.*). — [P1*b*]. Sur les homographies de deuxième espèce. (312-319).

Pincherle (*S.*). — [D2*e*α]. Sur la représentation approchée d'une fonction par des irrationnels quadratiques. (373-376).

Application de l'algorithme donné par l'auteur dans le Tome XXII, p. 555, à la représentation d'une fonction par

$$\frac{P + \sqrt{Q}}{R},$$

P, Q, R étant des polynomes rationnels entiers en x; et cela de la manière la plus approchée pour des degrés donnés de ces polynomes.

Ferrini (*R.*). — [R9*d*]. Sur les dynames à compensation. (663-675).

Sayno (*A.*). — [T4*a*]. Le coefficient moyen de dilatation thermique linéaire, entre deux limites de température 0° et t°, d'un corps solide homogène et isotrope, est inversement proportionnel à la différence entre la température de fusion T et la température t. (787-807), Note II (851-862).

Loria (*G.*). — [P4*g*]. Sur la classification des transformations rationnelles de l'espace, en particulier sur celles de genre zéro. (824-834).

Les transformations rationnelles dont les systèmes homaloïdiques sont formés par des surfaces à sections planes rationnelles, sont celles :

1° Où l'un des deux systèmes est de quadriques et l'autre de surfaces de Steiner;
2° Où les deux systèmes sont des surfaces de Steiner;
3° Où l'un des systèmes est de surfaces réglées de degré μ à directrice $(\mu-1)$-uple, et l'autre de surfaces réglées de degré ν à directrice $(\nu-1)$-uple.

Padova (*E.*). — [O6g, ref. O5/α]. Sur un théorème de Géométrie différentielle. (840-844).

Démonstration du théorème de Beltrami (*Annali di Matematica*, t. VII, 1866) :

Les surfaces à courbure constante sont les seules sur lesquelles les géodésiques puissent être représentées par des équations linéaires entre les coordonnées.

Somigliana (*C.*). — [T2a]. Formules générales pour la représentation d'un champ de forces par des forces élastiques. (874-882).

L'auteur détermine, pour un milieu élastique isotrope envahissant tout l'espace, une déformation telle que les forces élastiques qui en sont engendrées soient identiques à celles que l'on suppose données.

Tome XXIV; 1891.

Maggi (*G.-A.*). — [R5a]. Sur la théorie de la fonction potentielle de surface. (87-98, 220-231).

Complément aux Notes du même auteur : *Sui principi della teoria della funzione potenziale* (Tome XXII, p. 647) et *Sulla teoria dei doppi strati agenti* (t. XXII, p. 785). Propriétés de la fonction et de sa dérivée dans le champ représenté par l'agent et dans la proximité de ce champ. (*Voir* les corrections à la page 960).

Cesàro (*E.*). — [J2]. Sur les règles du calcul des densités et sur quelques-unes de leurs applications. (101-112).

Lorsqu'on peut définir une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x)\,dx$ représente la probabilité qu'une quantité variable dans un champ réel tombe entre x et $x+dx$, on appelle $\varphi(x)$ la *densité* du champ en x. Dans une question de probabilité, on a des quantités arbitraires et d'autres qui sont liées à celles-ci, et dont les champs ont des densités que l'on peut déduire de celles des champs des premières par des règles que l'auteur appelle *calcul des densités*. L'introduction de cet élément nouveau, la densité, dans les questions de probabilité

où le nombre des chances est infini, donne le moyen de traiter avec sûreté des cas qui semblaient échapper au calcul, et présenter, suivant la manière de les envisager, des conséquences contradictoires.

Castelnuovo (*G.*). — [$M^2 8 g$]. Sur la géométrie sur une surface algébrique. Note I (127-137), Note II (307-318).

L'auteur étudie les surfaces contenant un système ∞^1 de courbes algébriques tel que par tout point de la surface passe une et une seule courbe du système (faisceau de courbes). Si, sur une surface F d'ordre n et de genre > 0, il y a un faisceau de courbes, toute courbe du faisceau est coupée en une série spéciale par les surfaces d'ordre $n-4$ adjointes de F. Les surfaces ayant un faisceau non rationnel de courbes conduisent à des exemples de surfaces pour lesquelles le *genre numérique* ne coïncide pas avec le *genre géométrique*.

Dans la Note II, il démontre que pour une surface de genre p (*Flächengeschlecht*) le *Curvengeschlecht* $p^{(1)}$, c'est-à-dire le genre des intersections avec les surfaces adjointes, a un minimum qui est donné par

$$p^{(1)} = 3p - 6.$$

Les surfaces pour lesquelles on a ce minimum contiennent un faisceau rationnel de courbes de genre 3, et peuvent se représenter sur des surfaces de notre espace à droite multiple, exception faite pour les cas $p = 4$, 5, 7 que l'auteur étudie séparément. Dans cette étude, l'auteur emploie quelques résultats, qu'il établit d'abord, relatifs à certaines involutions rationnelles sur une courbe algébrique, et qui sont les suivants :

Une courbe de genre $3r$ contient une série g^r_{3r-1} autorésiduelle dans les cas suivants :

1° Pour $r = 2$, une courbe plane générale du 5e ordre ;

2° Pour $r > 2$, la courbe intersection de la surface réglée d'ordre $r-1$ de l'espace S_r avec une variété du 4e ordre à $r-1$ dimensions passant par $r-3$ rayons de la surface;

3° Pour $r = 5$, il y a aussi l'intersection de la surface non réglée du 4e ordre de S_5 avec une variété du 4e ordre à quatre dimensions passant par une conique de la surface.

Formenti (*C.*). — [R 1 $b\alpha$]. Mouvement dans un plan d'une figure de surface constante et à déformations affines entre elles, dans le cas qu'il n'y ait pas de forces motrices. (204-212).

Maggi (*G.-A.*). — [R 5 a]. Appendice à la Note « Sur les principes de la théorie de la fonction potentielle ». (232-235).

La Note est dans le Tome XXII, p. 647.

Aschieri (*F.*). — [P 1 a, b]. Sur les homographies binaires et ternaires. (278-292).

Les propriétés données par l'auteur sont relatives aux correspondances

n-aires en général. Par exemple, il démontre le théorème général de l'involution, c'est-à-dire :

Si à $n - 1$ points P_r, déterminant un espace S_{n-2} de la forme, correspondent les mêmes points dans une homographie Ω et dans son inverse Ω^{-1}, la même chose a lieu pour tous les autres points de la forme, et Ω est par cela une involution.

Suit un théorème analogue pour la polarité, et quelques autres propriétés relatives aux correspondances permutables, harmoniques, conjuguées, etc., démontrées au moyen d'un calcul symbolique.

Pincherle (*S.*). — [M²8*b*]. Sur certaines surfaces rationnelles que l'on rencontre en des questions d'Analyse. (354-357).

Ayant une relation algébrique

$$f(Z, W) = 0$$

entre deux variables complexes, élevons en chaque point Z_0 du plan (Z) une perpendiculaire, et en prenons une portion égale au module correspondant de W. On a ainsi une surface. Lorsque la relation est

$$Z = r(W),$$

r étant une fonction rationnelle, la surface est rationnelle. Des cas particuliers de ces surfaces se présentent dans l'étude des fonctions sphériques et d'autres fonctions. Dans ces cas, la relation est de la forme

$$W^{m+n} - ZW^n + 1 = 0,$$

et la plus simple d'entre elles ($m = n = 1$) est du huitième ordre.

Pour une étude de ces surfaces *voir* ci-dessous Montesano, *Sur deux surfaces homaloïdiques*, etc.; dans ce Tome des *Rendiconti*, p. 889.

Cesàro (*E.*). — [T2*a*]. Sur le calcul de la dilatation et de la rotation dans les milieux élastiques. (459-466).

Rajna (*M.*). — [U]. Sur la méthode graphique dans le calcul des éclipses solaires. (613-623).

Jorini (*A.-F.*). — [T2*b*]. Stabilité des structures annulaires. (624-647, 1 planche).

Beltrami (*E.*). — [T2*a*]. Sur le milieu élastique de Green. (717-726). Note II. (779-789).

Si, dans les équations du mouvement libre d'un milieu élastique

$$\frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} - K\frac{d^2u}{dt^2} = 0,$$

. . . .

(K étant la densité et u, v, w les composantes du déplacement), on suppose

$$(1)\qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

les trois équations se réduisent, pour un milieu isotrope, à une seule

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Omega^2 \Delta_2\varphi,$$

dont elles sont les dérivées par rapport à x, y, z respectivement, ayant indiqué par Ω la vitesse de propagation des mouvements longitudinaux. L'auteur cherche s'il peut y avoir des milieux élastiques, autres que les isotropes, pour lesquels l'hypothèse (1) entraîne la possibilité d'une telle réduction des équations du mouvement, et il trouve que le potentiel d'élasticité prend alors précisément la forme donnée par Green pour le milieu élastique le plus général admettant des ondes planes longitudinales. Il donne ensuite les conditions pour que ce potentiel soit positif, et la forme qu'il prend lorsqu'on l'exprime par les composantes de pression.

Dans la Note II, il traite la question suivante :

Dans un milieu isotrope le système des dilatations principales et celui des pressions principales sont également orientés; quelle relation y a-t-il entre les orientations de ces systèmes dans le milieu élastique de Green?

Rajna (*M.*). — [U]. Sur les éclipses solaires visibles en Italie depuis 1891 jusqu'à 1900. (734-762).

Padova (*E.*). — [O6*k*]. Sur certaines classes de surfaces susceptibles de déformations infinitésimales spéciales. (821-829).

Surfaces que l'on peut déformer de manière :

1° Que les chemins des divers points aient des projections égales sur les normales correspondantes;

2° Que les chemins soient également inclinés sur les normales.

Les surfaces qui ont cette dernière propriété sont celles à courbure constante négative, et elles admettent ∞^2 de ces déformations. Il y a aussi les surfaces dont les courbes G = const. sont géodésiquement parallèles, qui sont applicables sur des surfaces de rotation et pour lesquelles on a $\Lambda_{22} = 0$; celles-ci admettent ∞^1 déformations.

Martinetti (*V.*). — [P3*b*α, ref. K17*b*]. Sur la projection stéréographique et sur la résolution des triangles sphériques et des angles trièdres. Note I (830-839), Note II (976-980).

Montesano (*D.*). — [M³8*b*]. Sur deux surfaces homaloïdiques qui se présentent en des questions analytiques. (889-907).

Étude des surfaces signalées par M. Pincherle (*voir* ci-dessus, p. 354).

Maggi (*G.-A.*). — [R5*a*]. Observations à la Note « Sur la théorie de la fonction potentielle de surface ». (960-961).

Corrections à la Note insérée à la page 220.

Aschieri (*F.*). — [P1*a*]. Sur les homographies binaires et leurs produits. (964-975).

Somigliana (*C.*). — [H9*h*, ref. T2*a*]. Sur l'intégration au moyen de solutions simples. (1005-1020).

Les solutions simples que l'on emploie ordinairement pour composer les intégrales générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique n'ont pas reçu jusqu'ici, comme dans le cas d'une seule équation, une caractérisation spécifique dont on puisse déduire une méthode générale pour la détermination des constantes arbitraires. L'auteur donne de ces solutions simples une propriété par laquelle elles peuvent être mieux définies. Il considère certains systèmes aux dérivées partielles du 2ᵉ ordre comprenant comme cas particulier les équations de l'élasticité. Ensuite il suppose que le champ d'intégration soit limité par une surface (ou espace) du 2ᵉ ordre; les solutions singulières peuvent alors se former avec des fonctions rationnelles entières des variables indépendantes dont les coefficients sont déterminés par des équations linéaires.

Lazzeri (*G.*). — [$M^1 1 c$, $M^2 1 c$]. Théorie géométrique des courbes et surfaces polaires. (1021-1049).

En s'inspirant d'un fragment de Caporali sur les *groupes de points et de droites* (*Memorie di E. Caporali*, p. 258; Napoli, 1888), où se trouvent énoncées des propriétés relatives à la *droite polaire* d'un point par rapport à un *n*-latère, l'auteur donne la notion de *centre harmonique* d'un groupe de points, et de *plan harmonique* d'un groupe de plans, et par cela il établit la théorie des courbes et des surfaces polaires indépendamment de toute propriété métrique.

Rajna (*M.*). — [U]. Sur les éclipses solaires du 6 juin 1891 et du 16 avril 1893. (1059-1066).

Bertini (*E.*). — [$M^1 1 a\alpha$]. Représentation d'une forme ternaire par combination linéaire de deux autres. (1095-1115).

L'auteur commence par exposer la démonstration de Voss du théorème relatif à l'absorption des intersections de deux courbes par un point multiple commun quelconque, mais tel que les tangentes de l'une y soient toutes distinctes de celles de l'autre (cas *simple*). Puis il aborde le problème de la représentation

$$F = A f + B \varphi.$$

en donnant les conditions relatives, autant pour le cas simple des formes f, φ que pour le cas général.

Sayno (*A.*). — [T2*b*]. Sur l'équilibre d'élasticité des solides cylindriques qui résistent à la flexion. (1131-1142).

Voir la Note II, au Tome suivant, page 147.

Rajna (*M.*). — [U]. Observations faites à l'Observatoire royal de Bréra pendant l'éclipse de Lune du 15 novembre 1891. (1149-1154).

Beltrami (*E.*). — [R5*a*α]. Sur les fonctions complexes. Note II. (1188-1195).

La Note I est dans ces *Rendiconti*, t. XX (1887) à la page 624 et a le même titre. L'auteur y étudiait une classe de fonctions complexes, analogues sous certains rapports aux fonctions potentielles. Ici, il étudie un exemple particulier de ces fonctions et arrive à des résultats remarquables relatifs à l'équivalence d'une distribution superficielle de masse sur une ellipse, la densité variant par ellipses homothétiques et concentriques, avec une distribution linéaire sur le grand axe.

Il y a une Note III dans le Tome XXVII (1894), page 337.

Tome XXV; 1892.

Sayno (*A.*). — [T2*b*]. Sur l'équilibre d'élasticité des solides cylindriques et prismatiques qui résistent à la flexion. Note II. (147-162).

La Note I est dans le Tome précédent, page 1131.

Murani (*O.*). — [T7*a*]. Vérification expérimentale d'un théorème d'Électrodynamique sur les courants à oscillations très rapides. (244-253).

La division ou la distribution d'un courant variable en deux circuits placés en dérivation a lieu de manière que, pour un même courant total, l'énergie électrodynamique soit minima à chaque instant.

De Marchi (*L.*). — [S5]. Sur la théorie des cyclones. (320-334).

Voir la Note II dans le Tome XXVI, p. 624.

Aschieri (*F.*). — [K6*b*]. Sur une méthode pour établir les coor-

données homogènes projectives dans le plan et dans l'espace. (381-397).

Dans le plan, chaque point est envisagé comme centre d'une involution

$$x_1\mu\mu' - x_2(\mu + \mu') + x_3 = 0$$

sur une conique, μ étant le paramètre d'un point variable sur cette courbe; dans l'espace, on emploie des involutions sur une cubique gauche.

Bardelli (*G.*). — [R2*c*]. Sur l'emploi des coordonnées obliques dans la théorie des moments d'inertie. (444-458).

Pincherle (*S.*). — [H4*d*]. Sur une transformation dans les équations différentielles linéaires. (633-636).

Vivanti (*G.*). — [R7*a*]. Sur certaines intégrales premières des équations du mouvement d'un point. (689-699).

Existence et forme d'une intégrale quadratique par rapport aux composantes de la vitesse. Suit la recherche inverse, de laquelle il résulte que, X, Y étant donnés, il est toujours possible de prendre Z de manière que l'on ait une intégrale quadratique par rapport aux vitesses.

Montesano (*D.*). — [N^1 1*e*, ref. P4*g*]. Sur les transformations univoques de l'espace qui déterminent des complexes quadratiques de droites. (795-821).

Un complexe peut-il, en général, se regarder comme constitué par les droites qui joignent les points correspondants dans une transformation univoque? L'auteur démontre que le complexe quadratique le plus général n'admet pas cette construction. Cette propriété n'appartient qu'aux complexes quadratiques admettant une étoile de rayons, ou des congruences linéaires. Il construit les transformations, involutives ou non, qui donnent naissance à ces complexes.

Berzolari (*L.*). — [$M^3$6*a*]. Sur certains hyperboloïdes, relatifs à la courbe gauche rationnelle du 4e ordre. (950-971).

1. Hyperboloïde déterminé par trois cordes de la courbe; son équation s'exprime par les combinants élémentaires W_λ^6 et Q_λ^2 de la forme w_λ^4 (dont les racines donnent les points de contact des plans stationnaires) et des formes constituant le système complet.

2. Hyperboloïde déterminé par trois tangentes.

3. Hyperboloïde déterminé par les tangentes aux points de contact des plans osculateurs passant par un point donné de la courbe.

Padova (*E.*). — [C2*g*]. Le théorème de Stokes en coordonnées générales. (1021-1024).

Conditions sous lesquelles l'intégrale

$$I = \int\int F \cos(Fx)\, d\sigma,$$

étendue à une portion de surface S, peut se transformer en une intégrale

$$I = \int \Sigma_i X_i\, dx_i,$$

prise le long du contour de S.

Berzolari (*L.*). — [$M^1 5a$]. Sur la courbe du 3e ordre à point double. (1025-1036).

Étude d'une involution remarquable déterminée par cette courbe et un point Z de son plan (involution déjà étudiée par Stahl, *Journal de Crelle*, Bd. 104, 1888, p. 39). La courbe est représentée par

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_\lambda^3 : b_\lambda^3 : c_\lambda^3,$$

a_λ^3, b_λ^3, c_λ^3 étant des formes binaires.

Pieri (*M.*). — [P4*g*, ref. $N^1 1j$]. Sur les transformations involutives de l'espace déterminées par un complexe hirstien de droites. (1037-1060).

Le complexe est celui que Hirst a étudié dans son Mémoire : *On the complexes generated by two correlative planes* (*Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini*. Milano, Hoepli, 1881). M. Pieri étudie ici les involutions de l'espace dont les couples sont distribuées sur les rayons d'un tel complexe. On en a trois types (de l'ordre 10, 13, 16 respectivement).

Pascal (*E.*). — [$M^2 3d$]. Sur les polyèdres circulaires que l'on peut former avec les quarante-cinq plans tritangents de la surface du 3e ordre. Note I. (1098-1102).

Pascal (*E.*). — [$M^2 3d$]. Sur les trente-six doubles-six gauches formés avec les vingt-sept droites de la surface du 3e ordre. Note II. (1103-1106).

Pascal (*E.*). — [$M^2 3d$]. Configuration des deux cent seize quintuples gauches de 2e espèce formées avec les vingt-sept droites de la surface du 3e ordre. (1136-1139).

Les polyèdres circulaires sont tels que deux faces consécutives ont en commun une droite de la surface et deux non consécutives ne l'ont pas; ils sont *fermés* ou *ouverts* suivant que la dernière face a ou n'a pas une droite de la surface en commun avec la première. Il n'y a pas de trièdres circulaires fermés; il y

en a une seule espèce d'ouverts. Il y a une seule espèce de tétraèdres circulaires fermés. L'auteur assigne successivement les espèces et le nombre des polyèdres jusqu'aux hexaèdres. L'ordre maximum de ces polyèdres est 12.

Dans la deuxième Note, il étudie le groupe de substitutions que l'on obtient en prenant pour éléments les trente-six doubles-six au lieu des vingt-sept droites. Dans la troisième, il étudie les ensembles de quintuples n'ayant aucune droite en commnn deux à deux et assigne les ensembles *principaux*, c'est-à-dire qui ne sont pas renfermés dans des ensembles d'ordre supérieur. Dans ces Notes, l'auteur ne fait qu'énoncer les résultats, et ceux-ci sont obtenus par une méthode qu'il a établie dans son Mémoire : *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere* 3 *e* 4 *e loro gruppi di sostituzioni* (*Annali di Matematica*, 1892). Cette méthode se réduit à considérer la figure formée par huit points fixes joints deux à deux de toutes les manières possibles; on a ainsi vingt-huit droites; en supprimant une ces droites, on fait correspondre une à une les vingt-sept autres à celles d'une surface cubique.

Platner (G.). — [D6$c\delta$]. Sur le polynome bernoullien. (1179-1188).

Castelnuovo (*G.*). — [M[1]2c]. Les correspondances univoques entre groupes de p points sur une courbe de genre p. (1189-1205).

L'auteur rappelle d'abord les théorèmes fondamentaux sur les séries linéaires de groupes sur une courbe. Puis il vient à l'étude des correspondances et de leurs produits, et il démontre géométriquement le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes de m points $a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_m$ *soient équivalents* (*c'est-à-dire qu'ils appartiennent à une même série linéaire*) *est que le produit des m correspondances* $[a_1, a'_1], \ldots, [a_m, a'_m]$ *soit l'identité.*

Suivent d'autres propriétés des correspondances, en particulier des correspondances cycliques et, enfin, un Appendice où l'auteur démontre que les seules correspondances algébriques univoques possibles sont celles qu'il a désignées précédemment. Cette dernière démonstration est faite par voie analytique, en se fondant sur les recherches de Hurwitz [*Ueber algebraische Correspondenzen* (*Mathem. Ann.*, Bd. XXVIII)].

Bertini (*E.*). — [V9]. Commémoration du Comm. Prof. Félix Casorati. (1026-1236).

Avec la liste des travaux de Casorati.

S. R.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, gegründet von A.-L. Crelle, 1826, unter Mitwirkung der Herren *Weierstrass* und von *Helmholtz* herausgegeben von *L. Fuchs*. Berlin, imprimerie de Georg Reimer, 1895.

Tome 114, en quatre fascicules, avec une planche.

Busche (*E.*), à Bergedorf. — Sur l'aire du triangle et son analogue au point de vue dualistique. (1-24).

Essai sur les notions métriques que l'on peut définir sans présupposer l'idée de distance et de mesure d'un angle. On admet la correspondance univoque entre les points d'une droite, ou les rayons d'un faisceau plan, et les nombres réels : les coordonnées d'un point et d'une droite sont définies au moyen de deux faisceaux et de deux divisions de ce plan ; et l'on peut le faire de manière qu'une droite ou un point ait une équation du premier degré. La moitié du déterminant formé avec les coordonnées de trois points est par définition le *contenu ponctuel* du triangle qui a ces trois points pour sommets ; et d'une manière analogue se définit le *contenu tangentiel* d'un triangle. Ces notions suffisent à donner pour une courbe quelconque un élément métrique, remplaçant la courbure.

Le reste de l'article contient une série de propositions sur les rapports anharmoniques formés avec les aires des triangles que l'on peut former avec six points ; et plus spécialement sur les systèmes de six points, étudiés déjà par Clebsch et Schröter, et connus sous le nom d'*hexagones de Clebsch*.

Hensel (*K.*). — Sur les déterminants réguliers et les systèmes qui s'en déduisent. (25-30).

Il s'agit de donner un fondement purement arithmétique à des théorèmes de Weierstrass et Frobenius sur les formes bilinéaires. On considère un déterminant D dont les éléments sont des nombres entiers, ou des fonctions rationnelles entières d'une variable, et les mineurs de ce déterminant ; un mineur est dit *régulier*, s'il est égal au plus grand commum diviseur de tous les mineurs du même ordre. L'auteur démontre que le plus grand commun diviseur des mineurs d'un ordre quelconque d'un mineur régulier A, et celui des mineurs du déterminant D obtenus en bordant A avec un même nombre quelconque de colonnes prises dans D, sont égaux aux plus grands communs diviseurs de tous les mineurs de D qui sont du même ordre, respectivement, que ceux que nous venons de définir. Un théorème analogue a lieu relativement aux plus hautes puissances d'un nombre premier donné contenues dans les divers mineurs de D.

Schafheitlin (*P.*), à Charlottenburg. — Sur les équations diffé-

rentielles de Gauss et de Bessel, et une nouvelle forme de l'intégrale de la seconde. (31-44).

L'équation différentielle

$$(1)\quad (x-k_1)(x-k_2)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma(k_1+k_2)]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0$$

conduit à la série hypergéométrique de Gauss, si $k_1 \gtrless k_2$. Pour $k_1=k_2$, elle donne l'équation

$$(2)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\delta]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

dont l'intégrale est liée à celle de l'équation de Bessel par les formules

$$x=\frac{1}{\xi},\qquad z=\sqrt{x}\,e^{\frac{\delta}{2x}}y,$$

quand on suppose

$$\delta=\pm 2i,\qquad \alpha=\frac{1}{2}+n,\qquad \beta=\frac{1}{2}-n.$$

Les développements en série des intégrales de (2) s'obtiennent facilement. L'auteur en déduit diverses représentations des fonctions de Bessel, soit par des séries, soit par des intégrales définies, dont certaines sont nouvelles. Il donne enfin des résultats nouveaux sur les limites entre lesquelles sont comprises les racines des équations $J_0(x)=0$ et $Y_0(x)=0$.

Reye (*Th.*). — Wilhelm Stahl (courte Notice nécrologique). (45-46).

Valhen (*K.-Th.*). — Sur l'extension de la relation de Legendre aux intégrales hyperelliptiques, due à M. Fuchs. (47-49).

La formule donnée par M. Fuchs (*Journal für Mathematik*, t. LXXI, p. 91-136) est obtenue en généralisant une méthode donnée par M. *Jamet* (*Nouvelles Annales,* 1891) pour obtenir la relation de Legendre.

Kantor (*S.*), à Venise. — Théorie des transformations périodiques uniformes dans le plan. (Extrait du Mémoire intitulé : Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques, et couronné par l'Académie de Naples en 1883-1884). (50-108).

Soit T une transformation birationnelle du plan ; si une courbe C, d'ordre n, passe respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_\sigma$ fois par les divers points fondamentaux de T, on dira que C admet le *complexe de singularités* $n, y_1, \ldots, y_\sigma$. Le point de départ de l'auteur est que le complexe de singularités de la transformée de C est lié au précédent par une transformation linéaire homogène S,

à coefficients entiers. Cette transformation S laisse invariantes une forme linéaire et une forme quadratique, ce qui permet d'appliquer des théorèmes connus d'Hermite, Rosanes, Frobenius, etc.

Si l'on a à effectuer successivement plusieurs transformations T, on pourra supposer que C passe par les points qui correspondent aux points fondamentaux de ces diverses transformations, et introduire ainsi de nouvelles variables y, de manière à avoir à effectuer aussi, successivement, sur ces variables, les substitutions S correspondant aux diverses transformations T.

La recherche des transformations T *périodiques* dépend ainsi de celle des transformations linéaires *fondamentales* S qui sont elles-mêmes périodiques; la détermination de ces dernières forme la première Partie du Mémoire. Il nous est impossible d'entrer dans le détail de cette théorie arithmétique, qui contient 118 énoncés de théorèmes: pour les démonstrations, l'auteur renvoie souvent à son Mémoire couronné. Des Tableaux contiennent les résultats définitifs obtenus. Les transformations T périodiques se répartissent en *classes*, toutes celles qui sont semblables par des transformations birationnelles appartenant à une même classe; il suffit d'avoir une transformation linéaire fondamentale S pour chacune de ces classes : c'est un problème d'équivalence que l'auteur traite en détail.

Il s'agit ensuite de reconnaître si aux transformations S obtenues correspondent effectivement des classes de transformations T périodiques; et, dans ce cas, de donner des méthodes pour construire une transformation T type, pour chacune de ces classes. Cette nouvelle étude fait l'objet de la seconde Partie du Mémoire; la correspondance univoque sur une courbe elliptique y joue un rôle important; de nouveaux Tableaux résument les résultats obtenus par l'auteur.

Hensel (*K.*). — Sur les diviseurs élémentaires des systèmes composés. (109-115).

Démonstration arithmétique du théorème suivant de Frobenius :

Pour qu'un système B *de* n^2 *éléments entiers soit un multiple d'un autre système* A *de la même nature* (*c'est-à-dire de la forme* PAQ, P *et* Q *étant encore deux systèmes de même nature*), *il faut et il suffit que chaque diviseur élémentaire* (*au sens de Weierstrass*) *de* B *soit un multiple du diviseur élémentaire correspondant de* A.

Stäckel (*Paul*), à Halle-a.-S. — Sur les transformations des équations aux dérivées partielles. (116-142).

Considérant les équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles, qui dépendent d'une seule fonction inconnue x_0 et d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x_1, \ldots, x_r$, l'auteur cherche les transformations

$$x_i = f_i(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r),$$

qui changent chacune de ces équations en une équation de même forme, ξ_0 étant la nouvelle fonction inconnue et $\xi_1, \ldots, \xi_r$ les nouvelles variables indépendantes. Le principe de cette recherche est dans l'étude des relations

liant les dérivées partielles de x_0 aux dérivées partielles de ξ_0. Le résultat est le suivant :

Si les équations considérées sont du premier ordre, les transformations cherchées ont pour forme générale

$$x_0 = \xi_0^\lambda g(\xi_1, \ldots, \xi_r), \qquad x_i = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où λ est une constante arbitraire ; si les équations considérées sont d'ordre égal ou supérieur à 2, on a la même forme, mais où λ ne peut avoir que la valeur un.

Schlesinger (*Ludwig*). — Remarques sur la théorie de l'équation fondamentale. (143-158).

L'auteur retrouve, par une méthode nouvelle, des résultats dûs à Fuchs, Hamburger, Casorati. Son point de départ est le suivant : soit v une intégrale quelconque d'une équation différentielle linéaire homogène ; θv, $\theta^2 v$, ..., ce qu'elle devient quand la variable indépendante décrit une fois, deux fois, etc., un contour fermé U, par lequel les coefficients de l'équation reprennent leurs valeurs initiales ; il existe une relation identique, à coefficients constants,

$$(1) \qquad c_n \theta^n v + c_{n-1} \theta^{n-1} v + \ldots + c_0 v = 0$$

qui est la même, quelle que soit l'intégrale v ; et l'équation

$$(2) \qquad c_n \omega^n + c_{n-1} \omega^{n-1} + \ldots + c_0 = 0,$$

est précisément l'équation fondamentale (au sens de Fuchs) relative au contour U. Pour qu'il y ait des intégrales v satisfaisant à une autre relation à coefficients constants

$$(3) \qquad g_0 \theta^\lambda v + g_1 \theta^{\lambda-1} v + \ldots + g_\lambda v = 0,$$

il faut et il suffit que l'équation

$$(4) \qquad g_0 \omega^\lambda + g_1 \omega^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda = 0$$

ait au moins une racine commune avec (2) ; et il y a autant d'intégrales distinctes v satisfaisant à (3) qu'il y a de racines communes à (2) et (4). De là se déduisent les théorèmes sur les équations fondamentales de deux équations linéaires qui ont des intégrales communes.

Le cas où (2) admet toutes les racines de (4) est particulièrement intéressant. Lorsque (4) est de la forme $(\omega - \omega_0)^\mu = 0$, ω_0 étant racine d'ordre λ de (2), on obtient la décomposition en sous-groupes des intégrales relatives à cette racine ω_0, en prenant pour μ successivement les valeurs 1, 2, ..., λ.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur les sous-groupes de Hamburger, dans lesquels se décompose le système fondamental canonique relatif à un point singulier d'une équation différentielle linéaire homogène. (159-169).

La question de la décomposition du système d'intégrales de Fuchs relatif à un point singulier, en sous-groupes de Hamburger, revient, d'après Heffter (*Thèse*, Leipzig, 1888), lorsque toutes les intégrales restent déterminées pour ce point singulier, à la suivante: reconnaître si à une racine donnée ρ de l'équation fondamentale déterminante, relative à ce point singulier, correspond une intégrale développable en une série de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\rho)\, x^{\rho+\nu}$. L'auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, sous forme entièrement explicite, en se servant d'un cas particulier d'un théorème de Frobenius, qu'il démontre d'abord directement.

Kötter (Ernst). — Note sur les courbes planes du troisième ordre. (170-180).

Par des considérations géométriques simples l'auteur établit le résultat suivant :

A chaque point réel d'une courbe du troisième ordre on peut faire correspondre une valeur d'un paramètre, comprise entre 0 *et* 1, *de telle manière qu'à trois points en ligne droite correspondent des valeurs de ce paramètre dont la somme soit* 1 *ou* 2. *Sur chacun des traits de la courbe, le paramètre varie de* 0 *à* 1, *quand on décrit ce trait complètement. Ce théorème n'est vrai, pour une courbe unicursale, que si elle a un point double isolé.*

On peut, grâce à ce théorème, développer la géométrie des cubiques planes, sans se servir de fonctions elliptiques. L'auteur en donne divers exemples.

Wallenberg (Georg). — Recherche des intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène, qui sont liées par la seule relation homogène

$$y_1^p - y_2 y_3 y_4 \ldots y_{p+1} = 0.$$

(181-186).

L'équation considérée étant supposée de la classe des équations de Fuchs, et les racines de leurs équations fondamentales déterminantes étant supposées rationnelles, l'auteur démontre que les intégrales $y_1 \ldots y_{p+1}$ ont la forme générale

$$y_1 = \sqrt[\mu]{\mathrm{R}(x)}, \qquad y_k = \sqrt[\mu]{\mathrm{R}(x)}\, e^{\int \mathrm{A}_k(x)\,dx} \qquad \left(k = 2, 3, \ldots, p+1;\ \sum \mathrm{A}_k(x) = 0\right),$$

où $\mathrm{R}(x)$ est une fonction rationnelle, et les $\mathrm{A}_k(x)$ des fonctions algébriques. Pour $p = 2$, on a la solution plus générale, bien connue,

$$y_1 = \xi_1^2, \qquad y_2 = \xi_1 \xi_2, \qquad y_3 = \xi_2^2,$$

où ξ_1, ξ_2 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire homogène du second ordre.

Frobenius (*G.*). — Sur la loi d'inertie des formes quadratiques. (187-230).

Le Mémoire a pour objet la détermination de la différence s entre le nombre des carrés positifs et des carrés négatifs indépendants d'une forme quadratique à coefficients réels, nombre auquel l'auteur donne le nom de *signatur*. Soit

$$\varphi = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

la forme quadratique considérée ; la détermination de s est liée aux signes des déterminants (mineurs principaux du discriminant de φ)

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{11}, \quad A_2 = a_{11}a_2 - a_{12}^2, \quad \ldots, \quad A_\rho = \sum \pm a_{11}\ldots a_{\rho\rho}, \quad \ldots.$$

Si l'on peut choisir l'ordre donné aux variables de manière qu'aucun de ces déterminants ne soit nul (ρ étant au plus égal au nombre r des carrés indépendants, ou *rang* de la forme φ), s s'obtient en faisant la différence entre le nombre des permanences et des variations de la suite A_0, A_1, A_2, ..., A_r. *Gundelfinger* a donné, pour le cas contraire, la règle suivante :

On peut ordonner les variables de manière que deux des A_ρ consécutifs ne soient jamais nuls à la fois; cela fait, on a la formule

$$s = \sum_{\rho=1}^{r} \operatorname{sign}(A_{\rho-1}A_\rho).$$

où sgn(a) *désigne, suivant la notation de Kronecker*, $+1$, -1 *ou* 0, *selon que a est positif, négatif, ou nul.*

L'auteur commence par démontrer cette règle, en s'appuyant sur un théorème de la théorie des déterminants, dû à Sylvester, et dont il donne d'abord une démonstration nouvelle.

Les signes des A_ρ permettent encore de déterminer s, mais non plus par la règle de Gundelfinger, quand deux A_ρ consécutifs peuvent s'annuler. S'il y en a plus de trois consécutifs qui s'annulent, il est en général impossible de déduire s des signes des A_ρ : mais il y a des formes φ particulières pour lesquelles cette impossibilité n'existe pas, quel que soit le nombre des A_ρ consécutifs s'évanouissant. Telles sont d'abord les formes dans lesquelles tous les coefficients $a_{\alpha\beta}$, pour lesquels $\alpha + \beta$ a une même valeur, sont égaux, et que l'auteur appelle formes *récurrentes;* telles sont aussi celles qui se présentent dans la méthode d'élimination de Bézout. C'est ce que l'auteur montre dans les derniers paragraphes de son Mémoire, où il établit, comme application, en se servant uniquement d'identités fournies par la théorie des déterminants, les théorèmes sur les fonctions de Sturm, que Kronecker a trouvés en comparant l'algorithme donné par Sturm avec les résultats fournis par la théorie des formes quadratiques.

Fuchs (*L.*). — Remarque sur une Note de M. Paul Vernier. (231-232).

La Note de M. Paul Vernier (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. XXII, p. 133) est consacrée à un théorème de M. Fuchs; M. Vernier a reproduit la démonstration de M. Fuchs, sans indiquer la source; M. Fuchs se demande quel peut être, dans ces conditions, le but de la Note de M. Vernier.

Meyer (*A.*), à Zurich. — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. (Continuation du Mémoire commencé t. CXIII du même journal, p. 186 à 206). (233-254).

Dans ce Paragraphe 3 de son Mémoire, l'auteur traite de l'équivalence des formes, dont les invariants $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ n'ont pas de diviseur cubique et ont un plus grand commun diviseur Θ premier avec $\Omega\Delta$. Mettant en évidence le plus grand carré contenu dans Θ, on pose $\Theta = \Theta_1 \Theta_2^2$. Les formes considérées proviennent de formes f aux invariants $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$, premiers entre eux, par des substitutions de déterminant $\Theta_1 \Theta_2$. Il s'agit d'étudier les conditions d'équivalence de deux formes f_1, f_2 provenant ainsi d'une même forme f. L'auteur montre d'abord comment on exprimera qu'elles sont du même *genre*, ce qui sera supposé dans la suite; la condition d'équivalence est alors qu'il existe une transformation de f en elle-même, dont les coefficients satisfassent à certaines congruences. L'auteur transforme cette condition et arrive à un énoncé où n'interviennent plus que certains symboles de Legendre. Il donne ensuite une formule pour le nombre des *classes* de formes, de l'espèee considérée, faisant partie d'un même genre : ce nombre est une puissance de 2.

Mangoldt (*H. von*), à Aix-la-Chapelle. — Sur le Mémoire de Riemann : Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné. (255-305).

En utilisant les résultats donnés par Hadamard sur la fonction $\xi(t)$ [ou $\zeta(s)$] de Riemann, l'auteur discute les limites indiquées par Riemann pour le nombre des zéros de cette fonction dont les parties réelles sont comprises entre zéro et un nombre positif donné h. Les résultats qu'il obtient sont les suivants :

Tant que $h \leq 12$, ce nombre est zéro. Pour les valeurs de h supérieures, la différence entre ce nombre et la valeur approchée

$$\frac{h}{2\pi}\, l\, \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi},$$

donnée par Riemann, est inférieure en valeur absolue à

$$0{,}34\,(lh)^2 + 1{,}35\,lh + 2{,}58.$$

L'équation $\xi(t) = 0$ a du reste au moins une racine, dont la partie réelle est comprise entre 0 *et* 53; *relativement à $h = 52$, on ne peut rien affirmer.*

Dans une seconde Partie de son travail, l'auteur démontre la convergence d'une classe de séries, qui servent à la représentation analytique de fonctions intéressant la théorie des nombres, et auxquelles conduit la méthode de

Riemann. Il montre en particulier que la série

$$\sum_a \left[\mathrm{L}i\left(x^{\frac{1}{2}+ai}\right) + \mathrm{L}i\left(x^{\frac{1}{2}-ai}\right) \right]$$

est convergente, quand on range les termes dans l'ordre indiqué par Riemann, et a bien la somme indiquée aussi par Riemann.

Les résultats énoncés par Riemann se trouvent ainsi confirmés dans tous leurs points essentiels : seule la question de la réalité des racines de la fonction $\xi(t)$, que Riemann tient pour très vraisemblable, reste sans réponse.

Mittag-Leffler. — Sur les invariants des équations différentielles linéaires. (Extrait d'une lettre de M. Mittag-Leffler au rédacteur). (306-308).

L'auteur explique comment un théorème donné par lui (*Acta mathematica*, t. XV) sur la représentation analytique des invariants d'une équation linéaire n'est pas en contradiction avec des résultats de Günther (*Journal für Mathematik*, t. CVII, p. 314), contrairement à ce qu'avait cru celui-ci. Il ajoute quelques remarques générales sur diverses représentations analytiques, données par Poincaré, Hamburger, etc., pour ces mêmes invariants.

Schlesinger (*Ludwig*). — Remarque sur la Note publiée p. 159 à 169 du même Volume. (Extrait d'une lettre adressée à M. L. Heffter, à Giessen). (309-311).

L'auteur montre comment la méthode suivie par M. Heffter dans son Mémoire du *Journal für Mathematik*, t. CXI, p. 59 et 71, peut servir à résoudre la question que lui-même a traitée dans la Note en question. Suivent des *errata* pour cette même Note.

Czuber (*E.*), à Vienne. — Les polygones de Steiner. (312-332).

L'auteur rappelle les principes d'une méthode de calcul symbolique, empruntée à un Mémoire posthume de Emil Weyr, et qui permet de développer simplement les propriétés projectives des courbes de genre un, sans se servir des fonctions elliptiques. Il montre comment cette méthode permet de résoudre les divers problèmes de fermeture, concernant les polygones de Steiner.

Gutzmer (*A.*). — Sur l'expression analytique du principe de Huygens. (333-337).

Il s'agit du théorème fondamental, sur lequel Kirchhoff a fondé sa théorie analytique de l'Optique. L'auteur montre qu'on peut y arriver très facilement, en transformant la formule générale de Green

$$4\pi V(x_0, y_0, z_0) = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds - \int \frac{1}{r} \Delta V \, d\tau,$$

par le changement de fonction

$$V = \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right),$$

et tenant compte des conditions auxquelles doit satisfaire la fonction φ.

Landsberg (*Georg*), à Heidelberg. — Sur la théorie des courbures des figures à une dimension, contenues dans les multiplicités d'ordre supérieur. (338-344).

L'auteur définit, pour une multiplicité

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de l'espace à n dimensions, $n - 1$ rayons de courbure et montre qu'on peut alors établir des formules qui sont la généralisation des formules de Frenet, relatives aux courbes gauches.

Netto (*Eugen*), à Giessen. — Généralisation du théorème de Laplace sur le développement d'un déterminant. (345-352).

Supposons écrite l'une quelconque des identités que donne le théorème de Laplace pour le développement d'un déterminant Δ, en y désignant les mineurs de Δ au moyen de la lettre Δ affectée des indices qui correspondent aux numéros des lignes et des colonnes qu'il faut supprimer dans Δ pour en déduire ces mineurs. La formule obtenue reste vraie pour un déterminant d'ordre $n + m$, à condition de multiplier le premier membre Δ par $\Delta_{11, 22, \ldots, nn}^{\mu-1}$, μ étant le nombre des facteurs qui figurent dans chaque terme du second membre.

Tel est le théorème obtenu par l'auteur; il montre comment la méthode qui l'y a conduit redonne une série d'autres identités sur les déterminants, dues à Sylvester, et qui peuvent aussi se généraliser en partie.

Hermann von Helmholtz. (353).

La rédaction annonce la grande perte causée au monde scientifique par la mort de Hermann von Helmholtz, et rappelle tout ce qu'il a fait pour la prospérité du *Journal für Mathematik*.

Tome 115; 1895.

Heffter (*Lothar*), à Giessen. — Sur certaines surfaces du quatrième ordre (surfaces isogonales) (avec une planche). (1-22).

L'auteur étudie, synthétiquement et analytiquement, les surfaces suivantes :

1° *La surface isogonale des deux points* $P_1 P_2$, c'est-à-dire le lieu des points M tels que l'angle des droites MP_1, MP_2 soit constant, surface bien connue ;

2° *La surface isogonale d'un point* P *et d'une droite* g, c'est-à-dire le lieu des points M tels que l'angle de la droite MP et du plan (gM) soit constant : c'est une surface du quatrième ordre, dont l'auteur étudie les singularités et les diverses formes ;

3° *La surface isogonale de deux droites* $g_1 g_2$, c'est-à-dire le lieu des points M tels que l'angle des plans $(g_1 M)$ et $(g_2 M)$ soit constant ; c'est une surface réglée du quatrième ordre ; l'auteur l'étudie aux mêmes points de vue ;

4° *Le cône isogonal* auquel se réduit la précédente surface lorsque les droites g_1, g_2 se rencontrent.

Enfin M. Heffter se sert de la considération de ce cône isogonal pour résoudre le problème suivant :

Étant donnés un faisceau plan de rayons et un faisceau de plans, rapportés projectivement l'un à l'autre, les placer de manière que le faisceau de droites provienne, par perspective, du faisceau de plans.

Königsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Généralisation d'un théorème sur les intégrales algébriques des équations différentielles. (23-32).

Il s'agit de poursuivre la généralisation du théorème d'algèbre qui dit que, lorsqu'une équation algébrique admet une solution d'une équation algébrique irréductible, elle les admet toutes. Ce théorème subsiste, comme l'on sait, en modifiant légèrement l'énoncé, lorsqu'on remplace les équations algébriques par des équations différentielles algébriques en x et y. En considérant des équations aux dérivées partielles, l'auteur obtient divers théorèmes analogues contenus dans l'énoncé général suivant :

Si une équation aux dérivées partielles algébrique

$$(1)\quad \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_2^{m-1}}, \frac{\partial^m y}{\partial x_2^{m-1} \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^\sigma y}{\partial x^\sigma}\right),$$

qui est d'ordre m par rapport à x_2, *et dans laquelle* f *est une fonction algébrique irréductible des arguments mis en évidence, a une intégrale commune avec une équation aux dérivées partielles algébrique*

$$(2)\quad \frac{\partial^\mu y}{\partial x_1^\mu} = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x_1^{\mu-1}}, \frac{\partial^\mu y}{\partial x_1^{\mu-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^\tau y}{\partial x_\rho^\tau}, \ldots\right),$$

qui est d'ordre μ *par rapport à* x_1 ; *et si cette intégrale commune ne satisfait pas déjà à une équation différentielle algébrique, qui soit d'ordre* $\mu - 1$ *au plus par rapport à* x_1, *et d'ordre* $m - 1$ *au plus par rapport à* x_2 ; *l'équation que l'on déduit de* (1) *en la différentiant* μ *fois par rapport à* x_1,

et en remplaçant dans le résultat $\frac{\partial^\alpha y}{\partial x_1^\alpha}$ *par la valeur* (2), *est vérifiée par toutes les intégrales de l'équation* (1).

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. (33-52 et 119-149).

Les équations considérées sont, tantôt homogènes, tantôt non. Dans la partie homogène les coefficients sont fonctions rationnelles de x et de trois fonctions algébriques u, v, w de x ; quand il s'agit d'équations non homogènes, le second membre satisfait aux hypothèses déjà introduites dans le Mémoire de l'auteur, publié au Tome CVII du même journal.

L'étude des points singuliers de l'équation non homogène est faite d'abord : il faut considérer spécialement les points de ramification de u, v, w. Dans le cas le plus général, λ branches de u, μ branches de v, ν branches de w se réunissent en un tel point a, et peuvent s'associer en $\lambda\mu\nu$ combinaisons. Ces combinaisons se répartissent en *complexes* de R combinaisons, R étant le plus petit commun multiple de λ, μ, ν ; par le changement de variable $\zeta = (x - a)^{\frac{1}{R}}$, on obtient une équation nouvelle, à laquelle s'applique la théorie générale de Fuchs. On a ainsi la représentation analytique d'un système fondamental d'intégrales. Les relations entre les divers systèmes fondamentaux que l'on peut obtenir ainsi, en un même point a, sont ensuite étudiées. L'auteur examine aussi les procédés de prolongement analytique permettant de passer du domaine d'un point à celui d'un autre.

La même étude est complétée ensuite par celle des singularités spéciales aux équations non homogènes.

Une seconde partie du Mémoire est consacrée aux expressions différentielles linéaires et homogènes, à coefficients algébriques, qui sont *régulières*, au sens classique du mot, pour chaque combinaison de branches adoptée pour les fonctions u, v, w. L'auteur donne le type général de pareilles expressions ; il reprend ensuite, par des méthodes appropriées, l'étude faite dans le cas général (dans la première Partie du Mémoire), pour les équations linéaires dont le premier membre est une expression linéaire régulière.

Enfin, dans une troisième et dernière Partie de son travail, M. Thomé apprend à former une équation linéaire à coefficients rationnels à laquelle satisfont les intégrales linéairement indépendantes d'une équation linéaire à coefficients algébriques donnée, et montre le parti qu'on en peut tirer pour étudier les intégrales de l'équation proposée.

Königsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Sur le théorème d'Eisenstein concernant l'irréductibilité de certaines équations algébriques. (53-78).

Si dans une équation algébrique à coefficients entiers

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

tous les coefficients, sauf le premier et le dernier, sont divisibles par un nombre premier p, et si le dernier n'est pas divisible par p^2, *l'équation est irréductible.*

Tel est le théorème d'Eisenstein. L'auteur le généralise et obtient le suivant, en suivant pas à pas la démonstration d'Eisenstein :

Toute équation algébrique, de la forme

$$F_0(x)y^n-(x-\alpha)F_1(x)y^{n-1}+\ldots+(x-\alpha)F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)F_n(x)=0,$$

où $F_0(\alpha)$ *et* $F_n(\alpha)$ *ne sont pas nuls, est irréductible.*

En cherchant à fonder ce théorème sur la nature analytique de la fonction algébrique définie par cette équation, M. Königsberger est conduit à le généraliser encore, en supposant que les coefficients de l'équation en y sont divisibles par certaines puissances de deux binomes $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$. Il repasse ensuite au cas de l'équation à une indéterminée x, et obtient un énoncé relatif au cas où $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont divisibles par certaines puissances de deux nombres premiers p et q. Ces derniers énoncés sont un peu trop compliqués pour être transcrits ici.

Gutzmer (*A.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires homogènes (79-84).

Faire l'*itération* d'une équation linéaire du premier ordre

$$p_0 y' + p_1 y = 0,$$

c'est, d'après l'auteur, y remplacer l'indéterminée y par le premier membre de cette équation ; les *itérations successives* se définissent d'elles-mêmes. L'équation ainsi obtenue par n itérations successives est vérifiée par les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des intégrales de l'équation du second ordre obtenue par une seule itération de l'équation

$$n p_0 y' + p_1 y = 0.$$

Wendt (*E.*), à Berlin. — Démonstration élémentaire de ce théorème que, dans toute progression arithmétique illimitée $my+1$, figurent une infinité de nombres premiers. (85-88).

Cette démonstration repose sur la considération des racines primitives de l'équation binome $x^m-1=0$ et sur le théorème de Fermat.

Bohlmann (*G.*), à Göttingen. — Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions indéterminées et indépendantes de la variable indépendante. (89-110).

L'auteur traite le même problème qu'il a déjà traité (même journal, t. CXIII, p. 207-251) pour une seule équation du premier ordre. Dans les systèmes considérés figurent des fonctions indéterminées $Z_1, \ldots, Z_s$ et l'intégrale générale doit avoir une forme qui reste la même quelles que soient ces fonctions indéterminées : dans cette forme de l'intégrale générale figureront seulement d'autres fonctions indéterminées $u_1, \ldots, u_s$ dont les valeurs dépendront de celles de $Z_1, \ldots, Z_s$.

La recherche de ces systèmes est identique à celle des systèmes qui possèdent des *systèmes fondamentaux d'intégrales*, systèmes qui se rattachent à la théorie des groupes de transformations et ont été déterminés et étudiés par Lie (*Leipziger Berichte*, 1893).

Guldberg (*Alf.*), à Christiania. — Sur la théorie des équations différentielles qui possèdent des solutions fondamentales. (111-118).

Autre solution du même problème. L'auteur, comme le précédent, se borne aux systèmes qui proviennent de groupes de transformations transitifs; et traite en détail le cas de deux équations à deux fonctions inconnues.

Meyer (*A.*), à Zürich. — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. (Continuation du Mémoire commencé dans le même journal, t. CXIV, p. 233-254). (150-182).

L'auteur traite d'abord le problème général suivant :

Représenter une forme linéaire quadratique φ, *de déterminant* ΩM, *par une forme ternaire quadratique* f, *ayant pour invariants* Ω et Δ; φ *étant supposée primitive et* M *premier à* Δ; *et en écartant les représentations impropres.*

Un dernier paragraphe est consacré à la représentation des nombres par des formes ternaires quadratiques; c'est principalement de la possibilité d'une telle représentation qu'il s'agit. Les conditions qu'elle suppose s'expriment au moyen des *caractères* définis dans la première partie du Mémoire.

Sujet du prix proposé par la Société princière Jablonowski pour l'année 1898. (183-184).

Ce sujet se rapporte à un Mémoire de Green sur la généralisation de la loi d'attraction de Newton.

Knoblauch (*J.*). — Sur la transformation simultanée des formes différentielles quadratiques. (185-200).

Ce travail se rapporte à la théorie des surfaces. Le but de l'auteur est de permettre d'arriver aux divers résultats qui sont invariants par rapport aux changements de coordonnées curvilignes en n'introduisant dans les calculs que des expressions possédant le même caractère d'invariance. Dans la théorie de la déformation, où l'on part du carré de l'élément linéaire seulement, un seul covariant suffit, qui a été introduit par G. Ricci, et aussi par l'auteur, dans un travail précédent (même journal, t. CXI, p. 282). Ici l'auteur considère en même temps une seconde forme différentielle quadratique, le produit de la courbure normale par le carré de l'élément linéaire.

Plus généralement l'auteur suppose deux formes quadratiques différentielles à n variables, et montre qu'il y a n paramètres différentiels du premier ordre, de sorte que toutes les différentiations peuvent se remplacer par des opéra-

tions covariantes ; ce qui constitue une différence essentielle avec le cas d'une seule forme, où l'on ne trouve qu'un seul paramètre différentiel.

Hermite (*Ch.*). — Sur la fonction $\log\Gamma(a)$. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. K. Hensel. (201-208).

Dans un article des *Mathematische Annalen* (vol. XLI, p. 581) l'auteur a donné un développement en série de $\log[\Gamma(a+\xi)\Gamma(a+1-\xi)]$, en supposant $0<\xi<1$. Il traite ici par la même méthode la fonction $\log\Gamma(a+\xi)$, obtient un développement suivant les puissances descendantes de a, et montre que la série obtenue doit être employée comme celle de Stirling.

Meyer (*Franz*), à Clausthal. — La notion de résultant dans la trigonométrie sphérique. (209-220).

Les formules de trigonométrie se déduisent d'un certain nombre d'entre elles par élimination de certains des éléments du triangle considéré ; l'auteur cherche à les obtenir par combinaison linéaire de certaines formules fondamentales, comme on obtient le résultant de deux formes binaires par combinaison linéaire de ces deux formes. Il prend successivement comme formes fondamentales les premiers membres des trois formules des cosinus

$$2\Lambda_i = \cos a_i - \cos a_k \cos a_l - \sin a_k \sin a_l \cos\alpha_i \qquad (i, k, l = 1, 2, 3);$$

puis les six fonctions

$$2\,C_{ik} = \cos a_i \sin a_l - \sin a_l \cos\alpha_i - \sin a_i \cos a_l \cos\alpha_k.$$

Vahlen (*K.-Th.*). — Sur les valeurs approchées et les fractions continues. (221-233).

Soit w un nombre fractionnaire positif. Partant des fractions $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$, on construit une suite de fractions telles que chacune d'elles s'obtienne en ajoutant terme à terme les deux fractions déjà formées dont les valeurs comprennent w sans comprendre la valeur d'une autre fraction déjà formée. Cette suite s'appelle suite de Farey relative à w (d'après Hurwitz, *Mathematische Annalen*, t. XLIV) ; et si l'on écrit au-dessous de chacun de ses termes le signe + ou le signe —, suivant que ce terme est supérieur ou inférieur à w, la suite des signes ainsi obtenue s'appelle la *caractéristique* de w. Les valeurs approchées de w figurant dans la suite de Farey sont les mêmes que celles qu'on obtient dans un développement en fraction continue effectué en prenant les restes des divisions tantôt positivement, tantôt négativement, suivant une loi donnée par la *caractéristique* de w. L'auteur compare les divers développements de w en fraction continue, lorsque l'on prend les restes des divisions, positivement ou négativement, suivant toutes les lois possibles. Celui dans lequel les restes sont minima en valeur absolue est le plus court possible. L'auteur montre le lien de cette théorie avec celle de la décomposition d'une substitution linéaire, de déterminant 1, en substitutions élémentaires, de la forme $1-x$ et $\frac{1}{1+x}$.

Müller (Emil), à Königsberg-i-Pr. — Application des méthodes de Grassmann à la théorie des courbes et des surfaces du second degré. (234-253).

L'auteur s'est proposé de retrouver diverses transformations de déterminants, se rapportant à la théorie des sections coniques, et dues à Caspary (même journal, t. XCII, p. 123 et ss.), en employant, comme lui, les méthodes de Grassmann, mais en évitant le retour aux unités primitives. Il y réussit, d'une manière simple, en établissant d'abord ce résultat intéressant que le *produit extérieur* des six produits algébriques formés avec trois points quelconques

$$[a^2, b^2, c^2, 2bc, 2ca, 2ab]$$

est une puissance du *produit extérieur* de ces six points.

Cette identité résulte de quatre théorèmes généraux de la *théorie de l'extension* (Ausdehnungslehre), dont les deux premiers se trouvent déjà dans Grassmann, avec une interprétation différente.

Les mêmes considérations, appliquées à la Géométrie de l'espace, redonnent, entre autres, les transformations, dues à Hunyady, pour le *produit extérieur* des carrés de dix points. On prévoit que les résultats obtenus sont susceptibles de nouvelles généralisations, en considérant, par exemple, les cubes de dix points du plan.

Hensel (K). — Sur un nouveau théorème fondamental de la théorie des fonctions algébriques d'une variable. (254-294).

La définition du plus grand commun diviseur de plusieurs fonctions entières d'une variable x se généralise, non seulement quand on considère des fonctions rationnelles de x, mais encore quand on introduit aussi des *fonctions-racines*, de la forme $[a(x)]^\delta$, δ étant un nombre positif ou négatif et rationnel quelconque. Cela étant, le plus grand commun diviseur des n branches $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la fonction algébrique définie par l'équation

$$y^n - a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions entières, est, par définition, le plus grand commun diviseur des fonctions racines

$$a_1(x), \quad a_2(x)^{\frac{1}{2}}, \quad a_3(x)^{\frac{1}{3}}, \quad \ldots, \quad a_n(x)^{\frac{1}{n}}.$$

Soient alors

$$Y_1^i, \quad Y_2^i, \quad \ldots, \quad Y_n^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les n branches de n fonctions appartenant au *corps* des fonctions rationnelles de x et y : la définition des *diviseurs élémentaires* du déterminant des fonctions $Y_k^{(i)}$ est toute semblable à celle des diviseurs élémentaires introduits par Weierstrass, et leur introduction jette une lumière nouvelle sur la théorie des *corps* de fonctions algébriques.

Le problème capital de cette théorie est en effet la recherche des *systèmes fondamentaux* de fonctions $Y^{(i)}$; un tel système étant défini par cette pro-

priété que toute fonction algébrique entière qui fait partie du corps considéré s'exprime en fonction linéaire homogène des fonctions constituant le système fondamental, les coefficients de cette fonction linéaire étant rationnels et entiers en x. Or l'auteur montre que, *pour que le système* $Y^{(i)}, \ldots, Y^{(n)}$ *soit fondamental, il faut et il suffit que tous ses diviseurs élémentaires soient des fonctions-racines entières, dont les facteurs linéaires aient pour exposants des fractions proprement dites et positives.*

En plus de ce théorème fondamental, le Mémoire traite encore de la réduction d'un système de fonctions $Y^{(i)}$ à une *forme canonique.*

Enfin une seconde partie du Mémoire est consacrée à la généralisation des définitions et des résultats précédents, quand on considère, au lieu de fonctions $a(x)$, dépendant d'une seule variable indépendante, des fonctions homogènes de deux variables indépendantes.

Mirimanoff (*D.*), à Genève. — Sur la congruence

$$(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r \qquad (\bmod p).$$

(295-300).

Sylvester a donné une expression générale de la fonction numérique q_r définie par cette congruence, au moyen d'une série de fractions très simples. L'auteur montre comment cette expression doit être modifiée pour pouvoir s'appliquer à tous les cas, et peut être considérablement simplifiée dans le cas où r n'est pas une racine primitive pour le module p. Des résultats obtenus il déduit ensuite diverses propriétés arithmétiques des nombres de Bernoulli.

Schwering (*K.*), à Düren. — Sur les tétraèdres rationnels. (301-307).

L'auteur résout le problème suivant d'analyse indéterminée :

Trouver tous les tétraèdres dont les arêtes et le volume sont mesurés par des nombres rationnels.

Dans le cas particulier où le volume est nul, on obtient ainsi une solution simple du problème traité par Kummer :

Trouver tous les quadrilatères dont les côtés et les diagonales sont mesurés par des nombres rationnels.

Kneser (*A.*), à Dorpat. — Études sur le mouvement dans le voisinage d'une position d'équilibre instable (premier Mémoire). (308-327).

L'auteur considère un point mobile dans un plan sous l'action d'une force possédant un potentiel U qui a un minimum au point O, et est, dans le domaine de ce point, de la forme

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + P(x, y).$$

où a et b sont des constantes positives différentes, et P une série entière, commençant par des termes du troisième degré au moins. Soit U_0 la valeur de ce potentiel pour la position initiale du point mobile, supposée dans le domaine considéré, et v_0 sa vitesse initiale. L'auteur démontre que, parmi tous les mouvements possibles, il y en a qui possèdent les propriétés suivantes :

1° Si $v_0^2 > 2U_0$, le point atteint la position O;

2° Si $v_0^2 < 2U_0$, le point arrive sur la ligne de niveau $U = \frac{1}{2} v_0^2$ avec une vitesse nulle, et repart en sens contraire par le même chemin;

3° Si $v_0^2 = 2U_0$, le point se rapproche indéfiniment de la position O, sans jamais l'atteindre.

La partie des résultats précédents, relative aux solutions asymptotiques, est ensuite reprise par l'auteur au moyen de la méthode de Poincaré (*Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste,* t. I, p. 335 et ss.), telle qu'elle a été exposée par Picard (*Traité d'Analyse,* t. III, p. 19); et se trouve ainsi complétée par un énoncé plus précis.

L'auteur annonce que les méthodes employées par lui dans le problème particulier précédent permettent une discussion analogue pour le problème général de la Dynamique.

Grünfeld (E.), à Nikolsburg. — Sur les relations qui lient les déterminants fondamentaux d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, et de ses n adjointes. (328-342).

Soient $y_1 \ldots y_n$ n intégrales indépendantes d'une équation linéaire d'ordre n; et

$$D(y_1, \ldots, y_n) = \Sigma \pm (y_1 y'_2 \ldots y_n^{(n-1)}),$$

le déterminant formé avec ces fonctions et leurs dérivées successives. Les adjointes ont respectivement pour systèmes fondamentaux d'intégrales

$$u_1 = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_1^{(k-1)}}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_n^{(k-1)}},$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pour $k = n$, on a la relation (Frobenius).

$$D(y_1, \ldots, y_n) D(u_1, \ldots, u_n) = 1,$$

que l'auteur démontre d'abord. Il cherche ensuite des relations analogues pour les autres adjointes, mais ces relations sont de forme beaucoup moins simple, et les coefficients de l'équation proposée y subsistent.

Hamburger (M.). — Sur l'équation fondamentale, dans la théorie des équations différentielles linéaires homogènes. (343-348).

Cette équation fondamentale a été obtenue par Fuchs en considérant les valeurs initiales et finales de n intégrales, quand on fait décrire à la variable indépendante un contour fermé ; plus récemment, Schlesinger a montré qu'on

la retrouvait en considérant une seule intégrale, mais en faisant décrire à la variable indépendante n fois de suite le contour fermé considéré. L'auteur se place successivement à ces deux points de vue, et donne ainsi deux formes nouvelles de l'équation fondamentale, où interviennent les valeurs, non seulement des intégrales, mais aussi de leurs dérivées successives.

Notices nécrologiques. (349-350).

La rédaction fait part de la mort de Arthur Cayley (16 août 1821-26 janvier 1895), Ludwig Schläfli (15 janvier 1814-20 mars 1895), Josef Dienger (5 novembre 1818-27 novembre 1894).

Tome 116; 1896.

Wallenberg (*Georg*). — Sur la théorie des équations différentielles algébriques du premier ordre. (1-9).

L'auteur explique, dans une introduction, comment le problème qu'il traite se rattache à l'étude des équations différentielles du premier ordre à points critiques fixes et à intégrales algébriques (Fuchs, Poincaré, Picard). L'énoncé de ce problème et le résultat obtenu sont résumés dans le théorème suivant:

Si une équation linéaire et homogène du second ordre

$$y'' + \lambda y' + \mu y = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions rationnelles de la variable indépendante z, possède une intégrale algébrique particulière du premier ordre

$$F(z, y, y') = 0,$$

où F *est un polynome en z, y, y' contenant, en dehors des termes indépendants de y et y', au moins deux termes de degrés différents en y et y', toutes les intégrales de cette équation sont algébriques.*

Zimmermann (*O.*), à Dantzig. — Sur l'ordre de l'enveloppe d'une famille de courbes qui se répartissent en groupes de w courbes, en correspondance projective avec les points d'une droite. (10-13).

Soit μ le nombre des courbes de la famille passant par un point quelconque du plan, ν le nombre de ces courbes tangentes à une droite quelconque du plan; l'ordre de l'enveloppe est $2(\mu - nw) + \nu$, n étant le degré des courbes considérées. Ce résultat rectifie une formule de Cremona.

Teixeira (*F.-Gomes*), à Porto (Portugal). — Sur le développe-

ment des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. (14-32).

Il y a deux cas à distinguer :

1° Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'*ovale* dont l'équation est $|\sin z| = c$, *où c est une constante inférieure ou égale à un,* et dont le centre est l'origine des coordonnées, elle est développable, dans cette aire, en une série de la forme

$$f(z) = f(0) + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin^p z,$$

dont les coefficients sont donnés par les formules suivantes, où l'on doit remplacer, après les multiplications indiquées, les puissances de $f(0)$ par les dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance

$$A_{2n} = \frac{f^2(0)[f^2(0)+2^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots 2n},$$

$$A_{2n+1} = \frac{f(0)[f^2(0)+1^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2.3\ldots(2n+1)}.$$

2° Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la *bande infinie* comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$, *où c est une constante supérieure à un,* et si elle admet la période 2π, elle est développable, dans cette bande en une série de la forme

$$f(z) = \frac{1}{2}[f(0)+f(\pi)] + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin^p z$$

$$+ \cos z \left\{ \frac{1}{2}[f(0)-f(\pi)] + \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin^p z \right\},$$

où les coefficients A_p et B_p sont donnés par des formules analogues à celles du premier cas.

L'auteur applique ces formules aux fonctions x^k, $x \cot x$ et $\sin \frac{2kx}{\pi}$.

Netto (*Eugen*), à Giessen. — Sur la théorie des résultants. (33-49).

Soient

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1},$$

les deux polynomes considérés. Dans la méthode d'élimination de Kronecker (*Berl. Mon. Ber.*, 1881), on introduit le développement

$$\frac{g(x)}{f(x)} = c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \ldots,$$

et les déterminants

$$C_{\lambda+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_\lambda \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{\lambda+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_\lambda & c_{\lambda+1} & c_{\lambda+2} & \dots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}.$$

Dans le méthode de Bézout interviennent les déterminants symétriques

$$B_{\lambda+1} = \sum \pm (d_{11}\, d_{22} \dots d_{\lambda+1,\lambda+1}),$$

où

$$d_{i,k} = \sum_{h=0}^{h=i-1} (a_h\, b_{h'} - a_{h'} b_h) \qquad (h + h' = i + k).$$

Par des transformations de déterminants, tout élémentaires, l'auteur obtient les expressions des c_λ et des C_λ sous forme de déterminants, dont les éléments sont des coefficients de f et de g ; et démontre que le déterminant adjoint de $C_{\lambda+1}$ est égal à $B_{\lambda+1}$. Il démontre également ce théorème de Jacobi que le déterminant adjoint de $B_{\lambda+1}$ est un déterminant *récurrent ;* et donne enfin une démonstration élémentaire de la formule de récurrence, due à Jacobi, qui lie les polynomes

$$\Psi_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{\nu-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-1} & z^\nu \end{vmatrix}.$$

Le travail se termine par une remarque sur la méthode du plus grand commun diviseur : la puissance du premier coefficient de g, par laquelle on multiplie f pour éviter l'introduction des dénominateurs, se trouve en facteur dans le reste de la deuxième division, et l'on peut alors la négliger.

Meder (*Alfred*), à Dorpat. — Sur quelques espèces de points singuliers des courbes de l'espace. (50-84 et 247-264).

Un point décrivant une courbe gauche, on peut considérer (von Staudt) le sens dans lequel le point se déplace, le sens dans lequel la tangente tourne dans le plan osculateur, le sens dans lequel le plan osculateur tourne autour de la tangente : une singularité est alors caractérisée par le changement brusque de l'un ou l'autre de ces trois sens. De là sept espèces de singularités.

L'auteur cherche, avec beaucoup de soin, les caractères analytiques de ces diverses singularités, en supposant les coordonnées du point courant de la courbe fonctions uniformes d'un paramètre.

Il étudie aussi les singularités correspondantes des projections de la courbe sur le plan osculateur, le plan rectifiant et le plan normal.

Hermite (*Ch.*). — Sur une extension du théorème de Laurent. (Extrait d'une lettre adressée par M. Ch. Hermite à M. L. Fuchs). (85-89).

Il s'agit de développer les racines d'une équation algébrique dans une cou-

ronne circulaire ayant pour centre l'origine des coordonnées et ne contenant à son intérieur aucun point singulier de l'équation. Une transformation de la forme $\zeta = z^{\frac{1}{p}}$ permet d'appliquer le théorème de Laurent.

Une application est faite à la fonction $\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$; l'auteur en tire une formule intéressante pour le développement de l'intégrale elliptique $\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

Hamburger. — Démonstration de la formule de Gauss pour la détermination de la fête de Pâques juive. (90-96).

Cette formule a été donnée par Gauss sans démonstration ; les démonstrations données depuis ne correspondent pas à la simplicité de la formule. Celle que propose l'auteur est fondée sur une remarque très simple, tirée de l'étude du calendrier israélite.

Schlesinger (Ludwig). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes par des quadratures. (97-132).

Il s'agit de l'intégration par des intégrales définies, portant sur des fonctions où la variable indépendante figure comme paramètre. On connaît deux méthodes classiques pour obtenir une intégration de cette nature, celle de Laplace et celle d'Euler. Poincaré a donné à la première une forme qui montre qu'elle est applicable à toute équation linéaire homogène à coefficients rationnels. L'auteur se propose de montrer que la méthode d'Euler peut se généraliser d'une manière toute semblable.

Après avoir rappelé la méthode de Laplace, de manière à mettre en évidence le rôle qu'y joue la notion d'équation *adjointe,* l'auteur donne les diverses formules relatives à la transformation d'Euler. Soit

$$D_x(y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \frac{d^k y}{dx_k} = 0$$

la proposée, où les $P_k(x)$ sont des polynomes de degré m. On peut lui associer une autre expression différentielle de même nature, mais d'ordre $m+n$

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m+n} \varphi_\nu(z) \frac{d^\nu u}{dz^\nu},$$

telle que l'on ait l'identité

$$D_x[(z-x)^{\xi-1}] = \mathfrak{D}_z[(z-x)^{\xi+m-1}].$$

Cette identité contient implicitement, comme cas particulier, ainsi que le montre l'auteur dans la suite de son travail, la forme donnée par Jacobi au théorème d'Abel sur l'*échange du paramètre et de l'argument.* Et ce sont l'expression adjointe $\mathfrak{D}'_z(v)$ et l'expression bilinéaire $\mathfrak{D}_z(u, v)$, correspondantes à cette expression $\mathfrak{D}_z(u)$, qui jouent dans la méthode le rôle fondamental. En

effet

$$y = \int_L v(z - x)^{\xi - 1} dz$$

est une intégrale de la proposée, si v est intégrale de $\mathfrak{D}'_z(v) = 0$, et si le chemin d'intégration L est choisi de manière à annuler l'intégrale

$$\int_L \frac{d}{dz} \mathfrak{D}_z((z - x)^{\xi + m - 1}, v)\, dz.$$

M. Schlesinger choisit comme chemins d'intégration L les chemins appelés *doubles-lacets,* et étudie le choix de l'intégrale v d'une manière complète en supposant que l'équation proposée appartient à la classe des équations de Fuchs; il détermine à cet effet les substitutions qui se produisent sur les diverses intégrales y, correspondant à un système fondamental d'intégrales v de l'équation auxiliaire, lorsque la variable z décrit un contour fermé. La méthode employée est celle de la *déformation des contours d'intégration.* Les formules qu'elle fournit contiennent comme cas particulier des formules de Fuchs pour les intégrales hyperelliptiques de première espèce, et des formules de Bröcker relatives à une classe plus générale d'intégrales abéliennes.

Hermite, à Paris, et *Sonin*, à Saint-Pétersbourg. — Sur les polynomes de Bernoulli (échange de lettres). (133-156).

1° *Lettre de M. Sonin.* — M. Sonin explique la méthode par laquelle il est arrivé, en 1888 (*Annales de l'Université de Varsovie*), à une formule sur le developpement de $\log\Gamma(x)$, donnée par M. Hermite dans le Tome CXV du *Journal für Mathematik.* M. Sonin part des polynomes de Bernoulli, définis par l'équation

$$\varphi_n(x + 1) - \varphi_n(x) = n x^{n-1},$$

et définit les nombres de Bernoulli par l'équation

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\, dx = (-1)^n B_n.$$

Il établit, entre autres, la formule

$$\varphi_n(x) = x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} + \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \ldots.$$

d'où se déduit la formule de récurrence liant les nombres B_n. Les polynomes $\varphi_n(x)$ sont eux-mêmes liés par la formule de récurrence

$$(1) \qquad f(y + xh) = f(y) + \sum_{i=1}^{x} [f^{(i-1)}(y + h) - f^{(i-1)}(y)] h^{i-1} \frac{\varphi_i(x)}{i!},$$

où $f(x)$ est un polynome de degré n. En particularisant le polynome on obtient diverses relations particulières entre les φ_n et entre les B_n. Cette formule (1) est ensuite généralisée, en supposant que $f(x)$ est une fonction quelconque: il faut ajouter alors au second membre un reste $R_n(x, y)$, dont

M. Sonin donne une expression sous forme d'intégrale définie. L'application à la fonction $\log\Gamma(x)$ donne la formule dont il a été question au début.

Citons encore la formule

$$\frac{h}{2}(e^h+1) = \left(1+\frac{B_1}{2!}h^2-\frac{B_2}{4!}h^4+\ldots\pm\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k}\right)(e^h-1)$$
$$+\frac{(-h)^{n-1}}{n!}\int_0^1 \varphi_n(x)\,e^{hx}\,dx,$$

d'où se déduit, entre autres résultats,

$$B_n = 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{x=1}^{\infty} x^{-2n}.$$

2° *Lettre de M. Hermite.* — M. Hermite a trouvé de son côté le développement d'une fonction quelconque suivant les polynomes de Bernoulli, en partant de la formule de définition

$$\frac{e^{xy}-1}{e^y-1} = \sum \frac{S_n(x)}{[n]}y^n, \qquad S_n(x) = \frac{\varphi_{n+1}(x)}{n+1};$$

et l'a généralisée en définissant de même des polynomes $\Phi_n(x)$ par l'identité

$$\frac{e^{xy}}{A e^{ay} - A e^{by} - \ldots - L e^{ly}} = \sum \frac{\Phi_n(x)}{[n]}y^n.$$

3° *Lettre de M. Sonin.* — Contient diverses propriétés arithmétiques des nombres de Bernoulli, par exemple ce théorème que $\frac{B_n p^n(p^{2n}-1)}{n}$ est un nombre entier. La fin de la lettre est consacrée à la démonstration d'une formule de développement de l'intégrale $\int_0^\infty F(x)\frac{z\,dx}{x^2+z^2}$; cette formule peut servir à la détermination du reste de la formule de Stirling; l'auteur l'applique pour le reste du développement de $\log\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)}$.

Heffter (*Lothar*), à Giessen. — Sur les multiples communs des expressions différentielles linéaires et les équations différentielles linéaires de la même classe. (157-166).

Soient

$$P(y) = p_0 y + p_1 y' + \ldots + p_\nu y^{(\nu)}, \qquad R(y) = r_0 y + r_1 y' + \ldots + r_n y^{(n)},$$

deux expressions différentielles linéaires quelconques. On a par définition

$$PR = p_0 R(y) + p_1\frac{dR(y)}{dx} + \ldots + p_\nu\frac{d^\nu R(y)}{dx^\nu};$$

cette nouvelle expression s'appelle un *multiple* de $R(y)$, et $R(y)$ est *diviseur* de PR. D'après cette définition bien connue, la notion de *plus petit commun multiple* de deux expressions P et R est immédiate. L'auteur montre que ce plus petit commun multiple est d'ordre $n + \nu - \sigma$, si P et R ont un *plus grand commun diviseur* d'ordre σ.

Si l'on suppose $\nu \leqq n - 1$, le plus petit commun multiple de P et R donne, égalé à zéro, une équation linéaire *de la même classe* que $R = 0$, au sens de Riemann et de Fuchs; et, en faisant varier P, on obtient ainsi toutes les équations linéaires de la classe de $R = 0$. De ce point de vue, l'auteur retrouve divers théorèmes de Fuchs, concernant la réductibilité et les équations *déterminantes* des équations linéaires d'une même classe.

Baur (*L.*), à Darmstadt. — Sur la théorie des fonctions algébriques. (167-170).

Soit Ω un *corps* de fonctions algébriques de la variable x; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ un système de fonctions entières appartenant à ce corps. L'auteur montre qu'une fonction $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_n\omega_n$, où les u_k sont des polynomes en x, ne peut être divisible par un facteur linéaire qui ne divise pas chacun des u_k, que si ce facteur figure, au carré au moins, dans le discriminant du système $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Cette remarque permet de simplifier la recherche d'un *système fondamental* du corps Ω.

Kantor (*S.*). — Sur les groupes finis de corrélations. (171-177).

Le produit de deux corrélations étant une collinéation, les groupes cherchés contiennent un sous-groupe invariant qui est un des groupes de collinéations déterminés par Camille Jordan. L'auteur part successivement de chacun de ces groupes et en déduit une définition géométrique des groupes de corrélations correspondants.

Kneser (*Adolf*), à Dorpat. — Étude et représentation asymptotique des intégrales de certaines équations différentielles pour de grandes valeurs réelles de l'argument (premier Mémoire). (178-212).

Les principaux résultats de ce Mémoire sont résumés dans les énoncés suivants :

« Si la variation de la variable réelle x est limitée à un intervalle fini J, si la fonction $f(x, y)$ est continue pour toute valeur réelle et finie de y et est toujours du signe de y; si elle est de plus de nature telle qu'une intégrale réelle et continue de l'équation $y'' = f(x, y)$ soit définie, sans ambiguïté, dans l'intervalle J tout entier, lorsqu'on se donne les valeurs de y et de y' en un point quelconque de cet intervalle ; alors une seule des fonctions y et y' peut s'annuler dans l'intervalle J, et elle ne peut s'annuler plus d'une fois. »

« Si l'intervalle J est infini du côté des x positifs, deux cas peuvent se présenter pour $x = +\infty$:

» A. L'intégrale y devient infinie, par valeurs constamment croissantes ou constamment décroissantes;

» B. L'intégrale y et sa dérivée y' tendent vers zéro, l'une par valeurs croissantes, l'autre par valeurs décroissantes. »

« Sous les hypothèses faites, deux points, dont les abscisses sont distinctes, et appartiennent à l'intervalle J, sont toujours réunis par une courbe intégrale, et une seule. »

» Il y a effectivement, dans le cas où J est infini, des intégrales ayant la propriété (B), et deux telles intégrales sont identiques, dès qu'elles prennent la même valeur pour une valeur de x appartenant à l'intervalle J. »

« Si l'on considère en particulier l'équation linéaire $y'' = y[a^2 + \varphi(x)]$, où $\varphi(x)$ a une dérivée continue dans l'intervalle J, supposé infini, et est de signe constant dans cet intervalle, où l'on a de plus $\lim_{x=+\infty} \varphi(x) = 0$; où enfin l'intégrale $\int_x^{+\infty} \psi(x)\,dx$, dans laquelle $\psi(u)$ désigne la valeur absolue maxima de $\varphi(x)$ pour $x \geqq u$, est supposée avoir une valeur finie et déterminée: alors cette équation a des intégrales de la forme

$$y_1 = B_1 e^{ax}(1 - \varepsilon_1), \qquad y_2 = B_2 e^{-ax}(1 + \varepsilon_2),$$

où B_1 et B_2 sont des constantes, et ε_1 et ε_2 des fonctions qui tendent vers zéro, ainsi que leurs dérivées, pour $x = +\infty$.

» Si l'on suppose en particulier $\varphi(x) = a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \ldots$, à ces intégrales correspondent des séries de la forme

$$e^{\mp ax}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots\right),$$

satisfaisant *formellement* à l'équation. Ces séries représentent des intégrales y, en ce sens que, pour chaque valeur entière de n, on a

$$\lim_{x=+\infty}\left[\left(ye^{\pm ax} - \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{x} - \ldots - \frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right] = 0.$$

Cela est vrai pour toute valeur de α_0 si l'on prend les signes supérieurs, et pour des valeurs convenablement choisies de α_0 seulement, si l'on prend les signes inférieurs. »

L'auteur termine en appliquant ces résultats à la théorie d'une plaque circulaire élastique vibrante.

Kötter (*Fritz*). — Sur une représentation des cosinus directeurs de deux systèmes de coordonnées rectangulaires par des fonctions thêta de deux arguments, qui contient comme cas particuliers la solution de plusieurs problèmes de Mécanique. (213-246).

On sait (Weber, Caspary) que neuf quotients de fonctions thêta de deux arguments, convenablement choisis, satisfont identiquement aux relations d'orthogonalité qui lient les cosinus directeurs de trois axes rectangulaires.

Mais cette propriété ne s'est pas montrée très utile pour les applications à la Mécanique.

L'auteur expose un autre mode de représentation des neuf cosinus par des quotients dont numérateurs et dénominateurs sont des combinaisons de fonctions thêta de deux variables. Il nous est impossible de développer ici ces formules, quoiqu'elles soient de forme relativement assez simple. Les composantes de la rotation instantanée du trièdre dont les axes sont ainsi définis sont données par des formules également simples. Dans toutes ces formules figurent neuf constantes arbitraires a_ρ, b_ρ, c_ρ ($\rho = 1, 2, 3$) et deux couples u'_1, u'_2, u_1, u_2 de deux arguments. L'auteur développe diverses propriétés du système de représentation ainsi obtenu.

L'intérêt de ce système est expliqué par l'auteur dans une introduction au Mémoire. En donnant à certaines des quantités arbitraires a_ρ, b_ρ, c_ρ, u_1, u_2, u'_1, u'_2 des valeurs constantes, et prenant pour les autres des fonctions linéaires du temps convenablement choisies, on obtient la solution de toute une série de problèmes de Mécanique : mouvement d'un corps solide qui a un point fixe (cas de Mme de Kowalewski); mouvement d'un corps solide dans un fluide (cas particuliers de Clebsch et de Steklow). La solution explicite du cas de Steklow n'avait pas encore été donnée.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur le développement en série des intégrales d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de certains points singuliers. (265-306).

Dans les paragraphes 1 et 2 de ce travail, l'auteur étudie le système

$$x\frac{dy_k}{dx} = G_k(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où G_k est une série entière en $x, y_1, \ldots, y_n$ s'annulant pour

$$x = y_1 = \ldots = y_n = 0,$$

et dont les termes du premier degré par rapport aux y seront représentés par

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce système a été considéré déjà par Königsberger et Picard; mais le cas le plus simple seul a été traité. On supposera que le déterminant

$$\Delta(s) = |a_{ki} - s\delta_{ki}|_{i,k=1,2,\ldots,n} \qquad \left(\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}\right)$$

n'a que des diviseurs élémentaires simples :

$$(s - a_1), \quad (s - a_2), \quad \ldots, \quad (s - a_n).$$

Si les parties réelles de $a_1, \ldots, a_m$ sont positives, et celles de $a_{m+1}, \ldots, a_n$ négatives ou nulles; et si, de plus, il n'existe aucune relation entre les $a_1, \ldots, a_m$ de la forme $a_i = \rho + \rho_{i'} a_{i'} + \rho_{i''} a_{i''} + \ldots$, dont les coefficients soient des nombres

entiers positifs, le système a une solution de la forme

$$y_k = \sum_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} C^{(k)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, n \\ \lambda+\lambda_1+\dots+\lambda_m > 0 \end{pmatrix},$$

dépendant de m constantes arbitraires.

Si au contraire il existe une ou plusieurs relations $a_i = \rho + \rho_{i'} a_{i'} + \dots$, les développements sont de la forme

$$y_k = \sum_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} C^{(k)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m} (\log x)^{\lambda_1\nu_1+\dots+\lambda_m\nu_m},$$

où $\nu_1, \dots, \nu_m$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, dont les valeurs dépendent des relations entre $a_1, \dots, a_m$.

Dans le paragraphe 3, ces résultats sont éclairés par quelques exemples ; et dans le paragraphe 4 l'auteur les applique au cas particulier où les équations sont linéaires.

Dans le paragraphe 5, l'auteur étudie l'équation

$$x_n \frac{d^n y}{dx^n} = c_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + c_{n-1} x \frac{dy}{dx} + c_n y + \dots,$$

dont le second membre est une série entière des arguments x, y, $x\frac{dy}{dx}$, ..., $x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, s'annulant pour des valeurs nulles de ces arguments, sous l'hypothèse que l'équation

$$s(s-1)\dots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\dots(s-n+2) + \dots + c_{n-1} s + c_n$$

a des racines $a_1, \dots, a_n$ toutes simples. Si les parties réelles de $a_1, \dots, a_m$ seules sont positives, et si $a_1, \dots, a_m$ ne sont liés par aucune relation de la forme considérée plus haut, l'équation a une intégrale de la forme

$$y = \sum_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} c_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m};$$

dépendant de m constantes arbitraires ; tandis qu'on obtient dans le cas contraire où de telles relations existent entre $a_1, \dots, a_m$, une série

$$y = \sum_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} C_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m} (\log x)^{\lambda_1\nu_1+\dots+\lambda_m\nu_m},$$

où $\nu_1, \dots, \nu_m$ sont de la nature indiquée plus haut.

Meyer (*A.*), à Zurich. — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies (suite du travail commencé au t. CXV du même Journal). (307-325).

L'auteur étudie, dans cette dernière partie de son Mémoire, l'équivalence des formes f_1 ayant pour invariants $\Theta^{x+1}\Omega$, $\Theta\Delta$, où $\Omega\Delta$ est premier à Θ ; puis

des formes f ayant pour invariants $\Theta^{\omega}\Omega$, $\Theta^{\delta+2}\Delta$, où δ est positif et $\Omega\Delta^{\epsilon}$ non divisible par le nombre premier Θ. La conclusion de cette étude est une règle générale pour la détermination du *nombre des classes d'un genre* donné, ayant des invariants Ω, Δ donnés : ce nombre est une puissance de 2, dont l'exposant dépend des *caractères* arithmétiques du genre considéré.

L'auteur démontre encore un lemme dont il a fait usage dans les premières parties du Mémoire ; et étudie la résolubilité de l'équation

$$p^2 - \Omega\,\mathrm{F}(q, q', q'') = \varepsilon.$$

Dans une Note finale, sont énoncés les résultats relatifs au cas où $\Omega = 2^{\omega}$, $\Delta = 2^{\delta}$.

Brioschi (*F.*). — Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques ($p = 2$). (Extrait d'une lettre de M. F. Brioschi à M. L. Fuchs). (326-330).

Soient

$$\omega_{1m},\quad \omega_{2m},\quad \eta_{1m},\quad \eta_{2m}$$

les périodes de première et de seconde espèce ; l'auteur désigne par p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 certains des déterminants de la forme $\omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{1s}\omega_{2r}$, qui suffisent à les exprimer tous ; et calcule, sous forme entièrement explicite, l'équation linéaire du cinquième ordre, déjà considérée par Fuchs, à laquelle satisfont $p_1, p_2, \ldots, p_5$. Il montre que cette équation est équivalente à son adjointe, et la ramène à la forme canonique donnée par M. Darboux pour les équations jouissant de cette propriété.

Au début de la lettre sont indiquées des relations différentielles entre les périodes η et les périodes ω.

Landsberg (*Georg*), à Heidelberg. — Sur les systèmes fondamentaux et les formes bilinéaires. (331-349).

Soit $\mathrm{P}(z)$ un polynome de degré n ; et n polynomes $u_1(z), \ldots, u_n(z)$ de degré $n-1$ et dont le déterminant soit différent de zéro. Tout polynome est congru, *modulo* $\mathrm{P}(z)$, à une expression de la forme $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$, où les x_k sont des constantes : l'auteur dit alors que $u_1 \ldots u_n$ constituent un *système fondamental* pour le module $\mathrm{P}(z)$. Soit alors $\mathrm{Q}(z)$ un polynome quelconque, et formons les identités

$$\mathrm{Q}(z)\,u_i = \sum_k p_{ik}\,u_k\,[\bmod \mathrm{P}(z)] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'auteur démontre que le déterminant des constantes p_{ik} est égal au résultant de $\mathrm{P}(z)$ et de $\mathrm{Q}(z)$.

Après ce théorème préliminaire, l'auteur pose

$$z\,u_i = \sum_k \alpha_{ik}\,u_k\,[\bmod \mathrm{P}(z)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et considère, comme associée au système fondamental considéré, la forme

bilinéaire

$$A = \sum \alpha_{ik} x_i y_k.$$

Le problème de la réduction de cette forme A se ramène à un problème de même nature, relatif au système fondamental $u_1, \ldots, u_n$. Et c'est au moyen de ce principe que l'auteur retrouve la méthode de Frobenius pour réduire l'une à l'autre deux formes bilinéaires équivalentes. Sa méthode lui permet de plus de simplifier les opérations nécessaires dans la méthode de Frobenius.

La forme A n'est pas, à vrai dire, la forme bilinéaire la plus générale; mais l'auteur montre que, dans le cas général, on peut encore ramener, d'une manière analogue, le problème de la réduction d'une forme bilinéaire au problème de la réduction d'un certain système fondamental, associé à cette forme.

Hensel (*K.*). — Sur le plus grand commun diviseur de tous les nombres qui peuvent se représenter par une fonction entière de *n* variables. (350-356).

Soit $F(u_1, \ldots, u_r)$ *une fonction entière de x variables, de degré* n_i *par rapport à* u_i, *et dont les coefficients sont des nombres entiers, rationnels ou algébriques. Le plus grand commun diviseur de tous les nombres représentables par* $F(u_1, \ldots, u_r)$ *est égal à celui des nombres* $F(h_1, \ldots, h_r)$ *où* h_i *prend* $n_i + 1$ *valeurs entières consécutives ; et* $(n_i + 1) \ldots (n_r + 1)$ *est le plus petit nombre de valeurs particulières de la fonction, par lesquelles ce plus grand commun diviseur puisse être déterminé en général.*

Après avoir démontré ce théorème, l'auteur étudie les fonctions d'un degré donné, pour lesquelles le plus grand commun diviseur donné par l'énoncé précédent est le plus grand possible, et expose diverses propriétés de ce plus grand commun diviseur.

Tome 117; 1897.

Fischer (*Karl*). — Sur les systèmes canoniques de fonctions algébriques d'une variable, qui appartiennent à un *corps* du troisième ou du quatrième ordre. (1-25).

Hensel a montré que, pour un *corps* de fonctions algébriques d'ordre quelconque, défini par une équation irréductible

$$y^n - f_1(x) y^{n-1} + f_2(x) y^{n-2} - \ldots \mp f_n(x) = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions rationnelles de x, on peut obtenir certains *systèmes canoniques* de n grandeurs appartenant au corps. Ces systèmes correspondent chacun à une valeur particulière $x = a$, et leur recherche conduit à la construction d'un *système fondamental* de fonctions entières du corps.

L'auteur applique en détail la méthode d'Hensel dans le cas où $n = 3$ et où $n = 4$, en supposant $f_1(x) \equiv 0$; il obtient dans le premier cas deux systèmes, et dans le second cas cinq systèmes dont l'un au moins est canonique pour chacune des valeurs de x à considérer. La solution est fondée sur la considération des déterminants récurrents formés avec les sommes des puissances semblables des racines de l'équation en y considérée.

Schur (*Friedrich*), à Aix-la-Chapelle. — Sur le théorème de *Pohlke*. (24-28).

Étant donnés dans un plan trois segments OX, OY, OZ, ils sont toujours, dans une projection oblique quelconque, les projections de trois diamètres rectangulaires d'une sphère. L'auteur donne une démonstration élémentaire de ce théorème, fondée sur une nouvelle construction de l'ellipse de contour apparent de la sphère inconnue.

Hensel (*K.*). — Sur la représentation des intégrales abéliennes, de première espèce, au moyen d'un système fondamental. (29-41).

Une intégrale de première espèce étant mise sous la forme homogène $\int \bar{\tau}_1(x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)$. $\bar{\tau}_1$ sera par définition une *forme algébrique de première espèce* du corps considéré. Il s'agit de trouver, pour l'ensemble de ces formes de première espèce, un *système fondamental* $\bar{\tau}_1^{(1)}, \ldots, \bar{\tau}_1^{(n)}$ permettant de les représenter toutes par la formule

$$\bar{\tau}_1 = u_1\bar{\tau}_1^{(1)} + \ldots + u_n\bar{\tau}_1^{(n)},$$

où les coefficients $u_1, \ldots, u_n$ sont des formes rationnelles entières quelconques. L'auteur démontre, par la considération des *diviseurs élémentaires* d'un système de formes algébriques, introduite par lui dans la théorie des *corps* de fonctions algébriques, que tout système fondamental de formes de première espèce est le *réciproque* d'un système fondamental de formes entières du corps et inversement. Ce résultat peut être considéré comme dû à Dedekind et Weber; mais l'auteur donne de plus les relations qui existent entre les diviseurs élémentaires d'un système quelconque de formes du corps et ceux d'un système fondamental de formes de première espèce; ce qui donne une méthode pour trouver effectivement toutes les intégrales de première espèce et déterminer leur nombre.

L'auteur termine en appliquant sa théorie aux équations binomes.

Hazzidakis (*J.-N.*), à Athènes. — Déformation avec conservation des rayons de courbure principaux. (42-56).

Les surfaces qui peuvent se déformer avec conservation de leurs rayons de courbure principaux ont été considérées par Ossian Bonnet, mais ce géomètre n'avait pu en obtenir les équations explicitement. L'auteur les obtient sous la

forme suivante :

$$x = \omega[c_1 + c_2\varphi - c_3\varphi^2] - c_4 f,$$
$$y = \omega[c'_1 + c'_2\varphi - c'_3\varphi^2] + c'_4 f,$$
$$z = \omega[c''_1 + c''_2\varphi - c''_3\varphi^2] + c''_4 f,$$
$$\omega = \frac{(v-t)(u-t)}{u-v},$$
$$\varphi = \int\frac{\mathrm{V}\,dv}{(v-t)^2} + \int\frac{\mathrm{U}\,du}{(u-t)^2},$$
$$f = \int\frac{\mathrm{V}^2\,dv}{(v-t)^2} + \int\frac{\mathrm{U}^2\,du}{(u-t)^2},$$

où U et V sont des fonctions arbitraires de u et v respectivement, t un paramètre, et les c des constantes liées par les relations

$$\Sigma c_1^2 = \Sigma c_3^2 = \Sigma c_2 c_3 = \Sigma c_1 c_2 = 0, \qquad \Sigma c_2^2 = -1, \qquad \Sigma c_3 c_1 = \frac{1}{2}.$$

Ces surfaces ont des lignes de courbure isométriques.

Netto (Eugen), à Giessen. — Sur la théorie des résultants (addition au Mémoire du Tome CXVI, p. 33-49, de ce journal). (57-71).

L'auteur démontre que toutes les fonctions Ψ_k qui interviennent dans la méthode d'élimination de Kronecker, pour la formation du plus grand commun diviseur des polynomes considérés, sont nulles à partir d'un certain rang. Il établit aussi une propriété des mineurs du déterminant, ayant pour éléments des coefficients de ces deux polynomes, qui représente leur résultant.

Kneser (Adolf), à Dorpat. — Étude et représentation asymptotique des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, pour de grandes valeurs de l'argument (deuxième Mémoire). (72-103).

Dans ce deuxième Mémoire, l'auteur considère une équation $y'' + yf(x) = 0$, où $f(x)$ et sa première dérivée sont finies et continues pour les valeurs de x supérieures à un nombre positif g, et où $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = a^2$. Il montre d'abord qu'elle a des intégrales finies et continues pour $x > g$, et s'annulant pour des valeurs de x supérieures à tout nombre donné. Si, de plus, l'intégrale $\int_x^{+\infty}[f(x) - a^2]\,dx$ est finie et déterminée, et que la différence $[f(x) - a^2]$ garde un signe constant, pour des valeurs de x suffisamment grandes, chaque intégrale se représente par une expression de la forme

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \varepsilon,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes et ε une fonction qui s'annule, ainsi que sa dérivée, pour $x = +\infty$.

Si $f(x) = a^2 + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \ldots$, il existe des développements de la

forme

$$\cos ax[\alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \alpha_2 x^{-2} + \ldots] + \sin ax[\beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \beta_2 x^{-2} + \ldots],$$

qui satisfont formellement à l'équation, et qui correspondent à chaque intégrale y de manière que l'on ait

$$\lim_{x=+\infty}\left[x_n\left(y - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\alpha_\nu \cos ax + \beta_\nu \sin ax}{x^\nu}\right)\right] = 0.$$

L'auteur termine en appliquant ces résultats aux fonctions de Bessel.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur le développement en série des intégrales d'un système d'équations différentielles, dans le voisinage de certains points singuliers (suite du Mémoire du Tome CXVI, p. 265-306, de ce journal). (104-128).

Les équations et systèmes d'équations considérés sont les mêmes que dans la première Partie du Mémoire; mais l'auteur suppose maintenant que les diviseurs élémentaires des déterminants $\Delta(s)$ relatifs aux systèmes considérés, et que les racines des équations auxiliaires analogues relatives aux équations considérées, ne sont plus simples. Les développements en série obtenus sont de forme un peu compliquée pour être transcrits ici; il y a encore les deux mêmes cas à considérer que dans la première Partie du Mémoire.

Hensel (*Kurt*). — Sur la réduction des systèmes algébriques à leur forme canonique. (129-139).

Dans un précédent Mémoire (même journal, t. CXV, p. 254-294) l'auteur a défini les *systèmes canoniques* de n fonctions algébriques faisant partie d'un *corps* d'ordre n, et montré comment on peut les déduire d'un système quelconque de n fonctions du *corps* considéré. Mais il n'avait développé cette théorie que relativement à un seul des facteurs linéaires de la forme $(x - a)$ qui sont contenus dans les *diviseurs élémentaires* du déterminant formé avec les diverses déterminations de n fonctions du système considéré. Dans ce nouveau travail, la question est reprise en considérant simultanément tous les facteurs linéaires figurant dans les diviseurs élémentaires. La théorie est appliquée ensuite au système important formé des fonctions $[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}]$, où y désigne la fonction algébrique de x qui définit le *corps*. L'auteur explique en terminant comment ses résultats constituent un progrès important sur ceux que l'on doit, sur ce sujet, à Kronecker.

Landsberg (*Georg*), à Heidelberg. — Sur le système fondamental et le discriminant des corps de nombres algébriques, qui sont formés avec des radicaux. (140-147).

Recherche d'un système fondamental et du discriminant d'un corps algébrique défini par une équation binome $x^\lambda - a = 0$, où a est un nombre entier.

La question est traitée relativement à un module premier p. Le cas où λ est premier et est pris pour module donne un résultat très simple.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur la théorie de la transformée d'*Euler*, pour une équation différentielle linéaire homogène de la classe de *Fuchs*. (148-167).

Dans des travaux précédents (*Comptes rendus*, 24 juin 1895; *Journal für Mathematik*, t. CXVI, p. 97 et suiv.) l'auteur a montré qu'on pouvait intégrer toute équation linéaire homogène par une intégrale $\int_{\text{c}} w(z-x)^{\xi-1}dx$, prise suivant un chemin d'intégration convenablement choisi, w étant définie par une nouvelle équation linéaire, qui s'appellera la *transformée d'Euler* de la première. M. Schlesinger étudie, dans cette nouvelle Note, les relations qui existent entre deux équations linéaires dont les transformées d'Euler appartiennent, au sens de Riemann, à la même *classe*. La question de la réductibilité des transformées est aussi approfondie. Enfin l'auteur applique les résultats obtenus à l'équation de Tissot-Pochhammer et plus spécialement aux équations qui, d'après Fuchs, lient les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques de première et de deuxième espèce.

Günther (*Paul*). — Sur la théorie de l'équation adjointe. (Note posthume). (168).

L'auteur donne une décomposition symbolique du premier membre de l'équation adjointe en facteurs du premier ordre, qui met en évidence la réciprocité de l'adjointe et de la proposée, et diverses autres propriétés connues de l'adjointe.

Mertens (*F.*), à Vienne. — Sur la multiplication et le non-évanouissement des séries de *Dirichlet*. (169-184).

L'auteur considère r séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_n^{(i)}$, sous les hypothèses suivantes :

1° On a, quel que soit q, les G_i étant certaines constantes et λ un nombre non négatif inférieur à 1,

$$\operatorname{mod}(a_p^{(i)}+a_{p+1}^{(i)}+\ldots+a_q^{(i)})<G_i q^\lambda;$$

2° On a, c_i étant donné,

$$\operatorname{mod} a_1^{(i)}+\frac{1}{2}\operatorname{mod} a_2^{(i)}+\ldots+\frac{1}{n}\operatorname{mod} a_n^{(i)}<(1+\log n)^{c_i}.$$

Chacune de ces séries est convergente et leur produit est représenté par la série $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}C_m$, où C_m désigne la somme de tous les produits de la forme

$a_\alpha^{(1)} a_\beta^{(2)} \ldots a_\varepsilon^{(r)}$, tels que $\alpha\beta \ldots \varepsilon = m$. L'auteur montre que, sous certaines conditions, aucune des séries considérées ne peut avoir une somme nulle.

Les séries qui interviennent dans la démonstration, donnée par Dirichlet, de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $Mt + N$, sont des séries de l'espèce considérée : il faut cependant une démonstration spéciale pour établir que celles de ces séries, dont les termes sont réels, ne s'annulent pas. La méthode s'étendrait aux séries employées par Dirichlet pour démontrer que toute forme quadratique binaire, proprement primitive, et de déterminant non quadratique, peut représenter une infinité de nombres premiers contenus dans une formule linéaire.

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires aux équations linéaires du second ordre. (185-224).

La théorie appliquée par l'auteur est celle qu'il a exposée dans le Tome XCVI du même journal. La question fondamentale est la suivante: une équation différentielle donnée

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

à coefficients rationnels, peut-elle se remplacer par un système de la forme

$$f^{(1)}(y, x) = y_1, \qquad f^{(2)}(y_1, x) = 0,$$

où $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont des expressions différentielles linéaires homogènes du premier ordre, à coefficients rationnels? L'auteur montre comment l'étude des points singuliers de l'équation donnée conduit, d'une manière entièrement explicite, aux conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles cette décomposition est possible. Il donne, sous ces conditions, les expressions de $f^{(1)}$ et de $f^{(2)}$, et étudie l'intégration de l'équation proposée.

Un paragraphe est consacré aux équations non homogènes; l'auteur y suppose que le second membre satisfait aux conditions introduites dans son Mémoire du Tome CVII du même journal.

Diverses parties du travail s'appliquent aux équations linéaires d'un ordre quelconque, et constituent une simplification des méthodes générales introduites par M. Thomé daus son Mémoire du Tome XCVI du même journal.

Schottky (*F.*), à Marburg. — Sur les oscillations des fonctions harmoniques de deux variables réelles, et des fonctions d'un argument complexe. (225-253).

Soient ξ, η les coordonnées rectangulaires d'un point P dans un plan; ce point étant dans un domaine G limité par $(\rho + 1)$ courbes régulières L_0, L_1, ..., L_ρ, dont la première contient les autres à son intérieur. L'auteur considère une fonction de la forme

$$U(\xi, \eta) = \varphi(\xi + i\eta) + \psi(\xi - i\eta),$$

où φ et ψ sont des fonctions uniformes et régulières de leurs arguments dans

le domaine G : cette forme comprend les fonctions harmoniques réelles, aussi bien que les fonctions d'une variable complexe. Soient $D_0, D_1, \ldots, D_\rho$ les oscillations maxima, en valeur absolue, de U sur chacune des courbes considérées, et soient U_0 et U_1 les valeurs de U en deux points P_0 et P_1, choisis dans le domaine. L'auteur cherche la *limite supérieure* de $|U_0 - U_1|$ pour toutes les fonctions U dont les oscillations D_i sur les courbes limites sont inférieures à des nombres donnés Δ_i, et montre que cette limite est de la forme $\sum_{\alpha=0}^{\rho} \omega_\alpha \Delta_\alpha$, où les ω_α sont des nombres compris entre zéro et 1, qui dépendent de la position des points P_0 et P_1 suivant une loi que l'auteur indique.

M. Schottky applique ce résultat au cas où G est un cercle ayant pour centre l'origine des coordonnées et retrouve ainsi un théorème de Neumann, complété par Schwarz.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur le développement en séries des intégrales d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de certains points singuliers (continuation du Mémoire du même Volume, p. 104-129). (254-266).

Cet article contient quelques remarques sur les résultats obtenus dans les Mémoires publiés par l'auteur sous le même titre dans les Tomes CXVI et CXVII du même journal. L'une de ces remarques a trait à la question, étudiée par Picard dans son *Traité d'Analyse*, des courbes intégrales d'un système $\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$ passant par l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment; les X_α sont des séries entières en $x_1 \ldots x_n$ s'annulant à l'origine. En égalant à t les rapports $\frac{dx_\alpha}{X_\alpha}$, l'auteur peut employer les développements en série trouvés dans ses précédents Mémoires, et montre que l'hypothèse qu'il y avait faite sur certaines quantités $a_1 \ldots a_m$, dont les parties réelles devaient être positives, peut se remplacer par l'hypothèse un peu plus générale que les points $a_1, \ldots, a_m$ doivent se trouver d'un même côté d'une droite passant par l'origine, dans le plan où l'on représente les valeurs complexes. En faisant alors décrire au point qui représente la variable t certaines spirales logarithmiques, on obtient effectivement des courbes intégrales satisfaisant à la question, sous des conditions précises données par M. Horn.

D'autres remarques se rapportent à la manière dont figurent les constantes arbitraires dans les développements en série trouvés par M. Horn.

Kowalewsky (*G.*), à Greifswald. — Sur un mode de représentation simultanée des intégrales définies. (267-272).

Soient $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux fonctions de la variable réelle t, continues dans l'intervalle (t_0, T). L'auteur démontre les formules simultanées

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt = (T - t_0)[\lambda_1 \varphi(t_1) + \lambda_2 \varphi(t_2)],$$

$$\int_{t_0}^{T} \psi(t)\,dt = (T - t_0)[\lambda_1 \psi(t_1) + \lambda_2 \psi(t_2)].$$

où t_1 et t_2 sont compris entre t_0 et T, et où λ_1 et λ_2 sont deux nombres positifs dont la somme est égale à 1.

Grünfeld (*E.*), à Nikolsburg. — Sur la nature des *n* équations différentielles adjointes, qui correspondent à une équation différentielle linéaire d'ordre *n*. (273-290).

Soient y la fonction définie par l'équation différentielle proposée, z celle qui satisfait à l'*adjointe de Lagrange* (ou $n^{\text{ième}}$ adjointe); les autres adjointes sont définies (J. Cels) par les relations

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = p_n z, \quad \frac{du^{(2)}}{dx} = p_{n-1} z - u^{(1)}, \quad \ldots, \quad \frac{du^{(n)}}{dx} p_1 z - u^{(n-1)}, \quad u^{(n)} = z.$$

Si toutes les intégrales y sont régulières dans le domaine d'un point singulier, il en est de même des intégrales de toutes les adjointes; et les racines des équations fondamentales déterminantes de la proposée et de sa $k^{\text{ième}}$ adjointe sont liées par la formule $r + s = k - 1$, où r et s sont respectivement racines des deux équations.

Si la proposée est à coefficients constants, toutes les adjointes sont identiques.

Jaerisch (*Paul*), à Hamburg. — Théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes sphériques transversales, et application à la réflexion et la réfraction de la lumière. (291-332).

Le but du Mémoire est indiqué par l'auteur en ces termes :

« A la limite de deux milieux élastiques, dans la réflexion et la réfraction de la lumière, doivent être remplies les trois conditions suivantes :

» 1° Égalité des composantes des déplacements ;

» 2° Égalité des composantes des pressions élastiques;

» 3° Conservation de la force vive des particules en mouvement, des deux côtés de la surface de séparation.

» Toutes ces conditions n'ont pu être satisfaites jusqu'ici en employant seulement des vibrations transversales.... Je montrerai dans ce qui suit que toutes les conditions énoncées peuvent cependant être réalisées par des vibrations transversales seules, si l'on introduit, au lieu des ondes planes introduites jusqu'ici dans les calculs, des ondes sphériques. On arrive ainsi aux formules de Fresnel pour les amplitudes des ondes réfléchies, aussi bien qu'aux formules de F. Neumann pour les amplitudes des ondes réfractées, et l'hypothèse de l'égalité de densité de l'éther, des deux côtés de la surface de séparation, apparaît comme conséquence des conditions énoncées. »

Le point de départ de l'auteur est une étude des équations de l'élasticité dans un milieu isotrope, en coordonnées polaires, qui le conduit à une intégrale nouvelle de ces équations.

L'hypothèse peu admissible, faite par l'auteur, que les ondes réfléchie et *réfractée* sont sphériques, comme l'onde incidente; ainsi que la nature des

formules employées pour représenter les vibrations transversales, enlèvent à l'analyse de l'auteur une partie de son intérêt.

Hensel (*Kurt*). — Sur les diviseurs fondamentaux des corps de fonctions algébriques. (333-345).

L'auteur généralise les résultats exposés par lui dans de précédents Mémoires. Il considère un domaine de rationalité, défini de la manière la plus générale, et dans ce domaine une équation rationnelle irréductible d'ordre n définissant un corps $\mathfrak{G}$ de fonctions algébriques. Kronecker a introduit les notions essentielles des *systèmes fondamentaux* et du *discriminant* du corps. M. Hensel y ajoute celle des *diviseurs élémentaires du discriminant* du corps, qui sont les quotients des plus grands communs diviseurs de l'ensemble des déterminants d'un même ordre formés avec le tableau des valeurs conjuguées des diverses quantités qui constituent un système fondamental quelconque. Ces diviseurs élémentaires sont des puissances de fonctions rationnelles dans le domaine, les exposants étant des fractions proprement dites.

L'auteur étudie ensuite la décomposition d'une grandeur P rationnelle, irréductible dans le domaine considéré, en facteurs appartenant au corps $\mathfrak{G}$, dans ses rapports avec le discriminant et ses diviseurs élémentaires, et définit certains systèmes de grandeurs du corps $\mathfrak{G}$, qu'il appelle *systèmes canoniques, modulo* P.

Hensel (*Kurt*). — Sur les diviseurs élémentaires de deux corps algébriques, dont l'un est contenu dans l'autre. (346-355).

Quand un corps $\mathfrak{G}$ est contenu dans un autre G, les diviseurs élémentaires de G sont contenus dans les diviseurs élémentaires correspondants de $\mathfrak{G}$. L'auteur étudie d'une manière très précise les relations entre les diviseurs élémentaires de G et de $\mathfrak{G}$, ainsi que leurs propriétés relativement à un facteur premier rationnel P du discriminant de G.

Tome 118.

Brodén (*T.*), à Lund. — Contribution à la théorie des fonctions continues d'une variable réelle. (1-60).

Le but de l'auteur est de construire, dans un intervalle fini, des fonctions continues $y = f(x)$ présentant, au point de vue de leurs dérivées, diverses particularités. La méthode employée consiste à partir d'un ligne brisée, que l'on remplace par une nouvelle, ayant les mêmes extrémités, ayant un plus grand nombre de côtés, et comprenant, parmi ses sommets, tous ceux de la première. On opère de même sur cette seconde ligne brisée et ainsi de suite.... Sous certaines conditions, énoncées par l'auteur, il existe une fonction continue dont la courbe représentative passe par les sommets de toutes les lignes brisées ainsi formées; et elle est unique, parce qu'on a ainsi les valeurs de la fonction pour une infinité de valeurs de x formant un ensemble *partout dense* et *dénombrable*.

M. Brodén se sert plus spécialement des modes de formation qu'il appelle *division par deux*, et *par trois*; ils consistent en ce que, dans le passage d'une ligne brisée à une autre, chaque côté de la première est remplacé par deux, ou par trois côtés de la seconde. Les fonctions obtenues ont, pour chaque valeur x de l'intervalle, grâce à certaines hypothèses auxiliaires, une dérivée $f'_{+}(x)$, correspondant aux accroissements positifs de x, et une dérivée $f'_{-}(x)$, correspondant aux accroissements négatifs; et ces deux dérivées ont des valeurs différentes pour une infinité partout dense et dénombrable de valeurs de x; leurs signes étant, suivant les cas, soit les mêmes, soit différents.

Pirondini (*Geminiano*), à Parme. — Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. (61-73).

Dans la théorie des lignes à double courbure on trouve souvent la démonstration de la propriété suivante : « Lorsqu'un cône et un cylindre se coupent suivant une hélice commune, le cône est de révolution et la section droite du cylindre est une spirale logarithmique. » L'auteur montre que ce théorème n'est pas exact; et qu'il y a une infinité d'autres hélices cylindriques coupant les génératrices d'un cône sous un angle constant. Ces hélices sont même en général les hélices d'un deuxième cône.

L'auteur, après avoir signalé divers cas particuliers de ces *hélices cylindro-coniques* générales, montre qu'il n'y a que les surfaces développables à cône directeur de révolution pour lesquelles toutes les trajectoires isogonales des génératrices soient des hélices cylindriques.

Kantor (*S.*). — Théorie des complexes linéaires de rayons dans l'espace à r dimensions. (74-122).

Soit R_i un espace linéaire quelconque à i dimensions. Dans un R_r il y a $\infty^{(i+1)(r-i)} R_i$, que l'on peut prendre comme éléments d'un espace à $(i+1)(r-i)$ dimensions. A une multiplicité à k dimensions M_k de ce nouvel espace correspond alors par définition un *complexe de* $\infty^k R_i$.

L'auteur donne d'abord divers théorèmes sur ces complexes généraux; puis se limite au cas où M_k est linéaire (*complexes linéaires*), et où $k=(i+1)(r-i)-1$ (*complexes complets*); ce qui le conduit à une nouvelle suite de nombreux (*cinquante*) énoncés, se rapportant aux intersections, aux systèmes de complexes, et aux corrélations donnant naissance à des complexes. La plupart se rapportent aux *complexes de rayons*, c'est-à-dire au cas où $i = r-1$.

Les derniers paragraphes contiennent quatorze méthodes de représentation de ces complexes linéaires de rayons par des multiplicités ponctuelles unicursales.

Weber (*E. von*), à Munich. — Fondements d'une théorie de l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes et un nombre quelconque de variables dépendantes. (123-157).

D'après les résultats de Hamburger, l'intégration d'un système de n équations aux dérivées partielles du premier ordre à n fonctions inconnues et deux

variables indépendantes se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires, lorsque certains systèmes d'équations aux différentielles totales ont un nombre suffisant d'intégrales indépendantes.

Le but de l'auteur est de généraliser ces résultats, en considérant un système de $n+p$ équations à n fonctions inconnues. Dans le paragraphe 1 de son Mémoire, il développe d'abord les conditions qui expriment que ce système est, au sens de Lie, un *système en involution*; et démontre, sous certaines conditions (non-évanouissement de certains déterminants), l'existence d'une solution dépendant de $n-p$ fonctions arbitraires d'un seul argument. Après avoir, dans le paragraphe 2, démontré un théorème auxiliaire sur les déterminants, l'auteur déduit des équations données, dans le paragraphe 3, $n-p$ systèmes différents d'équations linéaires aux différentielles totales ; et montre comment leurs intégrales peuvent servir à simplifier et, dans certains cas, à obtenir entièrement l'intégration du système proposé. Dans le paragraphe 4, M. von Weber introduit les relations qui se déduisent du système en involution donné par des différentiations répétées : ce qui lui permet de montrer que les systèmes de Pfaff considérés au paragraphe précédent ne sont que le premier terme, et le plus simple, d'une suite infinie de systèmes de la même nature, jouant un rôle tout semblable dans l'intégration du système donné. Ces recherches forment ainsi une généralisation des méthodes d'intégration connues de Darboux et König.

Le dernier paragraphe du Mémoire contient des recherches sur les systèmes en involution linéaires par rapport aux dérivées des fonctions inconnues; et aussi la démonstration de ce fait, que tout système différentiel d'ordre supérieur, à deux variables indépendantes, dont l'intégrale générale dépend d'un nombre fini de fonctions arbitraires d'un seul argument, peut toujours se ramener à un système en involution d'équations du premier ordre.

Guldberg (*Alf.*), à Christiania. — Sur l'intégration des équations différentielles ordinaires. (158-162).

Soit $F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ une équation différentielle ordinaire d'ordre m; on peut la remplacer par une équation aux différentielles totales

$$\Pi = P_1 dy^{(m-1)} + dy^{(m-2)} + \dots + P_{m-1} dy + P_m dx = 0.$$

Si celle-ci est *complètement intégrable,* sa solution générale s'obtient par l'intégration d'équations différentielles du premier ordre, et donne une intégrale première générale de la proposée, dont l'ordre se trouve ainsi abaissé.

Dans le cas contraire, on substitue à $\Pi = 0$ la combinaison

$$\Pi + \alpha_1 (dy - y' dx) + \alpha_2 (dy' - y'' dx) + \dots + \alpha_{m-1} (dy^{(m-2)} - y^{(m-1)} dx) = 0,$$

et l'on cherche à déterminer les *multiplicateurs* α_k de manière que cette nouvelle équation soit complètement intégrable. Il suffit d'obtenir une *solution particulière* ou même *singulière* du système différentiel qui définit les multiplicateurs α_k.

L'auteur expose d'abord cette méthode d'intégration, avec détails, dans le cas $m = 2$.

Landsberg (*Georg*), à Heidelberg. — Sur les rapports de la

théorie de la courbure des courbes avec la mécanique des systèmes solides dans l'espace à n dimensions. (163-172).

Généralisation des résultats connus sur le déplacement du trièdre de Serret relatif à une courbe gauche. Le déplacement élémentaire analogue du système de n axes rectangulaires associé à une courbe de l'espace à n dimensions se décompose en une translation et $n-1$ rotations élémentaires, qui correspondent aux $n-1$ courbures de la courbe considérée. La généralisation des formules de Frenet et Serret en résulte.

Hensel (*Kurt*). — Sur les diviseurs fondamentaux d'un corps algébrique relativement à deux domaines de rationalité différents. (173-185).

Soit Γ un domaine de rationalité et G un corps algébrique (*Gattungsbereich*) d'ordre n dans ce domaine. Dans une série de Mémoires, parus dans le même journal, l'auteur a défini les *diviseurs élémentaires* de G, ses *diviseurs élémentaires relativement à un facteur premier* P, et certaines *séquences* de nombre rationnels correspondantes aux diviseurs élémentaires pris relativement à P.

L'auteur suppose maintenant qu'on adjoint à Γ une grandeur algébrique nouvelle, ce qui donne un nouveau domaine de rationalité $\overline{\Gamma}$, dans lequel le corps algébrique G peut se décomposer en des corps algébriques $(G, \overline{\Gamma})$ d'ordre moindre. Il donne une série d'énoncés précis indiquant les relations entre les diviseurs élémentaires et les séquences de G et de $(G, \overline{\Gamma})$. Citons, entre autres, le suivant :

« Soient $(P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n})$ les n diviseurs élémentaires de G, relativement à P; soit de plus $\overline{P}$ un diviseur premier de P dans Γ, et $\overline{P}^d$ la puissance de $\overline{P}$ contenue dans P; soient enfin $(\overline{P}^{\rho_1}, \ldots, \overline{P}^{\rho_\nu})$ les diviseurs élémentaires de $(G, \overline{\Gamma})$, relativement à $\overline{P}$. On a généralement

$$\rho_i = R(dr_{h_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $r_{h_1}, \ldots, r_{h_\nu}$ sont certains des exposants $(r_1, \ldots, r_n)$, et où les $R(dr_{h_i})$ désignent les plus petits restes non négatifs des fractions dr_{h_i}. »

Kneser (*Adolf*), à Dorpat. — Études sur la nature des mouvements dans le voisinage des positions d'équilibre instable (avec une planche). Deuxième Mémoire. (186-223).

L'auteur étudie, comme dans son précédent Mémoire, le mouvement d'un point dans un plan sous l'action de forces dont le potentiel est de la forme

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 - by^2) + \ldots \qquad (a > 0, b > 0),$$

où le second membre est une série entière dont les termes de degré moindre sont seuls écrits. L'auteur a prouvé précédemment l'existence de mouvement

dans lequel le point se rapproche asymptotiquement de l'origine. Il montre que le système des trajectoires peut se caractériser géométriquement d'une manière très précise ; et qu'en particulier il couvre entièrement et une seule fois un certain domaine entourant l'origine (position d'équilibre instable).

Par l'emploi du principe de moindre action (méthode de Jacobi) le cas général d'un mouvement à deux degrés de liberté se ramène au problème traité. Le même principe de transformation fournit à l'auteur un moyen de montrer par des considérations géométriques que tous les mouvements asymptotiques considérés, sous l'hypothèse que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ n'est pas un nombre entier, peuvent se représenter par les formules suivantes, dues à Poincaré,

$$2\sqrt{a}\,x = -\alpha e^{-t\sqrt{a}} + \mathfrak{P}_1(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}),$$
$$2\sqrt{b}\,y = -\beta e^{-t\sqrt{b}} + \mathfrak{P}_2(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}).$$

Jahnke (*E.*). — Sur une relation entre les éléments des systèmes orthogonaux de neuf et de seize quantités. (224-233).

Par *éléments* d'un système orthogonal formé avec les neuf quantités a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$, on entend (Caspary) ces neuf quantités et les six expressions différentielles

$$p_h = -\sum_i a_{ik}\,da_{il}, \qquad q_h = \sum_i a_{ki}\,da_{li} \qquad (h, k, l = 1, 2, 3).$$

Par *éléments* d'un système orthogonal de seize quantités g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, l'auteur désigne ces quantités et les douze expressions différentielles définies par les formules

$$g p_{rs} = -\sum_i g_{ih}\,dg_{ik}, \qquad g q_{rs} = \sum_i g_{hi}\,dg_{ki}, \qquad g = \sum_i g_{ih}^2 = \sum_i g_{hi}^2$$
$$(h, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les éléments du premier système s'expriment sous forme homogène, par des formules bien connues, au moyen de quatre paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, et ceux d'un système analogue b_{ik} s'exprimeraient de même au moyen de quatre autres paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Or, Caspary a montré que les g_{ik} s'exprimaient eux-mêmes d'une manière symétrique, au moyen de deux couples de quatre paramètres chacun, pour lesquels on peut prendre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. De là, la relation étudiée par l'auteur entre le système (g_{ik}) et les deux systèmes (a_{ik}) et (b_{ik}). Certaines des identités trouvées ont une forme qui se présente dans tous les problèmes de Mécanique où intervient une rotation, ce qui prouve l'utilité de cette étude.

Hensel (*Kurt*). — Sur la réduction des systèmes de diviseurs à une forme réduite. (234-250).

Deux *systèmes de modules* (Kronecker) sont *équivalents* lorsque chacune des fonctions $(F_1, F_2, \ldots, F_\mu)$, qui constituent le premier, est une combi-

naison $u_1 G_1 + \ldots + u_\rho G_\rho$ des fonctions $(G_1, \ldots, G_\rho)$, qui constituent le second, les coefficients $u_1, \ldots, u_\rho$ étant des fonctions entières dans le domaine de rationalité considéré, et quand, de plus, les fonctions $(G_1, \ldots, G_\rho)$ sont aussi de la forme analogue $v_1 F_1 + \ldots + v_\mu F_\mu$.

M. Hensel résout le problème qui consiste à trouver, pour un système $(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)$, un système équivalent, qui en soit une *forme canonique*, définie sans ambiguïté. Sa méthode est fondée sur ce théorème préliminaire que tout système de modules $(F_1, \ldots, F_\mu)$ est équivalent à un produit de *systèmes simples* $(p^a, F_1, \ldots, F_\mu, P^b)$, qui résultent du premier par l'adjonction d'une puissance d'un nombre premier p, et d'une puissance d'une fonction P, irréductible *modulo p*.

En vertu de ce théorème, on peut se limiter à un système simple de cette dernière forme. La forme réduite à laquelle arrive l'auteur est $(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu)$, les modules de ce nouveau système étant caractérisés par des relations de la forme

$$p^{e_k}\Phi_{k-1} = b_{k,k}\Phi_k + b_{k,k+1}\Phi_{k+1} + \ldots + b_{k,\nu}\Phi_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où les $b_{i,k}$ sont des fonctions entières et où le degré de chaque produit $b_{i,k}\Phi_k$ (pour $k > i$) est inférieur au degré de Φ_{k-1}; les coefficients $b_{i,k}$ sont, de plus, réduits *modulo* p^{e_i}.

Dans cette étude, les fonctions entières considérées ne dépendent que d'une seule variable.

Vahlen (*K.-Th.*), à Königsberg. — Sur quelques applications du principe de correspondance. (251-256).

Le principe de correspondance employé a été énoncé par l'auteur dans un précédent travail (même journal, t. 113, p. 348-352). Les applications se rapportent au nombre de normales communes à deux courbes planes ou à deux surfaces algébriques, et à des questions analogues de géométrie énumérative. L'auteur montre qu'on peut étendre les applications à la géométrie à n dimensions, pour des multiplicités à $n-1$ dimensions.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur la nature des intégrales des équations différentielles, dans le voisinage d'un point d'indétermination. (257-274).

L'auteur se propose de retrouver les résultats de Poincaré sur la représentation asymptotique des intégrales des équations linéaires et de les compléter, sans se servir de la transformation de Laplace, et en ne faisant, sur les coefficients, que l'hypothèse qu'ils ont le caractère de fonctions rationnelles dans le domaine du point d'indétermination considéré. Dans cette première partie de son travail, l'auteur se borne à l'équation de Riccati et à l'équation linéaire du second ordre, qu'il ramène à la précédente par la transformation

$$y = x^{-k}\frac{d\log w}{dx},$$

$(k+1)$ étant le *rang* de l'équation linéaire considérée (au sens de Poincaré). Le point d'indétermination considéré est $x = \infty$.

Nous nous bornons à énoncer le résultat pour l'équation linéaire du second ordre, que l'auteur écrit

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + x^k\left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots\right)\frac{dw}{dx} + x^{2k}\left(q_0 + \frac{q_1}{x} + \dots\right)w = 0.$$

Soient K'_0 et K''_0 les racines de l'équation

$$K_0^2 + p_0 K_0 + q_0 = 0,$$

et supposons que la partie réelle de $K'_0 - K''_0$ soit positive. Alors, pour des valeurs réelles positives infinies de x, *il existe* un système fondamental d'intégrales w', w'', représentées asymptotiquement par des développements

$$w' \sim e^{K'_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + \dots + K'_k x}\, x^{K'_{k+1}} \left(L'_0 + \frac{L'_1}{x} + \dots\right) = \Psi',$$

$$w'' \sim e^{K''_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + \dots + K''_k x}\, x^{K''_{k+1}} \left(L''_0 + \frac{L''_1}{x} + \dots\right) = \Psi''.$$

L'auteur montre de plus qu'il existe $2k + 2$ angles ω_n, tels que

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{k+1},$$

et tels que chaque intégrale w est représentée asymptotiquement par $C\Psi'$ ou $C\Psi''$ ($C = \text{const.}$), suivant que l'argument de x tend vers une valeur comprise entre ω_{2n} et ω_{2n+1}, ou entre ω_{2n-1} et ω_{2n}, tandis que l'autre série (Ψ'' ou Ψ') représente en même temps, asymptotiquement, une seule intégrale de l'équation.

Dans l'hypothèse $K'_0 = K''_0$, les intégrales auront, *en général,* pour représentation asymptotique, des séries *anormales,* où figureront les diverses puissances négatives entières de $x^{\frac{1}{2}}$.

Königsberger (Leo), à Heidelberg. — Sur les principes de la Mécanique. (275-350).

Les équations de la Dynamique classique, pour le mouvement d'un système de points (x, y, z), se mettent, au moyen du principe de d'Alembert, sous la forme

$$\sum \left[\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right) - Q\right]\delta x + \sum \left[\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) - R\right]\delta y + \sum \left[\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) - S\right]\delta z = 0,$$

les déplacements virtuels $(\delta x, \delta y, \delta z)$ pouvant être liés par des relations de condition, linéaires et homogènes par rapport à ces déplacements, et dont les coefficients peuvent dépendre des coordonnées et du temps. La fonction H est donnée par la formule

$$H = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U,$$

et U ne dépend que des coordonnées (x, y, z) et du temps t.

Le développement de la Physique mathématique (loi de Weber, etc.) a conduit C. Neumann à introduire pour U une fonction dépendant des dérivées premières des coordonnées; et, plus généralement, Helmholtz a considéré H comme une fonction des coordonnées et de leurs dérivées premières, dans laquelle la séparation de l'énergie actuelle — T et de l'énergie potentielle — U n'est plus nécessairement en évidence. C'est cette idée d'Helmholtz que l'auteur généralise dans son Mémoire, à un point de vue purement mathématique, en considérant H comme une fonction donnée de t, des coordonnées (x, y, z) des divers points du système, et de leurs dérivées jusqu'à un ordre ν quelconque. Les liaisons entre les déplacements virtuels sont toujours de la nature indiquée plus haut. Le point de départ de l'auteur est alors le *principe de d'Alembert généralisé*, c'est-à-dire l'équation

$$\sum\left[\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial x''}\right)-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x^{(\nu)}}\right)-Q\right]\delta x$$
$$+\sum\left[\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial y''}\right)-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y^{(\nu)}}\right)-R\right]\delta y$$
$$+\sum\left[\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial z''}\right)-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial z^{(\nu)}}\right)-S\right]\delta z=0.$$

La méthode des multiplicateurs donne la première forme des *équations de Lagrange* qui, sous l'hypothèse que les équations de condition entre les déplacements virtuels sont intégrables, s'écrivent, en introduisant les paramètres indépendants $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$,

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)-\ldots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+P_s=0$$
$$(s=1, 2, \ldots, \mu).$$

On en conclut ensuite le *principe d'Hamilton* généralisé

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum_s p_s P_s\right)dt=0,$$

équivalent aux équations précédentes. L'auteur montre aussi comment son hypothèse conduit à la généralisation du *principe de la force vive*, du *principe de moindre contrainte* et du *principe de la moindre action*, et discute l'équivalence de ces deux derniers avec les équations de Lagrange généralisées. Il étudie également la généralisation du *théorème des aires* et du *théorème sur le mouvement du centre de gravité*.

Dans le dernier paragraphe, M. Königsberger s'occupe, toujours au point de vue mathématique, de la généralisation de la théorie des *mouvements cachés*, de Helmholtz et de Hertz. Il s'agit de chercher tous les cas dans lesquels la nature d'une partie des équations du mouvement d'un système, dans lesquelles les forces extérieures sont nulles, permet l'élimination d'un certain nombre de coordonnées et de leurs dérivées, sans qu'on connaisse d'intégrales particulières. La question est traitée, pour simplifier l'exposition, en supposant que H ne dépend que des coordonnées et de leurs dérivées premières.

Hamburger (M.). — Nouvelle démonstration de l'existence d'une

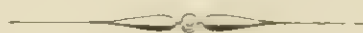
intégrale pour une équation différentielle linéaire homogène (d'après une Communication de Paul Günther). (351-353).

C'est une modification de la démonstration de Fuchs (*Journal für Mathematik*, t. 66, p. 121 et suivantes). Les fonctions majorantes $\frac{M_\lambda}{1-\frac{x-x_0}{r}}$ sont remplacées par les fonctions $\frac{M_\lambda}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^\lambda}$, ce qui conduit à une équation de comparaison dont on a immédiatement l'intégrale générale.

Fuchs (*L.*). — Remarque sur la Communication précédente de M. Hamburger. (354-355).

Réclamation de priorité au sujet du théorème en question, à l'occasion d'un Article d'une Revue américaine.

E. V.



COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXXXVI; 1903 [1].

Korn (*A.*). — Sur les fonctions universelles dans l'espace. (30-33).

A 5620 5630

Ocagne (*M. d'*). — Sur une classification nouvelle des modes de représentation nomographique des équations à un nombre quelconque de variables. (33-35).

A 0390

Frémont (*Ch.*). — Nouvelle méthode d'essai des rails. (35-37).

B 3260

Mayor (*B.*). — Sur une représentation plane de l'espace et son application à la Statique graphique. (37-39).

A 8020 B 1250

---

[1] Cf. *Bulletin*, t. XXVII$_2$, p. 42.

2me Partie.

Suchar (*P.*). — Sur une transformation réciproque en Mécanique. (78-79).

B 1600

Riquier (*C.*). — Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données. (80-81).

A 4810

Levi-Civita (*T.*). — Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps. (82-84).

A 4820 4830 B 1610

Mayor (*B.*). — Sur la Statique graphique dans l'espace. (85-87).

A 8020 B 1250

Duhem (*P.*). — Sur quelques formules de Cinématique utiles dans la théorie générale de l'Électricité. (139-141).

B 0440

Liouville (*R.*). — Sur la réductibilité des équations différentielles. (146-148).

A 4880

Korn (*A.*). — Sur les fonctions universelles du plan et des surfaces de Riemann. (148-151).

A 5620 5630 3620

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces qui se conservent avec parallélisme des plans tangents et conservation des aires. (151-153).

A 8450

Appell (*P.*). — Sur quelques fonctions et vecteurs de point dans le mouvement d'un fluide. (187-189).

B 2430

Painlevé (*P.*). — Sur la réductibilité des équations différentielles. (189-193).

A 4880

Riquier (*C.*). — Sur les systèmes différentiels réguliers. (219-220).

A 4810

Levi-Civita (*T.*). — Condition du choc dans le problème restreint des trois corps. (221-223).

A 4820 4830 B 1610

Normand (*J.-A.*). — Expressions algébriques approximatives des transcendantes logarithmiques et exponentielles (277-281).

A 4030

Duhem (*P.*). — Sur la viscosité en un milieu vitreux. (282-283).

B 3650

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes de substitutions. (294-295).

A 1210

André (*D.*). — Sur les couples actifs des permutations. (295-297).

A 1620

Borel (*E.*). — Sur l'approximation les uns par les autres des nombres formant un ensemble dénombrable. (297-299).

A 0430 2440

Hadamard (*J.*). — Sur les glissements dans les fluides. (299-301).

B 2460

Duhem (*P.*). — Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux. (343-345).

B 3650

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions entières d'ordre infini et les équations différentielles. (348-351).

A 3610 4850 4880

Hadamard (*J.*). — Sur les opérations fonctionnelles. (351-353).

A 6030 3280

Kœnigs (*G.*). — Sur le théorème analogue à celui de Bobillier, dans le cas du roulement d'une surface sur une surface applicable. (354-355).

A 8420

Normand (*J.-A.*). — Expressions algébriques approximatives des transcendantes logarithmiques et exponentielles. (436-439).

A 4030

Guichard (*C.*). — Sur une classe particulière de systèmes triples orthogonaux. (490-492).

A 8860

Jacob (*L.*). — Sur la résistance des gaz parfaits au mouvement des solides. (492-493).

B 2860

Rîbourt (*L.*). — Hydro-tachymètre pour régulateur de turbines hydrauliques. (493-498).

B 2820

Guillaume (*C.*). — Variations du module d'élasticité des aciers au nickel. (498-500).

B 3290

Mittag-Leffler (*G.*). — Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. (537-539).

A 3620 4430

Freycinet (*C. de*). — De l'expérience en Géométrie. (540-541).

A 0000

Hadamard (*J.*). — Sur les glissements dans les fluides. (Rectification à une Note précédente.) (545).

B 2460

Duhem (*P.*). — Sur les mouvements des milieux vitreux affectés de viscosité. (592-595).

B 3650

Guichard (*C.*). — Sur une transformation d'une classe particulière de système triple-orthogonaux. (597-600).

A 8860

Tannenberg (*W. de*). — Sur la déformation des surfaces. (600-602).

A 8850

Autonne (*L.*). — Sur l'hyperhermitien. (602-604).

A 0850 2030

Lebesgue (*H.*). — Sur l'existence des dérivées. (659-661).

A 3210

Boulanger (*A.*). — Sur les géodésiques des variétés à trois dimensions. (661-664).

A 4830 5230

Brillouin (*M.*). — Propagation dans les milieux conducteurs. (667-669).

A 5640 5650 C 6600

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. (717-723).

A 4070 2830 8030

Duhem (*P.*). — Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité et très peu déformé. (733-735).

B 2490

Brillouin (*M.*). — Propagation dans les milieux conducteurs. (746-749).

A 5640 5650 C 6600

Troncet. — Sur un calculateur mécanique appelé *arithmographe*. (807-809).

A 0090

Duhem (*P.*). — Des ondes du premier ordre par rapport à la

vitesse au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité et affecté de mouvements finis. (858-860).

B 2490 2460

Stekloff (*W.*). — Sur une propriété remarquable de plusieurs développements souvent employés dans l'Analyse. (876-878).

A 3260 5620

Guichard (*C.*). — Sur une nouvelle transformation des surfaces à courbure totale constante. (879-880).

A 8830 4840

Laisant. — Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales. (880-881).

B 0410 1610

Picard (*E.*). — Sur certaines surfaces algébriques pour lesquelles les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques. (913-918).

A 8060 3640

Vallier (*E.*). — Sur la discussion et l'intégration des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. (919-921).

A 4820

Vallier (*E.*). — Sur l'intégration des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. (937-944).

A 4820

Tzitzeica (*G.*). — Sur la nouvelle transformation des surfaces à courbure totale constante de M. Guichard. (952-953).

A 8830 4840

Reymoundos (*G.*). — Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières. (953-955).

A 3610 3620

Drach (*J.*). — Sur certaines déformations remarquables. (996-998).

A 8850

Duhem (*P.*). — Des ondes du second ordre par rapport à la vitesse au sein des milieux vitreux, doués de viscosité et affectés de mouvements finis. (1032-1034).

B 2490 2460

Pellet (*A.*). — Sur la fonction Γ et ses analogues. (1052-1053).

A 4410

Borel (*E.*). — Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels. (1054-1056).

A 0420 0430

Kœnigs (*G.*). — Sur le mouvement relatif de la pièce et de l'outil dans la taille des profils des mécanismes. (1056-1058).

B 0430

Chessin (*A.*). — Sur une classe d'équations différentielles réductibles à l'équation de Bessel. (1124-1126).

A 4420

Mesuret. — Sur les systèmes linéaires de cercles. (1126-1128).

A 8090

Maillet (*E.*). — Sur les zéros des fonctions monodromes ou à n branches. (1128-1129).

A 3610 3620

Guyou (*E.*). — Mesure des vitesses des navires à la mer. (1170-1172).

B 0160 0060

Autonne (*L.*). — Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversions. (1185-1186).

A 2030 8100

Stekloff (*W.*). — Sur le développement d'une fonction donnée

en série, procédant suivant les polynomes de Jacobi. (1230-1232).

A 3220 5620

Montel (*P.*). — Sur l'intégrabilité d'une expression différentielle. (1233-1235).

A 3250

Pellet (*A.*). — Sur un théorème de Lejeune-Dirichlet. (1235-1236).

A 3630

Raffy (*L.*). — Sur les réseaux doublement cylindrés. (1236-1238).

A 8810

Servant (*M.*). — Sur la déformation des surfaces. (1239-1241).

A 8850

Picard (*E.*). — Sur certaines singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique. (1293-1296).

A 4840

Mesuret. — Sur les propriétés infinitésimales des systèmes linéaires de cercles. (1302-1303).

A 8090 8490

Beaulard. — Sur l'anisotropie de la soie et la valeur du coefficient de Poisson. (1303-1305).

B 3290 3650

Duhem (*P.*). — Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies. (1379-1381).

B 3220

Goursat (*E.*). — Sur les intégrales de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

(1383-1384).

A 4840

Boulanger (*A.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe continu de transformations. (1384-1386).

A 4880 1230

Jacob (*L.*). — Mouvement d'un solide dans un milieu gazeux. (1386-1388).

B 2860

Desaint (*L.*). — Sur le problème de la transformation dans les séries de Taylor. (1423-1425).

A 3610

Le Roux (*J.*). — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles. (1426-1427).

A 4830

Boussinesq (*J.*). — Sur le débit, en temps de sécheresse, d'une source alimentée par une nappe d'eau d'infiltration. (1511-1517).

B 2810 C 2050

Duhem (*P.*). — La propagation des ondes dans les milieux élastiques selon qu'ils conduisent ou ne conduisent pas la chaleur. (1537-1540).

B 3220 C 2000 9100

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces qui peuvent, dans plusieurs mouvements, engendrer une famille de Lamé. (1541-1544).

A 8420 7650

Quiquet (*A.*). — Sur l'emploi simultané de lois de survie. (1544-1545).

A 1630

Young (*W.-H.*). — Sur l'intégration des séries. (1632-1633).

A 3220 3260

Chaumat (*H.*). — Sur les lois expérimentales du frottement de glissement. (1634-1637).

B 3640

Tome CXXXVII.

Boussinesq (*J.*). — Sur un mode simple d'écoulement des nappes d'eau d'infiltration à lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, lorsqu'une partie de ce rebord est enlevée depuis la surface jusqu'au fond. (5-11).

B 2810 C 2050

Laussedat. — Sur un moyen rapide d'obtenir le plan d'un terrain en pays de plaine, d'après une vue photographique prise en ballon. (24-30).

A 6840

Eiffel. — Expériences sur la résistance de l'air. (30-32).

B 2840

Blutel (*E.*). — Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. (33-37).

A 8810 8830

Seguier (*de*). — Sur les groupes de Mathieu. (37-39).

A 1210

Zaremba (*S.*). — Sur les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. (39-40).

A 5650 5660

Ariès. — Sur la diminution du potentiel pour tout changement spontané dans un milieu de température et de pression constantes. (46-47).

C 2460 D 7200

Boussinesq (*J.*). — Sur la stabilité d'un certain mode d'écoulement d'une nappe d'eau d'infiltration. (101-106).

B 2810 C 2050

Servant (*M.*). — Sur l'habillage des surfaces. (112-115).

A 8830

Boussinesq (*J.*). — Extension à des cas où le fond est courbe du mode d'écoulement qui se conserve dans une nappe d'eau d'infiltration reposant sur un fond plat. (153-158).

B 2810 2020

Fraichet (*L.*). — Étude sur les déformations moléculaires d'un barreau d'acier soumis à la traction. (169-170).

B 3610

Charbonnier. — Sur la théorie du champ acoustique. (171-172).

B 2860 C 9200

Duhem (*P.*). — Sur les ondes cloisons. (237-240).

B 2490

Andrade. — Sur les conditions de la synchronisation. (243-246).

B 0150

Ariès. — Sur les lois et les équations de l'équilibre chimique. (253-255).

C 2460 D 7200

Esclangon. — Sur les fonctions quasi-périodiques. (305-307).

A 3220 5610

Dulac (*H.*). — Sur les fonctions de *n* variables représentées par des séries de polynomes homogènes. (308-309).

A 3630

Saltykow (*N.*). — Sur les intégrales de S. Lie. (309-312).

A 4830

Sebert. — Sur l'aérodynamique et la théorie du champ acoustique. (357-362).

B 2860 C 9200

Saltykow (*N.*). — Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange. (376-378).

A 4830

Charbonnier (*P.*). — La théorie du champ acoustique et le frottement intérieur des gaz. (378-380).

B 2860 C 9200 9240

Violle (*J.*). — Sur le phénomène aérodynamique produit par le tir des canons grêlifuges. (397-398).

B 2860 2450

Saltykow (*N.*). — Sur le rapport des travaux de S. Lie et de Liouville. (403-405).

A 4830

Maillet (*E.*). — Les fonctions entières d'ordre zéro. (405-408).

A 3610

Störmer (*C.*). — Sur les intégrales de Fourier-Cauchy. (408-411).

A 3270 3610

Saltykow (*N.*). — Sur le problème de S. Lie. (433-435).

A 4830

Störmer (*C.*). — Sur les intégrales de Fourier-Cauchy. (436-438).

A 3270 3610

Guldberg (*A.*). — Sur les équations aux différences qui possèdent un système fondamental d'intégrales. (466-467).

A 6020 1240

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions monodromes et les équations différentielles. (478-480).

A 3610 4820

Chessin (*A.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (511-512).

A 4850

Picard (*E.*). — Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales. (541-547).

A 3640 8060

Mittag-Leffler. — Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. (554-558).

A 3610

Guldberg (*A.*). — Sur les équations linéaires aux différences finies. (560-562).

A 6020 4850

Picard (*E.*). — Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. (594-600).

A 3640 8060

Guldberg. — Sur les équations linéaires aux différences finies. (614-615).

A 6020 2410

Guldberg (*A.*). — Sur les groupes de transformations des équations aux différences finies. (639-641).

A 6020 1230 2450

Rabut. — Sur la résolution pratique des équations. (641-644).

A 2440

Ringelmann. — Détermination expérimentale de la pression momentanée résultant du choc. (644-645).

B 3260

Appell (*P.*). — Note accompagnant la présentation du Tome II de la seconde édition de son *Traité de Mécanique rationnelle*. (682-684).

B 0030

Tannenberg (*W. de*). — Sur les courbes gauches à torsion constante. (692-695).

A 8440

Borel (*E.*). — Sur la détermination des classes singulières de Taylor. (695-697).

A 3610

Lindelöf (*E.*). — Sur quelques points de la théorie des ensembles. (697-700).

A 0430

Ditisheim (*P.*). — Sur la relation entre la pression et la marche des chronomètres. (700-703).

B 0150

Guillaume (*Ch.-E.*). — Remarques sur la Note de M. P. Ditisheim, relative à l'action de la pression atmosphérique sur la marche des chronomètres. (703-705).

B 0150

Rabut. — Sur la détermination des figures invariantes des transformations cycliques. (732-734).

A 5230

Pincherle (*S.*). — Sur l'approximation des fonctions par les irrationnelles quadratiques. (734-736).

A 3220

Saint-Germain (*A. de*). — Généralisation des propriétés fondamentales du potentiel. (736-738).

B 1220

Ariès (*E.*). — Sur les lois du développement de l'équilibre chimique. (738-741).

C 2460 D 7200

Bernstein (*S.*). — Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (778-781).

A 4840

Fejer (*L.*). — Sur les équations fonctionnelles et la théorie des séries divergentes. (839-841).

A 6030 3220

Pompeiu (*D.*). — Sur un système de trois fonctions de variables réelles. (842-843).

A 3600

Renard (*C.*). — Sur la possibilité de soutenir en l'air un appareil volant du genre hélicoptère en employant les moteurs à explosion dans leur état actuel de légèreté. (843-846).

B 2860

Tannenburg (*W. de*). — Du problème de Cauchy relatif à une classe particulière de surfaces. (900-903).

A 8830

Borel (*E.*). — Sur la représentation effective de certaines fonctions discontinues comme limites de fonctions continues. (903-905).

A 3220 0430

Lattès (*S.*). — Sur une classe d'équations fonctionnelles. (905-909).

A 6030 4820 5230

Mesnager (*A.*). — Sur les articulations à lame flexible. (908-909).

B 3280

Borel (*E.*). — Un théorème sur les ensembles mesurables. (966-967).

A 0430 3200

Auric (*A.*). — Généralisation d'un théorème de Laguerre. (967-969).

A 2440

Renard (*C.*). — Sur la qualité des hélices sustentatrices. (970-972).

B 2860

Hadamard (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. (1028-1030).

A 4840

Goursat (*E.*). — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques. (1030-1033).

A 3220 4850

Wallenberg (*G.*). — Sur l'équation différentielle de Riccati du second ordre. (1033-1035).

A 4820

Normand (*J.-A.*). — De l'influence de la surimmersion sur la vitesse. (1222-1226).

B 2850

Lebesgue (*H.*). — Sur une propriété des fonctions. (1228-1230).

A 3210 0430

Le Roux. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (1230-1232).

A 4840

Wiernsberger (*P.*). — Convergence des radicaux superposés périodiques. (1233-1234).

A 3220

Ariès (*L.*). — Sur l'extension de la formule de Clapeyron à tous les états indifférents. (1239-1242).

C 2460 D 7200

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, gegründet von A.-L. Crelle, 1826, herausgegeben von *L. Fuchs*. Berlin, imprimerie de Georg Reimer.

Tome 119; 1898.

Fuchs (*Richard*). — Sur les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques, considérés comme fonctions d'un des points de ramification. (1-24).

Les périodes

$$y_i = \int_x^{a_i} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)(z-x)}} \qquad \left[\psi(z) = \prod_{i=1}^{2p}(z-a_i)\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire homogène d'ordre $n = 2p$ (L. Fuchs). L'auteur étudie les *associées* de cette équation : on sait que la $(n-k)^{\text{ième}}$ *associée* est l'équation linéaire qui admet pour intégrales le déterminant $\sum \pm (y_1, y'_2, \ldots, y_k^{(k-1)})$ et ceux qu'on en déduit en y remplaçant $y_1, y_2, \ldots, y_k$ par k autres intégrales quelconques de la proposée. L'auteur montre d'abord que *la* $(2p-2)^{\text{ième}}$ *associée a une intégrale rationnelle,* dont la valeur est $\frac{1}{\psi(x)}$. Ce théorème généralise un résultat obtenu par L. Fuchs pour $p = 2$; il fournit les *relations de Weierstrass* entre les périodes des intégrales de première et de deuxième espèce.

M. Richard Fuchs montre ensuite que, pour une équation linéaire quelconque d'ordre n, a lieu le théorème suivant :

Si la $(n-k)^{\text{ième}}$ *associée a une intégrale rationnelle, la* $(n-k-q)^{\text{ième}}$ *associée admet, pour chaque valeur de q, l'une au moins des intégrales d'une équation appartenant à la même espèce que la* $(n-q)^{\text{ième}}$ *associée.*

L'auteur applique ce résultat à l'équation particulière précédemment considérée et montre que, *dans ce cas, toute associée d'ordre pair possède une intégrale rationnelle,* de forme très simple.

Königsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Sur les principes de la Mécanique. (Continuation du Mémoire commencé Tome 118, page 275.) (25-49).

Un premier paragraphe contient l'étude détaillée d'un cas particulier, au point de vue de la *théorie des mouvements cachés et des problèmes incomplets,* qui a été discutée d'une manière générale dans la première partie du

2me Partie -

Mémoire. L'auteur considère trois points matériels et montre, en particulier, que, s'ils sont liés par certaines conditions, deux d'entre eux paraîtront se mouvoir suivant la *loi de Newton*, tandis que le troisième obéira à la *loi de Weber*.

Les derniers paragraphes sont consacrés à la *généralisation des équations canoniques d'Hamilton*. La *fonction caractéristique* est

$$\Phi = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{H} + \Sigma \mathrm{P}_\lambda p_\lambda)\, dt;$$

l'auteur donne d'abord l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle elle satisfait. Les équations canoniques, résultant des équations de Lagrange généralisées, sont obtenues ensuite sous la forme

$$\frac{dp_s^{(\nu-1)}}{dt} = -\frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p_{s,\nu}}, \qquad \frac{dp_s^{(\nu-2)}}{dt} = -\frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p_{s,\nu+1}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p_{s,2\nu-1}},$$

$$\frac{dp_{s,2\nu-1}}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_{s,2\nu-2}}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p'_s}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_{s,\nu}}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{E})}{\partial p_s^{(\nu-1)}},$$

où les nouvelles variables sont définies par les équations suivantes, qui permettront d'éliminer, dans l'expression primitive E de l'énergie, les dérivées d'ordre supérieur — [le résultat de cette élimination est désigné par (E)] — :

$$p_{s,\nu} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_s^{(\nu)}},$$

$$p_{s,\nu+1} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_s^{(\nu-1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_s^{(\nu)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{s,2\nu-1} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p''_s} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_s^{(\nu)}}.$$

De cette forme des équations canoniques résulte que le *théorème du dernier multiplicateur* et le *théorème de Poisson* subsistent encore.

Le Mémoire se termine par un théorème sur la nature des intégrales algébriques de ces équations d'Hamilton généralisées.

Igel (*B.*), à Vienne. — Sur la théorie de la division par deux pour les fonctions elliptiques. (50-64).

Ce travail a pour objet l'étude de la division par deux pour certaines transformées des fonctions elliptiques, trouvées par Hermite, en combinant deux transformations quadratiques, à savoir :

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{sn}\\ \mathrm{cn}\\ \mathrm{dn}\end{matrix}\right\}\left[(1+\sqrt{k})^2 ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right].$$

Il s'agit d'exprimer les quatre valeurs prises par ces transformées, quand on y remplace u par $\frac{u}{2}$, en fonction rationnelle de $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. L'une des quatre

valeurs a été donnée par Hermite; l'auteur trouve les autres en se servant de formules de transformation dues à Abel. Il rectifie d'abord la démonstration qui a été donnée, pour ces formules, par Enneper.

Mangoldt (von H.), à Aix-la-Chapelle. — Sur une application de la formule de Riemann pour le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. (65-71).

Démonstration du théorème suivant :

Le nombre des nombres premiers inférieurs à x est représenté asymptotiquement, pour de grandes valeurs de x, par la fonction

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon = +0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dy}{\log y} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dy}{\log y} \right\},$$

et cela de telle manière que, si l'on désigne ce nombre par $\mathrm{F}(x)$, *le quotient* $\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{Li}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ *tend vers zéro, pour x infini.*

Schottky (F.), à Marburg. — Sur les neuf points d'intersection de deux courbes planes du troisième ordre. (72-81).

Soient α, β, γ trois de ces neuf points. L'auteur considère le déterminant $f_{\alpha\beta\gamma}$, tel que $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$ exprime que ces trois points sont en ligne droite; le déterminant $g_{\alpha\beta\gamma}$, tel que $g_{\alpha\beta\gamma} = 0$ exprime que les six autres points sont sur une conique; et le déterminant $h_{\alpha\beta}$, tel que $h_{\alpha\beta} = 0$ exprime que α est point double d'une cubique passant par les huit points autres que β. L'auteur établit diverses identités liant ces trois sortes de déterminants. Elles le conduisent à traiter les deux problèmes suivants :

1° Calculer les coordonnées d'un des neuf points, en fonction des coordonnées des huit autres;

2° Étant donnés sept des neuf points et une droite, caractériser les couples de points de cette droite qui forment, avec les sept points donnés, l'intersection complète de deux cubiques.

Gutzmer (A.), à Halle. — Sur la démonstration de l'existence des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnée par Paul Günther. (82-85).

Günther avait indiqué que sa démonstration permettait de trouver une limite supérieure de l'erreur commise en arrêtant à un terme de rang quelconque la série qui représente une intégrale. M. Gutzmer complète la démonstration de manière à trouver effectivement cette limite.

Notice nécrologique sur Ernst-Christian-Julius Schering (13 juillet 1833-2 novembre 1897). (86).

Wallenberg (*Georg*.). — Sur les équations différentielles non linéaires du second ordre. (87-113).

Le problème que l'auteur a en vue est de caractériser celles des équations d'ordre supérieur au premier dont les points singuliers mobiles sont, comme cela a lieu pour les équations du premier ordre, des points singuliers algébriques et non des points singuliers essentiels. Il se limite aux équations homogènes du second ordre, pour lesquelles la transformée en $w = \frac{y'}{y}$ est du premier ordre, ce qui permettra d'appliquer des théorèmes connus.

Dans le cas où la variable indépendante ne figure pas dans l'équation, la condition pour que l'équation ne possède pas de points d'indétermination autres que le point à l'infini, est que, dans le développement de w' suivant les puissances décroissantes de w, l'exposant de la plus haute puissance de w, s'il est supérieur à 1, soit au moins égal à 2. En utilisant les théorèmes de Briot et Bouquet, l'auteur trouve aussi, dans ce cas, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales soient uniformes et étudie la nature fonctionnelle de ces intégrales.

Il étudie ensuite, d'une manière analogue, en se servant des résultats de Fuchs et de Poincaré pour les équations du premier ordre, le cas où l'équation homogène du second ordre considérée contient la variable indépendante. Plusieurs exemples sont traités en détail.

Hensel (*Kurt*). — Sur la réduction des systèmes de diviseurs à leur forme canonique. (Deuxième Mémoire.) (114-130).

L'existence d'une forme réduite, définie sans ambiguïté, pour tout système de modules $[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x)]$, a été établie dans le précédent Mémoire de l'auteur (même journal, t. 118, p. 234-251). Ce deuxième Mémoire contient une méthode pour obtenir cette forme réduite par un nombre limité d'opérations. Les modules $F_i(x)$ sont supposés premiers entre eux dans leur ensemble.

La première partie de la réduction consiste à décomposer le système de modules donné en un produit de systèmes de modules *simples*, c'est-à-dire de la forme

$$(\text{II}) \sim \left(p^a,\ F_1(x),\ \ldots,\ F_\mu(x),\ P^b\right),$$

où p est un nombre premier et P un polynome entier en x, à coefficients entiers, dont le premier coefficient est *un*, et qui est irréductible *modulo* p; et où, de plus, aucun des éléments $F_i(x)$ n'est divisible par le *diviseur premier* $\left(p,\ P(x)\right)$.

L'auteur montre ensuite comment on arrive, par un algorithme rationnel, à ramener un système simple (II) à la *forme canonique* unique

$$\left(\Phi_0(P),\ \Phi_1(P),\ \ldots,\ \Phi_\nu(P)\right);$$

où les éléments *primaires* $\Phi_i(P)$ sont liés par des relations de la forme

$$p^{e_i}\Phi_{i-1} = \sum_{k=i}^{\nu} b_{ik}\Phi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dans lesquelles les coefficients b_{kk} sont des fonctions primaires de P sans diviseur numérique, en même temps que chaque élément b_{ik} est réduit à son plus petit reste relativement au système de modules (p^{e_i}, b_{kk}).

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques non uniformes. (Deuxième Mémoire; *voir* même journal, t. 115.) (131-147).

L'auteur rend compte de son Mémoire dans les termes suivants :

« Dans le premier Mémoire, rappelé ci-dessus, on supposait que les branches des diverses fonctions algébriques figurant rationnellement dans les coefficients de l'équation considérée pouvaient être combinées à volonté sans qu'aucun des dénominateurs des coefficients devînt nul identiquement. Cette hypothèse est maintenant laissée de côté et l'on ne considérera que des combinaisons de ces branches, pour lesquelles aucun dénominateur ne s'annule identiquement. »

Dans le n° 1, l'auteur montre comment on peut exprimer une combinaison de branches de plusieurs fonctions algébriques rationnellement au moyen de la variable indépendante et d'une autre fonction algébrique. On ramène ainsi l'équation donnée à plusieurs équations linéaires qui rentrent dans le cas traité dans le premier Mémoire.

Des considérations analogues servent, dans le n° 2, à construire effectivement, dans tous les cas, l'équation linéaire homogène à coefficients rationnels, dont les intégrales sont les intégrales linéairement indépendantes d'une équation linéaire homogène à coefficients algébriques donnée. Le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes peut être moindre que le produit de l'ordre de l'équation par le nombre des combinaisons des branches des fonctions algébriques figurant dans les coefficients.

Les n°s 3, 4 contiennent des additions à des Mémoires antérieurs de l'auteur, notamment en ce qui concerne la représentation des sous-groupes, dans un groupe d'intégrales où interviennent des exposants qui ne diffèrent que par des nombres entiers.

Hancock (*Harris*), à Chicago. — Formes canoniques pour la représentation unique des systèmes de modules de Kronecker. (148-170).

Les résultats obtenus par l'auteur, indépendamment des recherches de M. Kurt Hensel sur le même sujet, sont analogues à ceux de ce dernier (*voir* ci-dessus l'analyse du Mémoire de M. Hensel). Le système donné

$$[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\lambda(x)]$$

est d'abord décomposé en systèmes de la forme

$$[p^n, p^{n-1}\Phi_1(x), p^{n-2}\Phi_2(x), \ldots, p\Phi_{n-1}(x), \Phi_n(x)],$$

où p est un nombre premier. Ces systèmes sont réduits à leur tour. Le procédé de réduction est exposé en détail pour $n = 1, 2, 3, 4$. Pour $n = 3$, par exemple, la forme canonique est $(p^3, p^2 M_1, p M_2, M_3)$, avec les relations de conditions caractéristiques

$$M_2 = \theta, \qquad M_2 = p\varphi + M_1\theta^{(1)}, \qquad M_3 = p^2\psi + pM_1\theta^{(2)} + M_2\varphi^{(1)},$$

où les premiers coefficients de θ, $\theta^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ sont égaux à *un;* les degrés de φ et ψ moindres que celui de θ, le degré de $\theta^{(2)}$ moindre que celui de $\theta^{(1)}$ et où enfin les coefficients de toutes les fonctions sont réduits *modulo p*.

Baur (*L.*), à Darmstadt. — Sur les ramifications des surfaces de Riemann à trois feuillets. (171-174).

L'auteur montre comment ses recherches sur les fonctions d'un corps cubique (*Math. Annalen*, t. XLIII et XLVI) fournissent un exemple absolument précis pour les résultats généraux de Hensel (*Sitzungsberichten der Berliner Akademie*, 17 octobre et 28 novembre 1895), relatifs aux ramifications des surfaces de Riemann.

Hensel (*Kurt*). — Sur les propriétés arithmétiques élémentaires des systèmes de modules de deuxième rang. (175-185).

Le système de modules considéré est, comme dans le Mémoire du même auteur analysé ci-dessus,

$$(M) \sim \Big(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x)\Big),$$

et le système est encore supposé *pur*, c'est-à-dire que les $F_i(x)$ n'ont pas de diviseur commun. En se servant des résultats qu'il a obtenus précédemment, l'auteur résout les deux questions suivantes :

1° Trouver le nombre $N(M)$ de toutes les fonctions entières de x, à coefficients entiers, incongrues *modulo* (M).

2° Trouver le nombre $\varphi(M)$ de toutes les fonctions de x, incongrues *modulo* (M), et n'ayant pas de diviseur commun avec (M).

Kühne (*H.*), à Herford. — Extension d'un théorème de Géométrie aux multiplicités d'ordre pair, comme exemple de l'application d'un déterminant gauche. (186-195).

Le théorème à généraliser est :

Les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites passent par un même point et leurs centres sont sur un même cercle.

L'auteur montre que l'exactitude du théorème dépend de l'évanouissement

d'un déterminant symétrique gauche d'ordre $n-1$, n étant le nombre de dimensions de l'espace considéré. Le théorème est donc vrai, si n est pair.

Horn (J.), à Charlottenburg. — Sur la nature des intégrales des équations différentielles, dans le voisinage d'un point d'indétermination. (196-209 et 267-290).

Suite du Mémoire commencé Tome 118 du même journal.

Deuxième Partie. — On considère l'équation

$$x^{\lambda-1}\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles entières de y, dont les coefficients sont des fonctions régulières de x, dans le domaine de $x=0$. On pose

$$\varphi(\alpha)=P(0, \alpha), \qquad \psi(\alpha)=Q(0, \alpha).$$

Tous les coefficients sont supposés réels, x est une variable réelle tendant vers zéro et l'on étudie comment se comportent les intégrales réelles. Les résultats principaux sont les suivants :

Si une intégrale tend vers une limite, pour $x=+0$, cette limite satisfait à l'équation $\varphi(\alpha)=0$. A une racine réelle α de cette équation correspond une seule intégrale tendant vers α, ou une infinité, suivant que $\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$ est négatif ou positif.

Si $k>0$, chaque intégrale $y=f(x)$ tendant vers ε_0, pour $x=0$, est représentée asymptotiquement par une série

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1 x+\ldots+\varepsilon_n x^n+\ldots$$

qui satisfait formellement à l'équation. On a

$$\lim\frac{f(x)-\varepsilon_0-\varepsilon_1 x-\ldots-\varepsilon_n x^n}{x^n}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim f^{(n)}(x)=n!\,\varepsilon_n.$$

Troisième Partie. — L'équation différentielle

$$x^{k-1}\frac{dy}{dx}=G(x, y),$$

où $G(x, y)=ay+\Sigma A_{\lambda\mu}x^{\lambda}y^{\mu}$ est une fonction régulière dans le domaine de $x=0$, $y=0$ et où k est un entier positif, est vérifiée formellement par une série

$$y=c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots,$$

qui n'est convergente en général que pour $x=0$. L'auteur montre comment cette série peut représenter asymptotiquement les intégrales qui tendent vers zéro, quand la variable x tend vers le point singulier d'indétermination $x=0$, suivant un chemin déterminé (nos 1-4). Le no 5 contient des résultats complémentaires sur la manière dont se comportent les intégrales considérées.

Dans les nos 6 et 7, l'auteur introduit l'hypothèse que la série G est de la

forme $ay + y\mathfrak{p}(x, y)$, avec $\mathfrak{p}(0, 0) = 0$; il donne alors pour y un développement en série, qui n'est pas convergent dans tout le domaine de $x = 0$; mais qui est convergent pour des valeurs de x, réelles et positives, suffisamment petites, dans le cas où la partie réelle de a est positive. Cette représentation analytique de y est liée à une représentation asymptotique au moyen d'une série divergente, qui procède suivant les puissances de x et d'une expression exponentielle.

Brückel (*Ph.*), à Darmstadt. — Démonstration des formules de M. S. Gundelfinger pour le problème des axes principaux des surfaces du second ordre et de la seconde classe, en coordonnées homogènes quelconques. (210-233 et 313-329).

Cette exposition est faite, d'après des indications de M. Gundelfinger. C'est une extension des méthodes employées dans ses *Leçons sur la Géométrie analytique des sections coniques* (Dingeldey, 1895). Les démonstrations sont souvent seulement indiquées. Les formules sont tout à fait générales et les cas particuliers, ainsi que les cas de dégénérescence, sont examinés d'une manière complète. Voici le sommaire des questions traitées :

Première Partie. — Critères pour les surfaces du second ordre et de la seconde classe et pour les courbes du second ordre dans l'espace.

Deuxième Partie. — Problème des axes principaux pour les surfaces du second ordre (invariants et covariants, contravariants, centres, plans principaux, axes).

Troisième Partie. — Problème des axes principaux pour les surfaces de la seconde classe.

Quatrième Partie. — Conditions pour les surfaces de révolution du second ordre et de la seconde classe. Examen des cas de dégénérescence.

Jahnke (*Eugen*), à Charlottenburg. — Sur un système orthogonal très général formé avec les fonctions thêta de deux arguments, et sur ses applications à la Mécanique. (234-252).

Un système orthogonal quelconque de *neuf* éléments s'exprime en fonction rationnelle de *quatre* paramètres. Partons d'un système orthogonal E, défini ainsi par les paramètres e_1, e_2, e_3, e_4, et considérons le système orthogonal A, défini par les paramètres

$$a_1 = e_1\alpha_2 - e_2\alpha_1, \qquad a_2 = e_1\alpha_4 - e_2\alpha_3, \qquad a_3 = e_1\beta_2 - e_2\beta_1, \qquad a_4 = e_1\beta_4 - e_2\beta_3.$$

Les éléments de A s'expriment (*Cf.* le Mémoire du même auteur, même journal, t. 118, p. 225) au moyen des éléments de E, des deux systèmes orthogonaux de neuf éléments définis par α_1, α_2, α_3, α_4 et par β_1, β_2, β_3, β_4 et du système orthogonal de seize éléments défini (d'après Caspary) par les huit paramètres α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4.

Si l'on pose alors, en introduisant les fonctions θ de deux arguments, avec

les notations de Weierstrass et Göpel,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A_1\theta_5\,(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_1 &= A_2\theta_5\,(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
\alpha_2 &= A_1\theta_{01}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_2 &= A_2\theta_{01}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
\alpha_3 &= A_1\theta_4\,(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_3 &= A_2\theta_4\,(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
\alpha_4 &= A_1\theta_{23}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_4 &= A_2\theta_{23}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),
\end{aligned}$$

où A_1 et A_2 sont des fonctions arbitraires des arguments x_i, y_i introduits, on obtient pour système A le système trouvé par Kötter et qui sert à la résolution de nombreux problèmes de Mécanique.

L'auteur montre ensuite que ce système peut s'obtenir par la composition de deux systèmes orthogonaux identiques de seize éléments; ce qui lui fournit la construction d'un système de formules encore plus général, contenant le précédent comme cas particulier.

Il donne un système d'équations aux dérivées partielles, caractéristique pour le système orthogonal ainsi trouvé, et contenant aussi, comme cas particulier, les relations indiquées par Kötter pour son système.

Heymann (*W.*), à Chemnitz. — Sur l'équation différentielle

$$\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}+\chi(x)y^2+\theta(x)=0.$$

(253-258).

Petrovitch a montré que cette équation se ramène par une transformation $y=\rho z$ à la forme

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z^2=f(x),$$

et par suite à la forme

$$\frac{dY}{dt}=F(t)+Y^3.$$

L'auteur donne, par des procédés plus simples, des réductions équivalentes; il obtient, en particulier, les formes

$$\eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi}+p_1\eta_1+p_0=0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\upsilon}{d\xi}\right)^2+q_1\upsilon+q_0=0.$$

Notice nécrologique sur Francesco Brioschi (mort le 13 décembre 1897). (259).

Sujet du Prix de la Société princière de Jablonowski, de Leipzig, pour l'année 1901. (260).

« Perfectionner, en un point essentiel, la théorie des formes différentielles quadratiques. »

Heffter (*Lothar*), à Bonn. — Sur les groupes abéliens. (261-266).

Un élément du groupe est dit appartenir à un exposant d, si d est l'exposant de la plus petite puissance de cet élément se réduisant à l'élément unité. Soit $\psi(d)$ le nombre des éléments du groupe appartenant à un nombre d donné. L'auteur étudie les relations entre $\psi(d)$ et la fonction arithmétique $\varphi(d)$ (*Cf.* NETTO, *Vorlesungen über Algebra*, t. II).

Saalschütz (*L.*), à Königsberg. — Sur les solutions rationnelles de l'équation fonctionnelle

$$C\,\psi(n)\,\psi(n+1)+(A''n+B'')\,\psi(n+1) - [A'(n+1)+B']\,\psi(n)+A'-A''=0.$$

(291-312).

L'auteur montre d'abord qu'on peut se borner à chercher des solutions de la forme

$$\psi(n)=\frac{n^{\lambda-1}+r_1 n^{\lambda-2}+\ldots+r_{\lambda-1}}{n^{\lambda}+s_1 n^{\lambda-1}+\ldots+s_{\lambda}}.$$

On trouve ensuite que λ peut être pris arbitrairement, à condition que

$$(A'-A'')\,C$$

soit égal à

$$(A'B''-A''B'-A'A'')\,\lambda-A'A''\lambda^2.$$

Le numérateur et le dénominateur de $\psi(n)$ se déterminent alors explicitement.

Günther (*Paul*). — Addition au Mémoire : « Sur les équations différentielles linéaires dont les intégrales n'ont qu'un point singulier à distance finie et sont régulières à l'infini ». (Même journal, t. 105, p. 1 et suivantes.) (330-338).

Dans le Mémoire en question, Günther avait envisagé le cas où, pour une équation d'ordre n, de l'espèce considérée, tous les coefficients de la fonction entière $G\left(\frac{1}{x}\right)$, qui intervient dans un *facteur déterminant* $e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}$, sont des racines multiples d'ordre n des équations auxiliaires correspondantes. Il avait énoncé un certain nombre de théorèmes relatifs à ce cas.

La présente Note contient les démonstrations de ces théorèmes et de quelques autres et indique les rapports entre ces théorèmes et les développements du n° V du même Mémoire. Elle a été rédigée par L. Schlesinger, d'après des papiers laissés par Günther.

Stäckel (*Paul*), à Kiel. — Sur l'existence des intégrales dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles. (339-346).

Königsberger a essayé de démontrer l'existence des intégrales en se bornant aux systèmes d'équations du premier ordre, contenant s fonctions inconnues et s équations, et en ramenant le cas général à celui-là, par l'introduction de nouvelles fonctions inconnues égales aux dérivées.

L'auteur remarque que les systèmes du premier ordre qu'on obtient ainsi ne satisfont pas aux conditions que s'impose M. Königsberger dans sa démonstration. Car, d'une part, ils ne satisfont pas à certaines conditions exprimant que des déterminants fonctionnels ne sont pas nuls et, fait plus caractéristique encore, ils ne sont pas *complètement intégrables*.

Pincherle (*S.*), à Bologne. — Sur la transformée d'Euler. (Extrait d'une Lettre adressée à M. L. Schlesinger, à Clausenbourg.) (347-349).

Soit D le symbole de la dérivation ordinaire. Définissons une opération A_s par les équations symboliques

$$DA_s = A_s D, \qquad A'_s D = s A_s,$$

où A'_s désigne la *dérivée fonctionnelle* $A_s(x\varphi) - xA_s(\varphi)$ de A_s.

L'auteur montre que cette opération équivaut à la transformation d'Euler

$$A(\varphi) = \int_{(l)} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{s+1}},$$

et qu'on peut, en partant synthétiquement de cette définition, obtenir les diverses propriétés de cette transformée.

Tome 120; 1899.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur la nature des intégrales d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, dans le voisinage d'un point d'indétermination. (1-26).

Il s'agit de l'équation

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x),$$

où k est un entier positif et $g(x)$, $h(x)$ deux séries entières, convergentes dans le domaine de $x = 0$. Par une transformation simple, on peut faire en sorte que $g(x)$ soit un polynome entier, de degré k au plus,

$$g(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k.$$

Cette équation est vérifiée formellement par une série

$$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

Soit t l'intégrale de l'équation sans second membre

$$t = e^{-\left(\frac{1}{kx^k} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x}\right)} x^{a_k}.$$

L'intégrale définie

$$\tau_1 = t^{-1} \int_0^x \frac{h(x)}{x^{\lambda-1}}\, t\, dx$$

représente, suivant le chemin d'intégration, diverses intégrales de la proposée, à condition que le chemin d'intégration satisfasse à la condition $\lim\limits_{x=0} t = 0$. En limitant la variation de x dans divers secteurs d'un cercle ayant l'origine pour centre, l'auteur définit, au moyen de cette intégrale τ_1, k intégrales particulières $\tau_{11}\tau_{12}\ldots\tau_{1k}$ de l'équation proposée. Il montre que S représente asymptotiquement ces diverses intégrales τ_{1m}. Celles-ci peuvent aussi se représenter par des séries de la forme

$$\tau_{1m} = \mathrm{P}(x) + \mathrm{A}_m t^{-1},$$

si a_k n'est pas un nombre entier; les A_m sont des constantes et $\mathrm{P}(x)$ est la seule intégrale de la proposée qui soit uniforme dans le domaine de $x = 0$. Si a_k est un nombre entier, on a

$$\tau_{1m} = \mathrm{P}(x) + [\mathrm{A}_m + \mathrm{B} \log x]\, t^{-1}.$$

Dans un dernier paragraphe, l'auteur étudie les racines des équations

$$\mathrm{P}(x) = \text{const.},$$

et montre que $\mathrm{P}(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = x^s \mathrm{G}\left(\frac{1}{x}\right) \mathfrak{p}(x),$$

où G est une fonction transcendante entière de genre k, s un nombre entier et $\mathfrak{p}$ une série entière ne s'annulant pas dans le domaine de l'origine.

Hermes (O.), à Steglitz. — Les formes des polyèdres (avec une planche). (27-59 et 305-353).

Énumération des diverses formes possibles, d'après le nombre des faces, le nombre des côtés des diverses faces et le nombre de faces des divers angles polyèdres.

La *première partie* est consacrée aux polyèdres *simples*, c'est-à-dire dont tous les angles polyèdres sont des trièdres. Le principe de la classification est le suivant. Une des faces avec le nombre maximum de côtés est appelée *face fondamentale;* les faces adjacentes à celle-là sont dites *faces latérales* et les autres sont dites *faces de couverture* (*Deckflächen*). Les côtés de la face fondamentale sont dits *arêtes fondamentales;* les arêtes qui aboutissent à des sommets de cette face sont dites *arêtes latérales* et toutes les autres sont les *arêtes de couverture;* les arêtes de couverture qui ne font pas partie des faces de couverture sont dites *inter-arêtes* (*Zwischenkanten*). Chaque polyèdre est alors défini par une formule donnant le nombre de côtés de la face fondamentale, de chacune des faces latérales et des faces de couverture et l'indication des inter-arêtes.

L'auteur donne les formules des polyèdres jusqu'aux décaèdres, pour lesquels

il trouve 233 formes différentes. Il annonce l'existence de 1250 formes pour les polyèdres simples à onze faces et de 7533 formes pour les polyèdres simples à douze faces.

La *seconde partie* traite, d'après une méthode analogue, des polyèdres dont les angles polyèdres sont quelconques et contient l'énumération des formes de ces polyèdres jusqu'aux octaèdres inclusivement. L'auteur indique aussi une classification au moyen de formules relatives aux arêtes seulement (*Kantenformeln*), qui met en évidence un lien étroit entre ces polyèdres généraux et les polyèdres simples à angles trièdres.

Neumann (*Ernst*), à Halle. — Sur la théorie de l'électrostatique de Poisson, et en particulier sur la distribution électrique sur un conducteur limité par trois surfaces sphériques. (60-98 et 277-304).

La première partie du Mémoire est une étude sur les *coordonnées dipolaires,* dont le but est de permettre de combiner, dans la théorie de l'Électrostatique, l'emploi de ces coordonnées et de la méthode de transformations par rayons vecteurs réciproques. A cet effet, l'auteur résout (n° 6) le problème fondamental suivant :

« Soient A_1, A_2 les pôles d'un système de coordonnées dipolaires et λ, ϑ, φ les coordonnées d'un point M dans ce système; par une inversion A_1 et A_2 ont pour homologues des points A'_1, A'_2 qui seront les pôles d'un nouveau système de coordonnées dipolaires, associé au premier (*Bildsystem*); soient λ', ϑ', φ' les coordonnées, dans ce système, de l'homologue M' de M, dans l'inversion considérée : calculer λ', ϑ', φ' en fonction de λ, ϑ, φ. »

Dans la seconde partie du Mémoire, l'auteur applique les formules obtenues à divers problèmes de distribution électrique. Ceux de ces problèmes qui concernent des conducteurs se ramènent, comme l'on sait, aux *deux problèmes fondamentaux* suivants :

1° Distribution sur des conducteurs isolés, en l'absence de toutes forces extérieures ;

2° Distribution sur des conducteurs à la terre, sous l'influence d'une masse électrique placée en un point.

La méthode des rayons vecteurs réciproques permet, comme l'auteur le rappelle dans les n°s 1 et 2, de ramener la solution du second problème pour un conducteur donné à celle du premier problème pour un autre conducteur. Cette réduction se fait simplement par l'emploi des coordonnées dipolaires. C'est ainsi que l'auteur traite (n° 3) le second problème fondamental pour deux sphères (problème traité déjà par C. Neumann). Le résultat obtenu le conduit à une surface de niveau particulière simple (n° 4) pour un certain système de masses électriques en équilibre. Une méthode bien connue lui permet alors de déduire, de la connaissance de cette surface de niveau, la solution du premier problème fondamental pour un conducteur K, limité par des portions de trois sphères, dont l'une est orthogonale aux deux autres (n° 5). Les paragraphes suivants contiennent : la solution du second problème fonda-

mental pour ce même conducteur K (n° 6), des applications au problème des températures stationnaires (n° 7); et la détermination de la fonction de Green pour une calotte formée de deux demi-sphères concentriques (n° 8). Les derniers résultats se trouvent vérifiés par une méthode directe (n° 9). Le n° 10 contient une généralisation des considérations du n° 4 pour une classe étendue de systèmes de conducteurs; enfin un exemple simple des applications qu'on peut en faire est traité dans le n° 11.

Hensel (*Kurt*), à Berlin. — Sur les corps algébriques, qui sont composés avec deux autres. (99-108).

Soit G_1 le corps algébrique défini par une racine x_1 d'une équation algébrique $F(x) = 0$, de degré n; $G_2, G_3, \ldots, G_n$ les corps algébriques conjugués de celui-là, c'est-à-dire correspondant aux autres racines $x_2, x_3, \ldots, x_n$ de $F(x) = 0$. On considère les *systèmes* S de la forme

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{matrix}$$

dans lesquels les éléments des diverses lignes appartiennent respectivement aux corps $G_1, G_2, \ldots, G_n$, les éléments de chaque colonne étant conjugués les uns des autres. Les diviseurs élémentaires de ces systèmes S ont fait l'objet des recherches de M. Hensel, publiées dans les Tomes précédents du même recueil. De chaque système S on peut déduire, par combinaison des colonnes, des systèmes particuliers, qui sont dits *canoniques*, et dont les diviseurs élémentaires s'appellent les *diviseurs fondamentaux* de G_1.

M. Hensel suppose, dans le présent travail, que $F(x)$ est le produit de plusieurs facteurs irréductibles, de sorte que chaque système S est la juxtaposition de systèmes correspondant à diverses équations irréductibles. Il étudie (n° 1) les relations entre les diviseurs fondamentaux de S et de chacun de ces systèmes partiels.

Dans le n° 2, il suppose donnés deux corps algébriques G_1, Γ_1, dont les conjugués soient respectivement $G_2, \ldots, G_n$ et $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$; il considère le corps *composé* de G_1 et de Γ_1 (le *produit* des deux corps, dans la terminologie de Dedekind) et résout le problème :

Déterminer les diviseurs fondamentaux de $[G_1, \Gamma_1]$, *au moyen des diviseurs fondamentaux de* G_1 *et de* Γ_1.

La solution du cas particulier, où les divers corps $[G_i, \Gamma_k]$ sont tous nécessaires pour obtenir un ensemble de corps conjugués, résultait seule immédiatement des résultats donnés, sur ce sujet, dans un précédent Mémoire de l'auteur (t. 105 du même recueil, p. 329-344).

Hauck (*Guido*). — Nouvelles remarques sur les figures réciproques de la Statique graphique. (109-112).

Dans un précédent Mémoire (même recueil, t. 100, p. 365), l'auteur a montré que les figures réciproques de la Statique graphique peuvent être considérées

comme résultant, par projection, de polyèdres réciproques dans le système polaire relatif à une surface de révolution quelconque du second degré. Il montre que le même théorème subsiste en remplaçant la surface de révolution par une surface quelconque du second degré. Si cette quadrique a un centre, le plan de projection sera un plan de section circulaire et la projection sera faite, pour l'une des figures, parallèlement au diamètre conjugué de ce plan cyclique et, pour l'autre figure, en prenant le centre de la surface pour point de vue. Des théorèmes analogues ont lieu pour les paraboloïdes.

L'auteur insiste sur ce point qu'il n'y a pas de raison, d'ordre mécanique, pour préférer à cette réciprocité relative à une quadrique, la réciprocité par rapport à un complexe linéaire, qui est employée en général dans cette question.

Wallenberg (*Georg*). — Sur une classe d'équations différentielles du second ordre non linéaires. (113-131).

Les équations étudiées ont pour forme générale $F(y'', y) = 0$, F étant un polynome entier par rapport a ses deux arguments; et l'auteur cherche à généraliser les résultats obtenus par Briot et Bouquet pour les équations

$$F(y', y) = 0.$$

Il arrive effectivement aux résultats suivants :

1° L'intégrale générale ne peut jamais être uniforme, si F n'est pas linéaire en y'';

2° Pour que l'équation possède des intégrales particulières uniformes et déterminées en tout point à distance finie, il faut et il suffit qu'une de ses intégrales premières particulières soit une équation de Briot et Bouquet; de sorte que le genre de la relation $F = 0$ doit être égal à un.

3° Les seules fonctions uniformes et déterminées en tout point à distance finie, qui soient liées à leur dérivée seconde par une équation algébrique, sont les fonctions rationnelles, périodiques et doublement périodiques.

L'auteur donne en terminant les types d'équations binomes en y'' qui admettent des intégrales particulières de l'espèce considérée.

Les résultats généraux précédents ont été donnés par E. Picard, bien antérieurement, comme résultant d'un théorème général sur les relations algébriques entre des fonctions uniformes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 107).

Saalschütz (*Louis*), à Königsberg. — Sur une fraction continue particulière à numérateurs négatifs, avec des remarques générales sur la convergence ou l'oscillation des fractions continues. (132-164 et 242-266).

Soit $\frac{b'_n}{a_n}$ le quotient incomplet général d'une fonction continue X, $\frac{P_n}{Q_n}$ une réduite quelconque. L'auteur donne divers énoncés qui rattachent la convergence de X aux propriétés de la série $\sum \frac{a_n}{b'_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, en supposant que les b'_n sont

de signe constant à partir d'une certaine valeur de n. Il examine plus spécialement le cas où les b'_n sont tous négatifs ($b'_n = -b_n$). Ces remarques conduisent à introduire les fractions $U_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, liées par la relation de récurrence

$$(1) \qquad U_n(U_{n+1} - a_n) + b_n = 0,$$

qui sera fondamentale dans le cas particulier qui fait l'objet essentiel du Mémoire. Ce cas est celui où a_n et b_n sont donnés par des formules

$$a_n = \alpha_0 n + \alpha_1, \qquad b_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n + \beta_2, \qquad \alpha_0 > 0, \qquad \beta_0 > 0.$$

L'auteur pose alors

$$U_n = An + B + \frac{B_1}{n} f(n),$$

où A est donné par l'équation

$$(2) \qquad A^2 - \alpha_0 A + \beta_0 = 0,$$

B et B_1 par deux autres formules, et où $f(n)$ est définie, à cause de (1), par une équation fonctionnelle simple.

En se bornant au cas où l'équation (2) a ses racines réelles et inégales, l'auteur discute les valeurs asymptotiques de $f(n)$ pour $n = \infty$ et, par suite, les valeurs asymptotiques de U_n. De cette discussion résulte, par application des règles de convergence énoncées au début du Mémoire, que X est convergente, sauf dans un cas d'exception, où X est infinie et il suffit, dans ce cas, de changer la valeur de a_1 pour ramener X à être convergente.

Pour arriver à ce résultat général, l'auteur a dû écarter certaines particularités, qu'il examine en détail dans les derniers paragraphes. Dans certains de ces cas, on peut effectivement sommer X.

Craig (*Thomas*), à Baltimore. — Applications de certaines équations aux dérivées partielles, dérivées des équations de Codazzi. (165-188).

Soit, pour une surface

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$\Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \sqrt{EG - F^2}.P,$$

$$\Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \sqrt{EG - F^2}.Q,$$

$$\Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \sqrt{EG - F^2}.R,$$

X, Y, Z étant les cosinus directeurs de la normale. Les équations de Codazzi sont des équations du premier ordre entre P, Q, R. En y supposant $Q = 0$, on en déduit deux équations linéaires du second ordre $[P] = 0$, $[R] = 0$, vérifiées respectivement par P et R. L'auteur montre que ces équations sont nécessaires et suffisantes pour que les lignes coordonnées soient conjuguées.

En faisant ensuite diverses hypothèses particulières sur les invariants de ces équations et supposant en outre $F = 0$, il obtient les théorèmes suivants :

1° *Si les inverses des rayons de courbure principaux satisfont à la même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre* (E), *l'équation que vérifient les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface est l'adjointe de* (E) *et ces équations ont des invariants égaux; les lignes de courbure forment un système isométrique et le* ds^2 *est de la forme*

$$ds^2 = U_2 V_2 (U_1^2\, du^2 + V_1^2\, dv^2).$$

2° *Dans le cas des surfaces de révolution, des cônes, des cylindres et des transformées de ces surfaces par inversion, les équations linéaires vérifiées par les inverses des rayons de courbure principaux sont adjointes l'une de l'autre.*

Kötter (*Fritz*). — Pression exercée sur le fond des vases cylindriques verticaux contenant du sable. (189-241).

Imaginons un tube vertical, fermé par un piston à sa partie inférieure et contenant du sable. La pression P que l'auteur cherche à déterminer est la pression normale minima qu'il faudrait exercer de bas en haut sur ce piston pour le maintenir en équilibre. L'expérience montre que, si la hauteur de la couche de sable augmente, cette pression tend très rapidement vers une limite : on supposera donc que P est égale à cette limite et, par conséquent, indépendante de la hauteur de la couche de sable.

Pour mettre le problème en équations, on admettra, avec Coulomb, que l'équilibre tient au *frottement* des particules de sable; c'est-à-dire, d'une manière plus précise, que pour un élément de surface quelconque, au sein de la masse de sable, l'angle de la pression avec la normale ne dépasse pas une limite fixe φ et que, de même, pour les éléments en contact avec les parois solides du vase, cet angle ne dépasse pas une limite fixe φ_1. Un système de pressions, satisfaisant à ces conditions et aux équations générales de l'équilibre des systèmes continus, s'appellera une *répartition des pressions admissible*. Soit V la composante normale de la pression totale exercée par le sable contre le piston, pour une telle répartition des pressions. La pression P cherchée sera le minimum de toutes ces quantités V, correspondant aux diverses répartitions admissibles. Le problème se présente ainsi comme un problème de calcul des variations.

L'auteur le traite complètement dans deux cas seulement : celui où la section du tube se compose de l'espace compris entre deux droites parallèles et celui où la section du tube est un cercle. Il termine par quelques considérations sur la forme vraisemblable de l'expression de P, dans le cas général.

Kneser (*Adolf*), à Dorpat. — Étude et représentation asymptotique des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, pour de grandes valeurs de l'argument. (Troisième Mémoire). (267-275).

Généralisation des résultats obtenus dans le précédent Mémoire publié, sous le même titre, dans le Tome 117 du même recueil.

1. L'intégrale générale réelle de l'équation

$$y'' + y\left\{a^2 + \frac{1}{x}[a_1 + \varphi(x)]\right\} = 0$$

peut se représenter sous la forme

$$y = C_1 \cos\left(\frac{a_1}{2a}\log x + ax\right) + C_2 \sin\left(\frac{a_1}{2a}\log x + ax\right) + \varepsilon,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et où ε et $\frac{d\varepsilon}{dx}$ tendent vers zéro pour $x = \infty$, sous les hypothèses suivantes :

a et a_1 sont des constantes réelles et a n'est pas nul et, pour des valeurs de x suffisamment grandes, la fonction réelle $\varphi(x)$ est continue ainsi que sa dérivée et l'on a, γ et g étant des constantes positives,

$$|\varphi(x)| < g, \qquad |x^\gamma \varphi'(x)| < g,$$

enfin l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{|\varphi(x)|}{x}\,dx$$

est finie et déterminée.

2. Soit l'équation

$$y'' + y\left(a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) = 0,$$

où a, a_1, a_2, ... sont des constantes réelles et posons

$$X = ax + \frac{a_1}{2a}\log x.$$

L'intégrale générale réelle de cette équation est représentée asymptotiquement par une série de la forme

$$\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)\cos X + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots\right)\sin X,$$

qui satisfait formellement à l'équation et où α_0 et β_0 sont arbitraires.

3. Résumé des résultats obtenus ; comparaison avec ceux de M. Horn (t. 118 du même journal).

Sujet du Prix proposé, pour l'année 1902, par la Société princière de Jablonowski. (276).

« Complèter, en un point essentiel, les recherches contenues dans le Mémoire de Poincaré sur *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.* » (1896).

Table des matières des Tomes 111-120.

Tome 121; 1900.

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques non uniformes. (Troisième Mémoire; les deux premiers Tomes 115 et 119 du même journal.) (1-39).

Soit $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ une équation linéaire homogène d'ordre m, dont les coefficients dépendent rationnellement de x et des fonctions algébriques u, v, w de x. On a vu, dans les précédents Mémoires, comment on en déduit une équation linéaire homogène à coefficients rationnels $\Phi_N(y, x) = 0$, à laquelle appartiennent toutes les intégrales de la première. On supposera, dans ce Mémoire, que Φ_N peut se représenter par un système d'*expressions différentielles normales* (1), et l'on cherchera à intégrer $F_m = 0$ (n° 1).

Le cas où Φ_N ne contient qu'une *composante canonique* (*canonischer Bestandheil*) a été traité implicitement dans le premier Mémoire (n° 2). L'auteur montre (n° 3) comment on peut former une $F_m = 0$ telle que Φ_N ait la propriété générale énoncée. L'intégration de $\Phi_N = 0$ dépend alors de la formation d'un système d'*expressions différentielles élémentaires normales* (n° 4). Ces systèmes possèdent les mêmes propriétés que l'auteur a établies autrefois (même recueil, t. 96) pour les systèmes d'expressions différentielles normales (n° 5).

Cela posé, soit un complexe de R combinaisons de branches des fonctions u, v, w correspondant au point singulier $x = a$. On pose $x - a = \zeta$ et, dans le domaine de $x = a$, $F_m = 0$ est remplacée par une équation $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ et $\Phi_N = 0$ par une équation $\Psi_N(y, \zeta) = 0$. Il résulte de ce qui précède que Γ_m peut se représenter par un système d'expressions différentielles élémentaires normales. Le n° 6 contient la détermination des intégrales normales correspondantes sous la forme de combinaisons linéaires des intégrales de même nature de $\Psi_N = 0$. L'intégration de l'équation $F_m = 0$, au sens expliqué par M. Thomé dans son premier Mémoire (Tome 115), en résulte (n° 7).

Un dernier paragraphe est consacré aux équations non homogènes de la forme $F_m = q$, où q satisfait aux hypothèses introduites dans le Mémoire de l'auteur, du Tome 107 du même recueil (n° 8).

Dedekind (*R.*), à Brunswick. — Sur le nombre des classes d'idéaux dans les corps algébriques définis par des équations binomes du troisième degré. (40-123).

Le corps cubique considéré est défini par $\theta = \sqrt[3]{d}$. En mettant d sous la forme ab^2c^3, où c est rationnel et où a et b sont des entiers dont le produit n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, la formule générale des

(1) Pour la terminologie employée par M. Thomé, *voir* son Mémoire du Tome 96 du *Journal für Mathematik*.

nombres $\varkappa$ du corps K considéré est

$$\varkappa = z + x\sqrt[3]{ab^2} + y\sqrt[3]{a^2 b},$$

x, y, z étant des nombres rationnels quelconques. Les nombres a, b sont les *invariants* du corps K. Le *nombre fondamental* (ou discriminant) D est égal à $-3k^2$ où $k = 3ab$, si $a^2 - b^2$ n'est pas divisible par 9 (*corps de première espèce*) et où $k = ab$ si $a^2 - b^2$ est divisible par 9 (*corps de deuxième espèce*). L'auteur détermine tous les idéaux premiers du corps K, puis il s'occupe de la détermination du nombre h des classes d'idéaux contenues dans K. D'après la méthode de Dirichlet, ce nombre est donné par la formule

$$h = \frac{k\sqrt{3}}{2\pi \log \varepsilon} \lim_{s-1} (s-1) \mathrm{J},$$

où ε est une *unité fondamentale* du corps (de sorte que toutes les unités sont $\pm \varepsilon^m$, m étant un entier quelconque) et où J est la fonction

$$\mathrm{J} = \prod \frac{1}{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^s},$$

où le produit $\prod$ s'étend à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ du corps (N étant le symbole de la norme). La détermination de $\lim (s-1)\mathrm{J}$ résultera d'une série de transformations de cette fonction J. D'après les résultats obtenus pour les idéaux $\mathfrak{p}$, on peut écrire

$$\mathrm{J} = \prod \mathrm{F}(p),$$

où le produit s'étend à tous les nombres premiers p, et où la fonction F est définie par le moyen du corps quadratique Q, dont le nombre fondamental est -3. On a, en effet,

$$\mathrm{F}(p) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \prod \frac{1}{1 - \frac{\psi(\varpi)}{\mathrm{N}(\varpi)^s}},$$

où le produit $\prod$ s'étend à tous les nombres ϖ du corps Q premiers, essentiellement différents et figurant dans p et où la fonction ψ est égale à zéro, si p divise k, à $+1$, si $p = 3$ et, dans les autres cas, à un *caractère* $\left(\frac{ab^2}{\varpi}\right)$, défini par Jacobi, et qui est égal à l'une des racines cubiques de l'unité.

J se décompose ainsi en un produit

$$\mathrm{J} = \mathrm{GH},$$

où

$$\mathrm{G} = \sum \frac{1}{n^s} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et où

$$\mathrm{H} = \frac{1}{6} \sum \frac{\psi(\mu)}{\mathrm{N}(\mu)^s},$$

la sommation s'étendant maintenant à tous les nombres entiers μ du corps Q.

zéro excepté (grâce à une extension de la définition de la fonction ψ). La loi de réciprocité cubique permet de décomposer cette fonction H et de la ramener à une forme où interviennent les formes quadratiques positives, de discriminant D. L'auteur établit alors une décomposition remarquable de ces formes quadratiques en trois familles, dont la première forme un groupe et sert à représenter les nombres premiers p, pour lesquels k est reste cubique. Un théorème de Kronecker conduit alors au résultat définitif, d'après lequel la détermination de h est ramenée à la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Boehm (*Karl*), à Heidelberg. — Conditions d'existence d'un potentiel cinétique dépendant des dérivées premières et secondes des coordonnées. (124-140).

Le problème traité par l'auteur se rattache aux recherches de M. Königsberger sur les principes de la Mécanique. La méthode employée est due à Mayer (*Leipziger Berichte*, 1896). Le résultat est le suivant :

Pour que la fonction H *cherchée dépende des* ν *premières dérivées des coordonnées, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux équations*

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_i}\right) + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}}\right) + P_i = 0,$$

où les P_i *sont des fonctions des* p_i, p'_i, $\ldots$, $p_i^{(2\nu)}$ *satisfaisant aux relations de conditions*

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k^{(\tau)}} - \binom{\tau+1}{1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k^{(\tau+1)}}\right) + \binom{\tau+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k^{(\tau+2)}}\right) - \ldots$$
$$+ (-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\frac{d^{2\nu-\tau}}{dt^{2\nu-\tau}}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k^{(2\nu)}}\right) = (-1)^\tau \frac{\partial P_k}{\partial p_i^{(\tau)}},$$
$$(\tau = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu).$$

Ce théorème est démontré dans le cas $\nu = 2$.

Kœnigsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Sur les potentiels cinétiques généraux. (141-167).

Par des considérations fondées sur la notion de travail et le principe de d'Alembert, l'auteur est conduit à prendre comme expression générale de la force produite par le mouvement d'un point matériel libre, se déplaçant sur un axe Ox,

$$X = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x^{(\nu)}},$$

H étant une fonction de x, x', x'', $\ldots$, $x^{(\nu)}$. Par analogie avec la Mécanique classique, il cherche ce que doit être H pour que X ne dépende explicitement ni de t, ni de x, x', $\ldots$, $x^{(\nu)}$; H pourra s'appeler *la force vive du point* et

sera représentée par la lettre T. Le résultat est donné par les formules

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_2 x^{(2\nu-2)} + \ldots + a_{\nu-1} x^{(\nu+1)},$$

$$T = -\frac{1}{2}\left\{(-1)^\nu a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + \ldots + (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} a_{\nu-1} x^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2}\right\}.$$

pour ν impair et, pour ν pair, par les formules

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_2 x^{(2\nu-2)} + \ldots + a_{\nu-2} x^{(\nu+2)},$$

$$T = -\frac{1}{2}\left\{(-1)^\nu a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + \ldots + (-1)^{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} a_{\nu-2} x^{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2}\right\}.$$

On peut alors reprendre les questions traitées dans la Mécanique classique, et introduire en particulier la notion généralisée de potentiel. Pour des forces qui ne dépendent que des distances mutuelles des points du système et de leurs dérivées, on trouve un potentiel satisfaisant à une équation qui est la généralisation de l'équation de Laplace. On peut aussi généraliser l'équation de Poisson.

L'auteur étudie le cas d'un potentiel du premier ordre. Dans le cas d'un seul point mobile, le potentiel ne dépendant plus que de la distance de ce point à un point fixe, de la dérivée de cette distance par rapport au temps et de la vitesse du point, l'intégration des équations du mouvement se ramène à des quadratures. Ce dernier résultat est appliqué au mouvement d'un point mobile à l'intérieur d'une sphère creuse et attiré par les éléments de la couche sphérique suivant la loi de Weber.

Schlesinger (*Ludwig*), à Klausenburg. — Sur les substitutions projectives qui laissent un cercle invariant. (168-176).

Le rapport qui existe entre ces substitutions et la géométrie non euclidienne, signalé par Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens, est précisé par l'énoncé suivant :

Si, dans le plan de la variable complexe z, on considère un cercle O de centre z_0 et de rayon $\sqrt{c}$; et si l'on convient d'appeler *droites* les cercles orthogonaux à O; d'appeler *longueur* d'une courbe l'intégrale

$$2\int_{z_1}^{z_2} \frac{|dz|}{|z - z_0|^2 - c};$$

et *aire* l'intégrale

$$4\int\int \frac{dp\,dq}{(|z - z_0|^2 - c)^2};$$

de conserver au mot *angle* son sens habituel; et de considérer enfin comme *égales* les figures qui se transforment les unes dans les autres par l'une des deux classes de transformations qui laissent O invariant; alors, suivant que c est positif, nul ou négatif, on obtient la géométrie de Lobatschefski, d'Euclide ou de Riemann.

Schlesinger (*Ludwig*), à Clausenburg. — Sur les substitutions linéaires échangeables. (177-187).

Lorsque deux substitutions linéaires homogènes, A et B, sont échangeables (AB = BA), elles se ramènent à leur forme canonique par une même transformation linéaire. Ce résultat peut s'appliquer à l'étude des intégrales d'une équation linéaire homogène dont les coefficients sont fonctions rationnelles d'un point (x, y) d'une surface de Riemann de genre *un;* si l'on suppose, en effet, que les intégrales sont uniformes sur cette surface de Riemann rendue simplement connexe, la nature des intégrales ne dépend que des substitutions linéaires A et B relatives aux coupures introduites, et ces substitutions sont échangeables. L'auteur obtient ainsi des formules élégantes qui redonnent les résultats connus sur les équations différentielles linéaires de Picard.

Timerding (*H.-E.*), à Strasbourg. — Sur une famille de sphères. (188-195).

Étude géométrique des propriétés des systèmes de cercles et de faisceaux de cercles situés dans un même plan et définis de la manière suivante : Les divers faisceaux de cercles sont supposés rapportés projectivement les uns aux autres. Les familles de cercles sont constituées par les cercles orthogonaux aux cercles homologues de trois de ces faisceaux. Et les systèmes de faisceaux de cercles sont ceux dont trois faisceaux quelconques fournissent ainsi la même famille de cercles.

Une étude analogue est faite ensuite en considérant des cercles situés sur une même sphère; puis des sphères dans l'espace, au lieu de cercles.

Wallenberg (*Georg*), à Berlin. — Sur les équations différentielles d'ordre supérieur analogues à l'équation de Riccati. (196-199).

Ce sont celles qu'on obtient en faisant $z = \frac{1}{q}\frac{y'}{y}$ dans une équation linéaire homogène en y, d'ordre n. L'auteur en donne la forme générale pour $n = 3$ et $n = 4$.

Wallenberg (*Georg*), à Berlin. — Sur la théorie des invariants différentiels. (200-204).

Dans la Note précédente, l'auteur avait déjà remarqué les propriétés d'invariance de certaines fonctions des coefficients de l'équation linéaire donnée, qui gardent la même valeur quand on les forme avec certains des coefficients de la transformée. L'auteur généralise ici cette propriété pour n quelconque. Les invariants en question sont en réalité des invariants connus de l'équation linéaire d'ordre n.

Fuchs (*Richard*), à Berlin. — Sur les équations différentielles linéaires qui appartiennent, avec leur adjointe, à une même espèce. (205-209).

Si une équation linéaire homogène d'ordre $2n$ appartient, avec son adjointe, à une même espèce, sa $n^{\text{ième}}$ associée est réductible.

Wallenberg (*Georg*), à Berlin. — Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est une fraction du premier degré des constantes arbitraires. (210-217).

L'auteur détermine la forme générale des équations dont l'intégrale générale est

$$y = \frac{c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3}{c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3}.$$

Ce problème avait été traité par M. Vessiot (*Annales de Toulouse*, t. IX.F).

Grünfeld (*E.*), à Nikolsburg. — Sur les équations différentielles du $n^{\text{ième}}$ ordre adjointes et associées à une équation linéaire d'ordre n. (218-229).

Soit D le déterminant formé avec n intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation linéaire d'ordre n et leurs dérivées. L'*adjointe de la* $k^{\text{ième}}$ *ligne* a pour intégrales $u_{(k)i} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial y_i^{(k-1)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et l'*associée de la* $k^{\text{ième}}$ *ligne* aura pour intégrales $\eta_{(k)i} = \frac{\partial D}{\partial y_i^{(k-1)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. L'auteur étend à ces équations des identités et formules symboliques données par Frobenius pour l'adjointe de Lagrange. Il donne aussi pour les associées des résultats analogues à ceux qu'il avait obtenus précédemment (même recueil, t. 117, p. 274) pour les diverses adjointes.

Meder (*Alfred*), à Riga. — Sur la théorie des points singuliers d'une courbe gauche. (230-244).

Dans l'étude des points singuliers, si l'on veut éviter que les dérivées d'ordre supérieur de l'arc soient discontinues, il suffit d'admettre que l'élément linéaire puisse changer de signe en ces points. La même circonstance se présente pour l'angle de contingence, l'angle de torsion et le rayon de courbure. Cette hypothèse est avantageuse pour l'emploi des formules de Frenet.

Après ces remarques, l'auteur étudie les points singuliers à l'infini et les singularités de la surface polaire.

Pirondini (*Geminiano*), à Parme. — Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique. (245-264).

Les lignes considérées sont : une hélice cylindrique L, la ligne de striction de la surface gauche des normales principales L_0, le lieu des centres de courbure L_1 et le lieu des centres des sphères osculatrices L_2. L'auteur donne un grand nombre de théorèmes curieux et nouveaux sur les relations qui lient ces diverses lignes. Par exemple :

L_0 *divise les rayons de courbure de* L *dans un rapport constant.*

Si L_0 *ou* L_1 *est une hélice, les quatre courbes considérées sont quatre hélices cylindro-coniques.*

Quand l'hélice L *est tracée sur un cylindre dont la section droite est un*

cercle, une spirale logarithmique, une développante de cercle, une cycloïde, une épicycloïde, une hypocloïde, L_2 *est une hélice tracée sur un cylindre de la même nature.*

Hamburger (*M.*), à Berlin. — Sur les solutions singulières des équations différentielles algébriques d'ordre supérieur. (265-299).

Soit $F = 0$ l'équation donnée d'ordre n, algébrique en $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, et Δ son discriminant par rapport à $y^{(n)}$. Si $y^{(n-1)} - \eta$ est un diviseur de Δ, η étant fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$, le développement de ce diviseur suivant les puissances de $(x - x_0)$ permet de reconnaître si $y^{(n-1)} = \eta$ constitue une intégrale première de $F = 0$, particulière, ou singulière, ou si elle n'en est pas une intégrale première. L'auteur donne aussi l'interprétation géométrique de l'équation $y^{(n-1)} - \eta = 0$.

Dans le n° II, on trouve une représentation de n intégrales premières indépendantes sous la forme $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \text{const.}$, où φ est développé suivant les puissances de $y^{(n-1)} - \eta$, et il est montré comment l'exposant du terme de degré moindre dans ce développement permet de distinguer de nouveau les trois cas indiqués (relativement à la nature de $y^{(n-1)} = \eta$).

Dans le n° III est démontrée l'existence de n intégrales premières de la forme $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0$, où Φ est algébrique et de degré m en C, m étant le degré de F par rapport à $y^{(n)}$. On considère alors le discriminant D de $\Phi = 0$, pris par rapport à C, et ses diviseurs $y^{(n-1)} - \eta_1$. Pour que $y^{(n-1)} = \eta_1$ soit une intégrale singulière de $F = 0$, il faut que le développement de C suivant les puissances de $y^{(n-1)} - \eta_1$ présente les mêmes particularités que devait présenter le développement de φ, considéré au n° II, pour que $y^{(n-1)} = \eta$ fût une intégrale singulière.

Il en résulte que $\Delta = 0$ et $D = 0$ ont les solutions singulières comme racines communes. Mais, tandis qu'il faut une condition pour que les racines de $\Delta = 0$ fournissent des intégrales premières de $F = 0$, il faut au contraire au moins une condition pour qu'aucune racine de $D = 0$ ne fournisse d'intégrale première de $F = 0$.

Kötter (*Fritz*), à Berlin. — Relation remarquable entre la statique des surfaces flexibles et inextensibles et la théorie du mouvement d'un corps dans un fluide. (300-309).

Le mouvement d'un corps solide dans un liquide s'exprime par des fonctions thêta de deux arguments dans le cas où l'on a (Clebsch)

$$2T = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + \left(\frac{l}{b_1} + m\right)x_1^2 + \left(\frac{l}{b_2} + m\right)x_2^2 + \left(\frac{l}{b_3} + m\right)x_3^2.$$

La représentation du mouvement de rotation est alors équivalente à la représentation du roulement d'un plan sur la figure conique qui réalise l'équilibre de la membrane flexible et inextensible qui se développerait suivant un secteur limité par la conique

$$\frac{1}{\rho^2} = \lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi \qquad \left(\frac{\lambda}{\mu} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}\right).$$

2me Partie -

Dans ce roulement, les trois axes principaux du corps correspondent aux deux axes de la conique et à la normale au cône fixe. Dans le problème d'hydrodynamique, les deux arguments des fonctions thêta sont fonctions linéaires du temps. Il en sera de même dans le roulement considéré, si on lui impose la condition que la projection horizontale de la portion de la génératrice de contact contenue dans la membrane considérée obéisse à la loi des aires.

Appell (*Paul*), à Saint-Germain-en-Laye. — Sur une forme générale des équations de la Dynamique. (310-319).

Imaginons un système assujetti à des liaisons telles que, pour obtenir le déplacement virtuel le plus général compatible avec les liaisons à l'instant t, il suffise de faire subir à n paramètres $q_1 q_2 \ldots q_n$ des variations arbitraires. On mettra la somme des travaux virtuels des forces appliquées au système sous la forme $\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$. Si l'on forme d'autre part la fonction $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$, où la sommation doit s'étendre aux accélérations J et aux masses m de tous les points du système, la forme annoncée pour les équations du mouvement sera

$$\frac{\partial S}{\partial q_i''} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut rattacher ce résultat au principe de la moindre contrainte de Gauss. Il équivaut à dire que les valeurs des accélérations à chaque instant rendent minimum la fonction $R = S - \Sigma Q_i q_i''$ ou encore la fonction (*comparer* MAYER, *Leipz. Berichte,* 3 juillet 1899 et HERTZ, *Œuvres,* t. III, p. 224)

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m}\left[(mx'' - X)^2 + (my'' - Y)^2 + (mz'' - Z)^2\right].$$

L'auteur traite les applications suivantes : équations d'Euler, corps de révolution suspendu par un point de son axe, cerceau.

Kœnigsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Sur la forme des développements des fonctions algébriques et l'irréductibilité des équations algébriques. (320-359).

Dans un précédent travail (même recueil, t. 115), l'auteur a montré comment on peut déduire des critères d'irréductibilité pour les équations algébriques de l'étude de formes particulières de développement des fonctions algébriques dans le domaine d'un point critique. Le problème auquel conduisait ce principe est ici complètement résolu, ce qui permettra de nouvelles applications.

Ce problème préliminaire est le suivant :

Trouver la forme générale des équations algébriques définissant des fonctions algébriques qui ont des points critiques donnés, dont chacun fournisse un nombre de cycles donné, de manière que l'ordre de la fonction algébrique soit égal à un nombre donné, pour chacun de ces cycles.

Le mode de ramification de la fonction algébrique considérée étant ainsi donné à l'avance, on peut toujours le choisir, d'une infinité de manières, de sorte que l'équation algébrique ainsi formée (en x et y) soit irréductible :

Dans un type d'équation irréductible (en x et y) ainsi obtenu, remplaçons les fonctions rationnelles de x par des nombres rationnels, les facteurs linéaires $(x - \alpha)$, qui y figurent et correspondent aux points critiques α, par des nombres premiers et la condition que certaines fonctions de x ne doivent pas s'annuler pour $x = \alpha$ par la condition que les nombres rationnels remplaçant ces fonctions ne doivent pas être divisibles par le nombre premier qui remplace le binome $(x - \alpha)$, et nous obtiendrons un type d'équations algébriques en y, à coefficients rationnels, et irréductibles dans le domaine rationnel naturel.

Nous ne pouvons citer les énoncés intéressants auquel l'auteur arrive par cette méthode et qui comprennent, comme cas particuliers, les théorèmes concernant l'irréductibilité des équations aux racines primitives de l'unité.

En terminant, l'auteur explique par quelques exemples comment la même méthode peut être utilisée pour prévoir la réductibilité de certaines classes d'équations algébriques par l'adjonction de nombres algébriques donnés.

Tome 122; 1900.

Thomé (L.-W.), à Greifswald. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques (avec un aperçu sur l'ensemble des travaux publiés dans ce Recueil par l'auteur sur les équations différentielles linéaires). (1-29).

N° 1. — L'équation différentielle linéaire considérée est de la forme

$$F_m(y, s, x) = 0,$$

y étant la fonction inconnue, le coefficient de $y^{(m)}$ étant l'unité, et les autres coefficients étant rationnels par rapport à la variable indépendante x et à une fonction algébrique s de x. A cette équation l'auteur associe, comme dans ses précédents Mémoires, une équation linéaire à coefficients rationnels en x :

$$\Phi_N(y, x) = 0$$

(*Connex-differentialgleichung*), admettant comme intégrales celles de la proposée, pour les diverses branches de s. Il étend d'abord aux expressions F_m les notions d'*expressions différentielles normales* et de systèmes de telles expressions, qu'il avait introduites autrefois (même Recueil, t. 96) pour les expressions Φ_N; et généralise les théorèmes relatifs à ces expressions.

Il démontre ensuite que les expressions associées F_m et Φ_N sont liées de la manière suivante : Si Φ_N peut se représenter au moyen d'un système d'expressions différentielles normales, F_m peut aussi se représenter au moyen d'un système d'expressions différentielles normales (dans le domaine de rationalité $[s, x]$); et réciproquement.

Dans son Mémoire du tome 121 du même Journal, l'auteur a montré comment l'intégration de $F_m = 0$ pouvait se déduire de celle de $\Phi_N = 0$, dans le cas qui vient d'être énoncé. En vertu du théorème précédent, on voit qu'on pourra étudier directement l'équation donnée $F_m = 0$, avant d'appliquer cette méthode d'intégration.

N° 2. — Étude des équations dont dépendent des combinaisons linéaires homogènes de y et de ses dérivées, y étant intégrale de l'équation donnée $F_m = 0$. Cette étude est faite toujours au point de vue de la possibilité de représenter par des systèmes d'expressions différentielles normales la proposée et les transformées en question.

N° 3. — L'auteur résume la méthode de représentation des intégrales d'une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques dont ses divers Mémoires parus dans le même Recueil (t. 96, 100, 104, 108, 112, 115, 117, 119, 121, 122) contiennent le développement et les applications à la théorie des fonctions algébriques.

Müller (E.), à Königsberg. — Un théorème sur les surfaces du second ordre et ses rapports avec la géométrie des cercles dans le plan (30-33).

Un tétraèdre étant inscrit dans une quadrique, si l'on projette les pôles de ses faces sur la surface, en prenant pour point de vue un point de la quadrique situé dans la quatrième face du tétraèdre, les trois points obtenus sont dans un même plan avec le sommet du tétraèdre commun aux trois faces considérées.

On en déduit un théorème analogue en considérant deux tétraèdres inscrits, doublement inscrits l'un à l'autre.

La méthode de projection stéréographique permet de déduire de ces théorèmes des énoncés sur des figures planes formées de cercles.

Guldberg (Alf.), à Christiana. — Sur la théorie des équations aux différentielles totales complètement intégrables (34-38).

Recherche des conditions d'intégrabilité pour les équations de la forme

$$\omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

et

$$\omega(x, y, z, dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz) = 0.$$

L'auteur indique la marche à suivre et traite complètement deux exemples simples.

Heffter (Lothar), à Bonn. — Sur les équations différentielles linéaires réductibles (39-42).

Démonstration de ce fait qu'il y a des équations différentielles linéaires qui sont irréductibles dans le domaine d'un point, sans que la fonction déterminante correspondante soit une constante.

Grünfeld (*E.*), à Nikolsburg. — Sur la théorie des équations différentielles adjointes à une équation différentielle linéaire d'ordre n (43-52).

L'auteur indique un nouveau mode de calcul des diverses adjointes et du déterminant formé avec les intégrales de l'une quelconque d'entre elles et leurs dérivées. Il montre ensuite que, si la proposée est réductible, chacune des adjointes l'est aussi, et réciproquement. Il examine plus spécialement le cas où la proposée admet toutes les intégrales d'une équation de même nature, dont l'ordre est inférieur d'une unité.

Une *rectification*, relative à certaines formules de ce travail, se trouve page 88 du même volume.

Lœwy (*Alfred*), à Fribourg-en-Br. — Sur les faisceaux de formes quadratiques réelles et de formes d'Hermite (53-72).

F. Klein et Alf. Lœwy ont montré (*Math. Annalen,* t. XXIII et LII) que le théorème de Weierstrass :

Si le discriminant d'un faisceau de formes quadratiques réelles a un diviseur élémentaire complexe ou multiple, le faisceau ne contient pas de forme définie,

n'est que la première et la plus simple d'une suite de propositions découlant toutes d'un même théorème fondamental.

Le but de l'auteur est de montrer qu'il en est de même relativement au théorème de Gundelfinger (troisième édition des *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* de Hesse), qui est la généralisation de celui de Weierstrass, faite au point de vue des formes semi-définies. Nous énoncerons seulement le théorème fondamental nouveau de M. Lœwy, d'où découlent tous les autres. M. Lœwy appelle *caractéristique* d'une forme réelle quadratique décomposée en carrés réels indépendants le nombre minimum de carrés de même signe qu'elle contient. Cette définition admise, soit φ une forme quadratique réelle à discriminant non nul, et ψ une forme quadratique réelle quelconque, ayant q pour caractéristique; et considérons les diviseurs élémentaires du discriminant du faisceau $\rho\varphi - \psi$. Soit $2s$ la somme des exposants de tous les diviseurs élémentaires correspondant à des valeurs imaginaires de ρ; h l'un quelconque des exposants des diviseurs élémentaires correspondant aux valeurs réelles non nulles de ρ; et h' l'un quelconque des exposants des diviseurs élémentaires correspondant à $\rho = 0$. Le théorème énoncé réside dans l'inégalité

$$q \geq s + \sum \mathrm{E}\left(\frac{h}{2}\right) + \sum \mathrm{E}\left(\frac{h'-1}{2}\right),$$

où E est le symbole de la partie entière d'un nombre.

L'auteur montre aussi que ce théorème et ses conséquences s'étendent aux formes bilinéaires d'Hermite $\sum\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, dans lesquelles $a_{\alpha\beta}$ et $a_{\beta\alpha}$ sont des imaginaires conjuguées.

Horn (*J.*), à Charlottenburg. — Sur la nature des intégrales d'une

équation différentielle linéaire du premier ordre dans le voisinage d'un point d'indétermination (continuation du travail publié dans le tome 120, pages 1-26) (73-83).

Dans la première partie de son travail, l'auteur a montré que l'équation

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = (1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)y + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

possède, si a_k n'est pas un nombre entier, une intégrale uniforme dans le domaine de l'origine : $y = \mathrm{P}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_\lambda x^\lambda$, qui admet, dans les diverses parties de ce domaine, des représentations asymptotiques différentes :

$$\mathrm{P}(x) \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots - \mathrm{A}_m e^{g\left(\frac{1}{x}\right)} . x^{-a_k},$$

$$\left[g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{k x^k} + \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \right],$$

où $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ est la série qui satisfait formellement à l'équation, et les A_m certaines constantes bien définies.

L'auteur donne maintenant les formules qui fournissent les coefficients p_λ de $\mathrm{P}(x)$ en fonction de $c_0, c_1, c_2, \ldots, \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{k-1}$. Il traite aussi le cas où a_k est un nombre entier, et où l'intégrale est alors

$$y = \mathrm{P}(x) + \mathrm{B} e^{g\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k} \log x.$$

Enfin, dans un dernier paragraphe, il complète l'étude de la fonction $\mathrm{P}(x)$ au point de vue de la théorie des fonctions transcendantes entières; et donne des représentations asymptotiques des racines de l'équation $\mathrm{P}(x) = c_0 - c$.

Muth (*P.*), à Osthofen. — Sur les diviseurs élémentaires des systèmes composés (d'après une lettre de M. K. Hensel) (84-87).

Il s'agit de combler une lacune dans la démonstration donnée par Hensel (même Recueil, t. 114, p. 109) pour le théorème fondamental sur les diviseurs élémentaires des systèmes composés. L'auteur reprend à cet effet, suivant les indications de Hensel lui-même, la démonstration de ce fait que tout diviseur élémentaire du système $\left\{\begin{matrix} 0, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ 0, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{matrix}\right\}$ est un multiple du diviseur élémentaire correspondant du système $\left\{\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{matrix}\right\}$. Les a_{ik} peuvent appartenir à un *corps* de nombres ou de fonctions absolument quelconque.

Muth (*P.*), à Osthofen. — Sur les formes alternées (89-96).

Les formes considérées sont des formes bilinéaires dont le déterminant est un déterminant symétrique gauche. L'auteur leur applique la méthode de réduction de Kronecker (même Recueil, t. 107, p. 135-136), consistant dans une succession de combinaisons simples effectuées sur les lignes ou les colonnes du système (A) de leurs coefficients. Il arrive à cet énoncé général, qui contient comme cas particuliers divers théorèmes de Frobenius et Kronecker :

Les diviseurs élémentaires de (A) *se présentent toujours par couples, quand les éléments de* (A) *sont des quantités entières ou rationnelles appartenant à un corps quelconque de nombres ou de fonctions.*

Gomes Teixeira (*F.*), à Porto (Portugal). — Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée (97-123).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la couronne comprise entre une courbe extérieure fermée simple S et une courbe intérieure s de même nature, $\Theta(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de S et n'y possédant qu'un seul zéro; si, pour tout point x de cette couronne, on a $|\Theta(x)|<|\Theta(z)|$, quand z décrit S, et $|\Theta(x)|>|\Theta(z)|$, quand z décrit s, on obtiendra un développement de $f(x)$ dans la couronne, de la forme

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\Theta^n(x).$$

Dans le cas où $\Theta(x)=\dfrac{x-a}{x-b}$, l'auteur en conclut un théorème qui contient le théorème d'Appell sur la représentation d'une fonction dans une aire limitée par des arcs de cercle (*Acta Mathematica*, t. I). Il donne aussi une méthode pour former des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites et ne pouvant pas être continuées à l'extérieur de cette aire.

D'autres applications sont faites en prenant $\Theta(x)=\sin x$, ce qui permet à l'auteur de généraliser les résultats donnés par lui dans le même Recueil, t. 116, p. 14, et en prenant $\Theta(x)=e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$, ce qui donne une démonstration nouvelle de la formule de Fourier pour le cas des fonctions périodiques de variables complexes, et une extension de cette formule applicable dans le cas où la fonction considérée n'est pas périodique.

Hermes (*O.*), à Steglitz. — Les formes des polyèdres (avec deux planches. (124-154).

Suite du Mémoire commencé dans un précédent Volume du même Journal. L'auteur énonce la série des résultats qui se déduisent de ceux qu'il avait obtenus par la méthode des polaires réciproques. Il examine ensuite spécialement les polyèdres qui ont autant de faces que de sommets, en les classant en *autopolaires* et *parapolaires* (non autopolaires). Le cas des octaèdres est étudié en détail; les octaèdres autopolaires avaient été trouvés déjà par Kirkman. Dans les derniers paragraphes sont indiquées diverses classes de

polyèdres autopolaires et parapolaires obtenues par un procédé de composition de ces polyèdres avec des polyèdres simples.

Wallenberg (*Georg*), à Charlottenburg. — Sur la théorie des équations différentielles algébriques du premier ordre (suite). (155-163).

Continuation de l'étude des équations linéaires homogènes du second ordre qui ont une intégrale algébrique du premier ordre, commencée au tome 116 (p. 1-9) du même Recueil. Il restait à examiner le cas où cette intégrale est de la forme

$$(y'-\rho_1 y)^{p_1}(y'-\rho_2 y)^{p_2}\dots(y'-\rho_n y)^{p_n}=\alpha,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_n, α étant fonctions algébriques de la variable indépendante. L'auteur montre d'abord que si $n>2$ l'équation linéaire du second ordre considérée s'intègre encore algébriquement. Si $n=2$, cela n'est plus en général; mais l'auteur trouve explicitement les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit encore algébrique dans ce cas.

Heymann (*W.*), à Chemnitz. — Sur les équations différentielles et les équations aux différences, qui peuvent s'intégrer au moyen de la série hypergéométrique de Gauss. (164-171).

Si l'on différentie h fois de suite l'équation linéaire de la série hypergéométrique, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}&x(1-x)y^{(h+2)}\\&\quad+[(1-2x)h+\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y^{(h+1)}-(\alpha+h)(\beta+h)y^{(h)}=0,\end{aligned}$$

que l'on peut considérer comme une équation aux différences, en y regardant h comme une variable, x, α, β, γ comme des paramètres, et $y^{(h)}$, $y^{(h+1)}$, $y^{(h+2)}$ comme les valeurs d'une même fonction, pour les valeurs h, $h+1$, $h+2$ de la variable. Les différentiations correspondantes, effectuées sur les séries qui satisfont à l'équation linéaire hypergéométrique, donnent des solutions de cette équation aux différences.

On peut de plus considérer cette équation aux différences comme une *forme normale*, à laquelle on ramènera, par des changements de variables, les équations

$$\begin{aligned}A z^{h+2}+(B+Ch)z^{h+1}+(D+Eh+Fh^2)z^{h}&=0,\\(A+Bh)z^{h+2}+(C+Dh)z^{h+1}+(E+Fh)z^{h}&=0,\end{aligned}$$

en imitant ainsi ce qu'on fait pour l'équation différentielle hypergéométrique elle-même. On peut aussi lui rattacher des équations aux différences non linéaires, dont un exemple est fourni par la théorie des fractions continues.

Timerding (*H.-E.*), à Strasbourg. — Sur la réduction d'une fonction quadratique. (172-178).

Réduction d'une fonction du second degré à n variables, non homogène, analogue à celle que l'on effectue en géométrie analytique, pour $n = 2$ et $n = 3$, dans la théorie des coniques et des quadriques.

Nanson, à Melbourne. — Sur certains théorèmes de la théorie des déterminants. (179-185).

L'auteur indique comment certains théorèmes donnés par Netto dans le tome 114 de ce Journal résultent d'un mode général de transformation des propriétés des déterminants, donné par Muir en 1881 (*Trans. R. S. Edin.*, t. XXX, p. 1-4). Il passe en revue, comme application de la méthode de Muir, divers théorèmes connus de la théorie des déterminants (Cauchy, Sylvester, Franke, etc.).

Dingeldey (*F.*), à Darmstadt. — Sur le discriminant d'une certaine équation quadratique et les conditions qui caractérisent l'équation d'un cercle en coordonnées projectives quelconques. (186-197).

L'auteur détermine les conditions qui caractérisent l'équation d'un cercle en coordonnées trilinéaires. Les fonctions qui y interviennent se mettent ensuite en évidence dans diverses transformations de l'équation quadratique dont dépend la recherche des axes d'une conique en coordonnées trilinéaires. L'auteur réussit ainsi à ramener le premier membre de cette équation à la somme de deux carrés; et obtient une nouvelle solution de ce même problème pour l'équation qui donne les axes d'une section plane d'une quadrique.

Sterba (*Josef*), à Vienne. — Sur une équation de Jacobi. (198-204).

L'auteur démontre la formule à quatre arguments α, β, γ, δ

$$\sum \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)$$
$$+k^2\sum \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)=0,$$

qui contient comme cas particulier une formule de Jacobi à trois arguments. Il en déduit diverses autres formules de la théorie des fonctions elliptiques.

Appell (*P.*), à Saint-Germain-en-Laye. — Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de Gauss. (205-208).

Ne pourrait-il pas exister des équations du mouvement, plus générales que celles de Lagrange (c'est-à-dire applicables alors même que les liaisons ne peuvent pas s'exprimer toutes par des équations finies), et n'exigeant pour être écrites que la connaissance de la force vive T et de la fonction des forces U?

L'auteur montre que de telles équations n'existent pas, en indiquant deux systèmes différents, dans lesquels les fonctions T et U sont les mêmes, sans que les équations des mouvements de ces deux systèmes soient les mêmes.

Timerding (*H.-E.*), à Strasbourg. — Sur les groupements des tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre. (209-226).

Exposition systématique des nombreux théorèmes sur les diverses manières de grouper les bitangentes d'une quartique plane, deux à deux, trois à trois, etc., qui sont dus à Steiner, Hesse, Aronhold, et, plus récemment, à de Paolis et Ciani. Suivant une vue de Frobenius, l'auteur distingue ces groupements en *syzygétiques* et *azygétiques*. L'idée qui lui sert de guide est, au fond, la correspondance entre ces configurations et celles qu'on obtient en coupant une surface de Kummer et ses plans doubles par un plan; ce qui a été le point de départ des travaux de Ciani. Mais il emploie aussi dans son exposition une notation des bitangentes, qui les fait correspondre aux droites qui joignent huit points d'un plan (Hesse, Cayley).

Busche (*E.*), à Bergedorf. — Sur une représentation réelle des figures imaginaires d'un plan réel et quelques-unes de ses applications à la théorie des nombres. (227-262).

Considérons dans l'espace un trièdre de coordonnées $o\xi\eta\zeta$; et définissons une droite quelconque par les points (ξ_1, o, ζ_1) et (o, η_2, ζ_2) où elle perce deux des plans coordonnés. Posons

$$X = -\frac{1 + i\zeta_1}{\xi_1}; \qquad Y = -\frac{1 + i\zeta_2}{\eta_2};$$

et appelons cette droite la droite $X|Y$. Un point imaginaire $(a_1 + ia_2, b_1 + ib_2)$ du plan $o\xi\eta$ est alors représenté par la congruence linéaire, à directrices imaginaires, des droites $X|Y$ définies par la relation

$$aX + bY + 1 = 0, \qquad (a = a_1 + ia_2,\ b = b_1 + ib_2).$$

Si le rapport $a|b$ est réel, cette congruence se décompose, et l'on dira que le point est un point *atrope* (et *hétérotrope* dans le cas général).

L'auteur étudie, dans le système ainsi défini, la géométrie du point et de la droite; indique la représentation des coniques; et définit les principales notions métriques. Il montre les rapports de sa théorie avec les théories analogues de von Staudt et de Lie.

L'auteur se sert de cette représentation pour établir diverses propositions relatives à la théorie des nombres entiers complexes. Nous nous bornerons à citer la suivante : « Le nombre des diviseurs de tous les nombres, dont la valeur absolue ne dépasse pas n, est

$$T = 2\sum \left[\frac{n}{y}\right] - [\sqrt{n}]^2,$$

où y prend toutes les valeurs entières non nulles, dont la valeur absolue est au

plus égale à $\left[\sqrt{n}\right]$ ». Dans cet énoncé le symbole $[\gamma]$ désigne, d'après Gauss, le nombre des entiers positifs dont la valeur absolue ne surpasse pas $[\gamma]$.

Sturm (*Rudolf*), à Breslau. — Sur le mode de génération des quadriques, dû à Jacobi. (263-264).

L'auteur étudie la correspondance entre les points P et P′ de deux espaces, définie par les relations

$$AP = A'P', \qquad BP = B'P', \qquad CP = C'P',$$

où A, B, C sont trois points quelconques du premier espace; et A′, B′, C′ trois points quelconques du second. A une droite correspond une conique. De là résulte le théorème de Jacobi : *à un plan correspond une quadrique.*

Hancock (*Harris*), à Cincinnati (Ohio). — Sur la réduction des systèmes de modules de Kronecker, quand leurs éléments sont des fonctions de deux ou de trois variables. (265-298).

Dans le même Journal (t. 119, p. 148) l'auteur a donné les formes canoniques pour les systèmes de modules dont les éléments sont des fonctions entières d'une seule variable. Le cas d'un nombre quelconque de variables peut s'y ramener en remplaçant ces diverses variables par des puissances, convenablement choisies, d'une variable auxiliaire. L'auteur traite néanmoins, directement, un certain nombre de cas particuliers pouvant intéresser la Géométrie analytique ou la Mécanique; en cherchant à mettre en évidence la généralité du mode de réduction employé. Bornons-nous à indiquer, par exemple, que tout système de la forme

$$[p^3;\ g(x);\ p^2 f_1(x,y),\ p^2 f_2(x,y),\ \ldots;\ p\ h_1(x,y), p\ h_2(x,y),\ \ldots;\ k_1(x,y),\ k_2(x,y),\ \ldots]$$

peut se réduire à la forme

$$[p^3,\ g(x),\ p^2 F(x,y),\ p H(x,y),\ K(x,y)].$$

Schafheitlin (*Paul*), à Berlin. — Les zéros des fonctions de Bessel. (299-321).

N° 1. — Le premier zéro de J_n est compris entre

$$\sqrt{n(n+2)} \quad \text{et} \quad \sqrt{2(n+1)(n+3)};$$

le premier zéro de $\frac{dJ_n}{dx}$ est compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $\sqrt{2n(n+1)}$; le premier zéro de $\frac{d^2J_n}{dx^2}$ est compris entre $\sqrt{n(n-1)}$ et $\sqrt{(n+1)(n-1)}$.

N° 2. — Les résultats relatifs aux autres zéros sont beaucoup moins simples. Citons seulement le suivant : si $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, les zéros de J_n sont com-

pris dans les intervalles $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$ à $\left(k - \frac{3}{2}\right)\pi$, ou $k\pi$ à $\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi$, suivant que n est pair ou impair. Un résultat analogue a lieu pour la fonction de seconde espèce Y_n.

N° 3. — Les résultats du numéro précédent supposent $n > 4$. L'auteur établit des résultats du même genre pour $n = 1, 2, 3, 4$.

N° 4. — L'auteur précise la position de la plus petite racine de Y_n. Il montre en particulier qu'elle est supérieure à $n + \frac{1}{2}$.

Hamburger (*M.*), à Berlin. — Sur les solutions singulières d'un système d'équations différentielles du premier ordre, algébriques, à n fonctions inconnues. (322-354).

L'étude des solutions singulières est faite d'après la méthode employée par l'auteur pour une seule équation d'ordre n (même Recueil, t. 121, p. 265). L'auteur part d'abord du système différentiel, puis des intégrales complètes, et constate la concordance des résultats. La méthode est toujours une généralisation de la méthode de Fuchs, qui repose sur la décomposition en ses facteurs linéaires du discriminant d'une équation différentielle du premier ordre. Elle donne, par la considération des premiers termes de certains développements en série, des procédés précis pour reconnaître dans chaque cas si l'on a bien affaire à une intégrale du système donné, et si cette intégrale est particulière ou singulière. Plusieurs exemples sont traités complètement, comme application de la méthode.

Tome 123; 1901.

Zimmermann (*O.*), à Zoppot. — Nouvelle démonstration des formules de Plücker, suivie de plusieurs méthodes pour déterminer directement les tangentes doubles des courbes algébriques d'ordre quelconque. (1-32 et 175-209).

Les raisonnements de l'auteur reposent sur le *principe de correspondance* (nombre des coïncidences) de de Jonquières. L'auteur commence par le redémontrer en se servant de ce qu'il appelle la *courbe de correspondance*. Cette courbe s'obtient en projetant sur deux droites différentes les deux faisceaux en correspondance, et en joignant les points homologues des deux divisions obtenues : l'enveloppe des droites ainsi définies est la courbe de correspondance, et sa classe donne le nombre des coïncidences.

Les diverses formules de Plücker s'obtiennent alors en considérant diverses correspondances fournies par une courbe donnée quelconque, et dont les coïncidences correspondent respectivement aux points de contact des tangentes issues d'un point, aux points d'inflexions, aux tangentes doubles.

La seconde partie du Mémoire contient la détermination de l'ordre de la

courbe de correspondance relative à une correspondance; cette nouvelle donnée permet d'approfondir la nature de la correspondance et de perfectionner les résultats obtenus précédemment. L'auteur s'en sert principalement pour la recherche des tangentes doubles d'une courbe quelconque. Il donne cinq solutions de ce problème : la méthode employée consiste encore à introduire des correspondances convenablement choisies et à évaluer de deux manières différentes l'ordre de la courbe de correspondance.

Grünfeld (*E.*), à Vienne. — Sur quelques expressions différentielles bilinéaires qui se présentent dans la Théorie des équations différentielles linéaires. (33-41).

Soient $P(y) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n,

$$Q_1(u) = 0$$

l'adjointe de la première ligne, $R(y') = 0$ l'équation dont dépendent les dérivées des intégrales de la proposée. On suppose que les coefficients des dérivées d'ordre supérieur dans ces trois équations sont égaux à l'unité. On a alors l'identité, analogue à celle que fournit l'adjointe de Lagrange,

$$u R(y') + (-1)^{n-1} y' Q_1(u) = p_n \frac{d}{dx} R(y', u),$$

où p_n est le coefficient de y dans $P(y)$ et où $R(y', u)$ est une expression différentielle bilinéaire. On a aussi une identité de forme analogue entre $R(y')$ et l'expression $R_1(u')$; l'équation $R_1(u') = 0$ étant celle dont dépendent les dérivées des intégrales de $Q_1(u) = 0$.

Jahnke (*Eugen*), à Berlin. — Sur un groupe de points relatif à des triangles triplement homologiques. (42-47).

Les trois centres d'homologie forment un nouveau triangle triplement homologique à chacun des deux triangles donnés et les centres d'homologie correspondants sont les sommets de l'autre triangle. On a ainsi une configuration *desmique*. Il y a lieu d'étudier, comme le fait l'auteur, les *points de Desargues* et les *points de Véronèse* relatifs à ces homologies : ils sont trois à trois sur vingt-sept droites remarquables. L'auteur donne aussi une généralisation du théorème de Véronèse sur les triangles homologiques.

Jahnke (*Eugen*), à Berlin. — Construction de certains points dans la géométrie du triangle. (48-53).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; ... les coordonnées barycentriques d'un nombre quelconque de points. L'auteur donne une méthode pour construire de proche en proche les points dont les coordonnées barycentriques sont de la forme générale $\alpha_i^\nu \beta_i^\rho \ldots$, $\alpha_k^\nu \beta_k^\rho \ldots$, $\alpha_l^\nu \beta_l^\rho \ldots$. Il donne également deux théorèmes sur les positions respectives des points auxiliaires qui s'introduisent dans cette construction.

Fuchs (*Richard*), à Berlin. — Sur les équations différentielles linéaires homogènes qui appartiennent, avec leurs adjointes, à la même espèce. (54-65).

Soient y l'intégrale générale de l'équation linéaire d'ordre n considérée, et z l'intégrale générale de son adjointe. Dire qu'elles appartiennent à la même espèce, c'est supposer une identité de la forme

$$z = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + A_m \frac{d^m y}{dx^m}. \tag{1}$$

La condition pour qu'il en soit ainsi est, d'après l'auteur, qu'un certain système auxiliaire d'équations différentielles linéaires ait une solution rationnelle. La forme de ce système montre que les cas $n - m$ pair, et $n - m$ impair, sont entièrement différents. Si n est impair et $n - m$ pair, la proposée est réductible. Le cas $m = n - 2$ donne des résultats intéressants. L'auteur montre enfin que l'existence de l'identité (1) est entièrement liée à l'existence de relations quadratiques homogènes, à coefficients constants, entre les intégrales de la proposée.

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques (Mémoire achevant le cycle des recherches publiées par l'auteur sur les équations différentielles linéaires dans ce Recueil). (66-137).

Pour trouver de nouveaux cas d'intégrabilité des équations considérées, l'auteur généralise dans ce Mémoire la notion d'*expression différentielle normale*. On opère ici dans le domaine de rationalité défini par une fonction algébrique s de la variable indépendante x. Une *expression différentielle normale généralisée* est alors, par définition, de la forme

$$e^{w} f(e^{-w} y, s, x) \quad \left(w = \int g(s, x)\, dx\right), \tag{1}$$

où $f(y, s, x)$ est une expression différentielle linéaire par rapport à y et ses dérivées, dont les coefficients dépendent de s et x et qui est *régulière dans le domaine* s. De plus $g(s, x)$ est une fonction rationnelle de ses arguments, qui satisfait à certaines conditions, grâce auxquelles une expression différentielle normale ne pourra se mettre sous la forme (1) que d'une seule manière. Quant à la forme de $f(y, s, x)$, elle est aussi discutée par l'auteur : la somme des racines de toutes les *équations aux exposants*, relatives aux points singuliers, est un nombre entier que l'on saura déterminer.

On peut alors examiner si une expression linéaire donnée $F(y, s, x)$, à coefficients rationnels en s et x, peut se représenter par un *système d'expressions différentielles normales généralisées*, et effectuer, dans ce cas, la décomposition de F en ces divers facteurs symboliques. Alors la détermination des intégrales de $F = 0$, dans le domaine des points singuliers, s'obtient, *sans avoir à discuter les questions de convergence*, au moyen de systèmes d'intégrales élémentaires normales, ce qui est le but essentiel de tous les Mémoires de l'auteur.

L'application de la méthode est faite à un type général d'équations linéaires du second ordre à coefficients rationnels en x, qui deviennent réductibles par l'adjonction de la racine carrée d'un polynome entier en x.

Schlesinger (*Ludwig*), à Klausenburg. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires, rattachée au problème de Riemann. (138-173).

L'auteur reproduit d'abord, sous une forme plus synthétique, la démonstration qu'il a donnée précédemment (*Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. II, p. 382 et suivantes) du théorème d'existence suivant :

Il existe toujours n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *de* x, *ayant le caractère de fonctions rationnelles dans tout le plan à l'exception de* $(\sigma+1)$ *points* a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{\sigma+1}$, *arbitrairement donnés, indéterminées en ces points, et dont les valeurs aux deux bords des coupures* $(a_k, a_{\sigma+1})$ *sont liées respectivement par des substitutions linéaires arbitrairement données* A_k $(k = 1, 2, \ldots, \sigma)$. *Il est supposé toutefois que ces substitutions ont des modules égaux à l'unité, et que les équations fondamentales qui correspondent à ces substitutions, ainsi qu'à* $A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_\sigma^{-1}$, *n'ont que des racines de modules égaux à l'unité.*

L'ensemble de ces systèmes de fonctions (pour des a_k et des A_k donnés) forme une *espèce*, qui comprend diverses *classes :* les systèmes d'une même classe ont les mêmes pôles. Les systèmes formant la *classe principale* sont ceux dont les fonctions sont partout finies, en dehors des points a_k. Ce sont ces systèmes que Riemann avait en vue dans deux fragments posthumes (*Œuvres de Riemann*, p. 379-390; édition Weber-Dedekind).

Les équations linéaires correspondantes appartiennent à la classe d'équations dite *de Fuchs;* le groupe de monodromie est indépendant des paramètres arbitraires, et les équations fondamentales déterminantes n'ont que des racines réelles.

Notice nécrologique sur Charles Hermite (1822-1901), par L. Fuchs. (174).

Saalschütz, à Königsberg. — Équations entre les premiers termes de certaines suites de différences; application à des sommations et à la représentation des nombres de Bernoulli. (210-240).

Soient a_1^{2m}, a_2^{2m}, a_3^{2m}, ... les premiers termes des suites des différences premières, secondes, troisièmes, etc. de la série 0, 1^{2m}, 2^{2m}, 3^{2m}, ... L'auteur établit d'abord des formules de récurrence entre ces quantités, et en déduit la *formule fondamentale*

$$a_1^{2m} - a_2^{2m} x + a_3^{2m} x^2 \mp \ldots - a_{2m}^{2m} x^{2m-1}$$
$$= (1 - 2x)[1 - C_1^m y + C_2^m y^2 \mp \ldots + (-1)^{m-1} C_{m-1}^m y^{m-1}]$$
$$[y = x(1-x)],$$

où les constantes C_k^m sont données par des formules de récurrence et par des formules directes. Cette formule se généralise en substituant à la série o, 1^{2m}, 2^{2m}, ... celles dont le terme général est une fonction paire de l'indice. Ces formules, en faisant croître indéfiniment le degré des séries considérées, et au moyen de certaines intégrations, conduisent à la sommation de diverses séries trigonométriques, à l'expression des nombres de Bernoulli connue sous le nom de *Théorème de von Staudt et Clausen*, et à d'autres formules de récurrence entre les nombres de Bernoulli.

Jung (*Heinrich*), à Rinteln a. d. Weser. — Sur la plus petite sphère contenant une figure de l'espace. (241-257).

1. Étant donné μ points dans l'espace à n dimensions, l'auteur détermine la plus petite sphère à $n-1$ dimensions telle qu'aucun de ces μ points ne lui soit extérieur.

2. La plus petite sphère qui puisse renfermer tout système de points dont les distances mutuelles sont au plus égales à *un* a pour rayon $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ (dans l'espace à n dimensions).

Loewy (*Alfred*), à Fribourg-en-Brisgau. — Sur la généralisation d'un théorème de Weierstrass. (258-262).

Dans la forme réduite d'une forme bilinéaire d'Hermite figurent un certain nombre de termes affectés du signe + et un certain nombre de termes affectés du signe —. La *caractéristique* de la forme est le plus petit de ces deux nombres. Cela posé, on a le théorème général suivant, où P, Q désignent deux formes bilinéaires quelconques; P′, Q′ les formes conjugués; et $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$ celles qu'on en déduit en y remplaçant les coefficients par les quantités imaginaires conjuguées :

Si le déterminant de P *n'est pas nul; s'il en est de même pour l'une des deux formes d'Hermite* $P+\overline{P'}$ *ou* $\frac{P-\overline{P'}}{i}$, *et si q est sa caractéristique*; *si de plus on a l'identité* $Q\overline{P'}+P\overline{Q'}=0$; *et si enfin le déterminant de* P + Q *n'est pas nul; alors les diviseurs élémentaires du déterminant du faisceau* $\mu P+iQ$ *satisfont à l'inégalité*

$$q \geq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right),$$

$2s$ étant la somme des exposants de ceux de ces diviseurs élémentaires qui s'annulent pour des valeurs imaginaires de μ, h étant l'un quelconque des exposants des autres diviseurs élémentaires, et $E\left(\frac{h}{2}\right)$ *désignant le plus grand entier contenu dans* $\frac{h}{2}$. *Il en résulte que, si l'une des formes* $P+\overline{P'}$ *ou* $\frac{P-\overline{P'}}{i}$ *est définie, il n'y a que des diviseurs élémentaires réels, affectés de l'exposant* 1.

Pirondini (*Geminiano*), à Parme. — Sur les cylindres et les cônes passant par une ligne. (263-275).

L'auteur considère une courbe tracée sur deux cylindres et donne une série de formules permettant de représenter, simultanément, cette ligne, les sections droites des cylindres et les transformées de ces courbes lorsqu'on développe l'un ou l'autre des deux cylindres. Il donne des formules de la même nature pour une courbe tracée sur deux cônes, ou sur un cylindre et un cône.

Il en déduit un grand nombre de propositions intéressantes, parmi lesquelles nous citerons les deux suivantes, pour leur caractère de généralité :

Une ligne plane quelconque L, *et les lignes qu'on en déduit en développant sur un plan les divers cylindres passant par* L *et dont les génératrices sont parallèles à un plan fixe, sont les méridiennes d'une suite de surfaces de révolution applicables les unes sur les autres.*

Deux lignes planes données arbitrairement peuvent, dans tout cas, et d'une seule manière, être réduites à une même ligne de l'espace, soit en pliant leurs plans en cylindres, suivant deux directions données, soit en pliant le plan de l'une en cylindre, suivant une direction donnée, et le plan de l'autre en cône dont le sommet soit un point donné du plan; soit en pliant leurs plans en cônes, les sommets étant des points donnés des deux plans.

Landau (*Edmund*), à Berlin. — Sur la théorie de la fonction gamma. (276-283).

Il s'agit de la question suivante : jusqu'à quel point les formules de récurrence connues pour la fonction Γ permettent-elles de réduire l'intervalle total dans lequel on doit la supposer définie pour pouvoir calculer sa valeur pour toute valeur réelle de l'argument? L'auteur en donne la solution par le théorème suivant :

Le nombre positif δ *étant arbitrairement choisi, on peut déterminer un nombre fini d'intervalles, d'étendue totale inférieure à* δ, *de telle manière que la valeur de la fonction* Γ, *pour un argument réel quelconque, se calcule par un nombre fini d'opérations algébriques au moyen des valeurs de la fonction pour un nombre fini d'arguments convenablement choisis, appartenant à ces intervalles.*

Timerding (*H.-E.*), à Strasbourg. — Sur une courbe gauche du cinquième ordre. (284-311).

Il s'agit des courbes gauches, tracées sur des quadriques, et coupant en trois points chaque génératrice rectiligne d'un des systèmes et en deux points chaque génératrice rectiligne de l'autre système. Une telle courbe peut être considérée comme le lieu des sommets des cônes du second degré passant par les deux coniques suivant lesquelles un faisceau de quadriques est coupé par deux plans fixes. On peut lui faire correspondre, point par point, une courbe plane du quatrième ordre, à point double.

L'auteur l'étudie au moyen du théorème d'Abel; il considère diverses espèces

de groupes de points sur la courbe. Il introduit les fonctions hyperelliptiques correspondantes, et détermine les relations entre les caractéristiques des 16 fonctions thêta et les droites joignant les points fixes par lesquels passent les coniques qui interviennent dans la génération de la courbe.

Il étudie aussi les projections de la courbe gauche et termine par une théorie algébrique des courbes planes du cinquième degré à quatre points doubles.

Hermes (*O.*), à Steglitz. — Les formes des polyèdres (avec une planche. (312-342).

Suite des Mémoires publiés dans le même Recueil, sous le même titre (le précédent Tome 122). Le travail actuel est consacré aux polyèdres à neuf sommets. Les procédés de construction sont les mêmes que dans le Mémoire précédent (composition polaire, avec des polyèdres simples, et procédé de Kirkman). L'auteur indique d'abord le procédé de classification qu'il emploiera. Il donne ensuite des Tableaux de formules pour les 51 polyèdres autopolaires; et pour les surfaces parapolaires (121 couples). Il termine par un nouveau procédé de classification, qui donne un aperçu plus rapide d'une partie des polyèdres trouvés antérieurement (1 tétraèdre, 2 pentaèdres, 7 hexaèdres, 34 heptaèdres, 257 octaèdres).

Hamburger (*M.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (343-346).

Les relations connues entre les intégrales d'une équation linéaire et celles de l'adjointe sont établies en partant des intégrales premières de l'équation linéaire donnée. En écrivant que la proposée est une conséquence de l'une quelconque de ces intégrales premières, on obtient immédiatement des relations de la forme

$$\frac{d}{dx}[z_{1k}y + z_{2k}y' + \ldots + z_{nk}y^{(n-1)}] = z_{nk}(y^{(n)} - p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y),$$

d'où l'on conclut facilement les résultats cherchés.

Tome 124; 1902.

Farkas (*Julius*), à Kolosvár (Klausenburg). — Théorie des inéquations simples. (1-27).

Ce travail est l'exposition systématique de résultats publiés déjà par l'auteur (*Berichte aus Ungarn*, 1895, 1898, 1899; *Archives néerlandaises*, 2e série, t. IV). L'auteur considère d'abord un système d'équations et d'inéquations de la forme $\Theta_i \geq 0$, les Θ_i étant des formes linéaires par rapport aux inconnues. Le principe fondamental de leur théorie est que toute inéquation de même forme $\mathfrak{S} \geq 0$, qui en est une conséquence, est telle que $\mathfrak{S} \equiv \Sigma\lambda_i\Theta_i$, les λ_i qui correspondent à des équations ($\Theta_i = 0$) du système étant quelconques et les autres n'étant pas négatifs. Ce principe permet à l'auteur de donner une méthode

pour exprimer la solution la plus générale du système donné au moyen de paramètres et pour discuter la possibilité du système. La question de l'élimination de certaines des inconnues est traitée aussi, ainsi qu'une autre application.

L'auteur considère aussi des systèmes comprenant des inégalités de la forme

$$A_0\xi + A_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + A_3\frac{\partial\xi}{\partial z} + B_0\eta + \ldots \geqq 0,$$

à vérifier par les fonctions inconnues ξ, η, ... à l'intérieur d'un champ T; en même temps que d'autres inégalités de la forme

$$L\xi + M\eta + \ldots \geqq 0$$

doivent être vérifiées sur la surface S qui limite T. Et il cherche à exprimer que toutes les solutions de ce système d'inégalités satisfont à l'inéquation-intégrale

$$\int_T\left(X_0\xi + X_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + X_2\frac{\partial\xi}{\partial y} + X_3\frac{\partial\xi}{\partial z} + Y_0\eta + \ldots\right)d\tau \geqq 0.$$

Il montre que la condition est qu'il existe des multiplicateurs non négatifs φ et ψ, donnant, à l'intérieur de T,

$$X_0 - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_3}{\partial z} = \sum A_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\sum A_1\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\sum A_2\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\sum A_3\varphi.$$

$$Y_0 - \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_3}{\partial z} = \sum B_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\sum B_1\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\sum B_2\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\sum B_3\varphi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, sur la surface S,

$$X_1\alpha + X_2\beta + X_3\gamma = -\sum L\psi + \alpha\sum A_1\varphi + \beta\sum A_2\varphi + \gamma\sum A_3\varphi,$$

$$Y_1\alpha + Y_2\beta + Y_3\gamma = -\sum M\psi + \alpha\sum B_1\varphi + \beta\sum B_2\varphi + \gamma\sum B_3\varphi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où α, β γ sont les cosinus directeurs de la normale à S, dirigée vers l'intérieur de T.

Le but de ces recherches est de faciliter l'application du principe général des vitesses virtuelles, qui introduit des systèmes d'équations et d'inéquations de la forme considérée.

Hamburger (*M.*). — Sur la transformation des intégrales dont le champ d'intégration est fermé. (28-37).

L'auteur établit la formule

$$\int(X\,dx + Y\,dy) = \int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)d\mathrm{T},$$

par une voie entièrement analytique, en partant de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}\right)=-\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

et en l'intégrant deux fois, avec des données initiales convenablement choisies. Il établit par un procédé analogue la formule de Stokes. On pourrait généraliser pour n variables indépendantes.

De même, l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial w}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)},$$

où

$$U=\sum X\frac{D(y, z)}{D(v, w)}, \qquad V=\sum X\frac{D(y, z)}{D(w, u)}, \qquad W=\sum X\frac{D(y, z)}{D(u, v)},$$

conduit à la transformation connue de l'intégrale triple

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau$$

en intégrale de surface. La même identité peut servir à transformer l'expression $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ dans un changement de variables quelconque.

Schlesinger (*Ludwig*), à Klausenburg. — Sur le *Pentagramma mirificum* de Gauss. (38-46).

Il s'agit d'un pentagone sphérique dont toutes les diagonales sont égales à un quadrant. L'auteur le suppose placé plus généralement sur une surface à courbure constante positive et introduit les coordonnées homogènes de Beltrami. Il donne la forme, très simple, des équations qui définissent, au moyen de ces coordonnées, un glissement quelconque de la surface sur elle-même et une symétrie effectuée sur la surface. Revenant au pentagone en question, il montre qu'en interprétant les coordonnées de Beltrami comme des coordonnées rectangulaires dans un plan, il devient un polygone de Poncelet à cinq côtés. L'auteur retrouve enfin les formules de Gauss, qui rattachent la question à la division par 5, dans la théorie des fonctions elliptiques.

Schlesinger (*Ludwig*), à Klausenburg. — Sur un théorème général de la théorie des équations différentielles linéaires. (47-58).

Étant donnée une équation linéaire (A), à coefficients rationnels, *pour laquelle les équations fondamentales relatives aux points critiques n'ont que des racines de module égal à un*, il existe toujours, en vertu des résultats sur le problème de Riemann donnés par l'auteur dans un récent Mémoire (même Recueil, t. 123, p. 138-173), une équation linéaire (B), à coefficients rationnels, appartenant à la classe de Fuchs, cogrédiente à la première. C'est-à-dire que, si y est l'intégrale générale de (A) et z celle de (B), il existe une relation $y=r_0 z+r_1 z'+\ldots+r_{n-1}z^{(n-1)}$, à coefficients uniformes.

On obtient un résultat analogue, mais sans la restriction soulignée, en se servant de la théorie des groupes de transformations des équations linéaires. Par l'adjonction au domaine de rationalité, d'une fonction uniforme, l'équation (A) se comportera comme une équation de la classe de Fuchs, car son groupe de transformations deviendra le plus petit groupe linéaire continu algébrique qui contienne son groupe de monodromie.

Gundelfinger (*S.*), à Darmstadt. — Trois lettres d'Aronhold à Hesse. (59-79).

Ces trois lettres, datées des 1er octobre 1849, 18 décembre 1849, 7 février 1850, se rapportent aux recherches d'Aronhold sur la forme cubique ternaire. Elles ont été retrouvées dans les papiers de Hesse. Elles montrent que si la Géométrie a été, par l'influence de Hesse, Möbius, Plücker, l'origine des travaux d'Aronhold, ce sont les idées de Eisenstein et de Cayley qui l'ont conduit, dans l'espace de 7 mois, aux équations différentielles fondamentales de la théorie des invariants. Ces lettres sont donc particulièrement intéressantes au point de vue du développement des conceptions d'Aronhold.

Gundelfinger (*S.*), à Darmstadt. — Brouillon d'une lettre de Hesse à Aronhold. (80-82).

Daté du 27 décembre 1849. Contient une démonstration de l'impossibilité d'une identité linéaire homogène entre une forme ternaire de degré supérieur à 3, son hessien et le hessien du hessien.

Gundelfinger (*S.*), à Darmstadt. — Sur l'origine probable des théorèmes d'Aronhold sur l'invariant S et une nouvelle exposition de la théorie des formes ternaires cubiques. (83-86).

L'auteur introduit la forme cubique ternaire f, son hessien Δ et le hessien bordé (*Zwischenform*) θ. Les relations entre les coordonnées de deux pôles conjugués par rapport à la cubique $f = 0$ fournissent des relations entre les coefficients de θ. Six combinaisons bilinéaires de ces coefficients sont égales et leur valeur commune sera l'invariant S ; trente autres sont nulles. La formation polaire permet de déduire de ces identités de nouvelles relations fondamentales. L'opération δ d'Aronhold en fournit d'autres et introduit l'invariant T et les nouvelles formes mixtes η et K. On a ainsi tous les éléments nécessaires pour construire la théorie complète de la forme f, sans calcul symbolique, comme l'auteur le montrera dans un prochain travail.

Gundelfinger (*S.*), à Darmstadt. — Sur le calcul des logarithmes de Gauss pour de petites valeurs de B et les valeurs correspondantes de A. (87-92).

Il s'agit de la résolution de l'équation

$$10^{B} = 1 + 10^{A}.$$

L'auteur prend la solution sous la forme suivante, où $M = \log e$,

$$B = \text{num} \log(A + \log M) - k.$$

Il donne des Tables numériques pour le calcul de k avec 7, 8, 9 et 10 décimales. Il fait une application au calcul de $\log \frac{1}{2} \varpi$, où $\frac{\varpi}{2}$ est le quadrant de la lemniscate. La méthode employée a été indiquée dans un Ouvrage de Gundelfinger et Nell (*Tables pour le calcul des logarithmes à neuf décimales*).

Fischer (*Victor*), à Stuttgart. — Une application de la théorie des quaternions aux équations de la Thermodynamique. (93-101).

Représentons les modifications dans l'état d'un gaz parfait par un diagramme plan, en prenant pour coordonnées rectangulaires la pression et le volume spécifiques. On a, pour la différentielle de la quantité de chaleur Q, la formule de Thermodynamique

$$dQ = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1} dv + \frac{v}{\varkappa - 1} dp.$$

L'auteur considère alors le vecteur

$$g = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1} i + \frac{v}{\varkappa - 1} j,$$

où i, j, k sont les vecteurs unités de la théorie des quaternions. L'application des formules de Stokes et de Gauss, sous la forme que leur donne cette théorie, donne la quantité de chaleur sous forme d'intégrale curviligne et montre que les lignes de direction du vecteur g sont les trajectoires orthogonales des adiabatiques.

L'interprétation d'un diagramme plan, rapporté à la température et à l'entropie, peut se faire d'une manière analogue.

Hoyer, à Burg. — Sur la définition et l'étude des groupes transitifs. (102-114).

Imaginons des opérations quelconques $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$. Soit e l'un quelconque des éléments auxquels on les applique; nous désignons par e_α l'élément qui en résulte par l'opération T_α, $e_{\alpha\beta}$ celui qui résulte de e_α par l'opération T_β et ainsi de suite. Si ces opérations définissent un groupe fini, on aura un système de relations de la forme $e_{\alpha\beta\ldots\lambda} = e_{\alpha'\beta'\ldots\rho'}$; et, si le groupe est transitif, l'on pourra écrire un nombre de relations de cette forme suffisant pour le définir entièrement. Ce seront les *équations de définition du groupe*. Par exemple, le groupe symétrique de $\nu + 1$ éléments a pour équations de définition

$$e_{\alpha\alpha} = e \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu), \qquad e_{\alpha\beta} = e_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \nu;\ \alpha \neq \beta).$$

L'auteur cherche les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de telles relations définisse effectivement un groupe. Il trouve que, pour ν opérations, devant donner naissance à un groupe à n éléments, le nombre minimum

des équations de définition est $\nu n - n + 1$. Il trouve aussi la condition pour que le groupe soit fini. Il étudie la détermination des divers modes d'imprimitivité d'un groupe donné par ses équations de définition. Enfin, il examine le cas où les équations de définition se réduisent aux relations entre les substitutions d'un groupe fini, considérées par Walther Dyck [*Gruppentheoretische Studien* (*Math. Ann.*, t. XX)].

Landau (*Edmund*). — Un théorème sur la décomposition des expressions différentielles linéaires homogènes en facteurs irréductibles. (115-120).

« Dans toutes les décompositions d'une expression différentielle linéaire homogène en facteurs irréductibles (symboliques) le nombre des facteurs est le même et les ordres des facteurs sont les mêmes, abstraction faite de la manière dont ces facteurs se trouvent rangés. »

Kühne (*H.*), à Dortmund. — Sur une relation réciproque entre des fonctions de plusieurs indéterminées, conduisant à des lois de réciprocité. (121-133).

Soit β le domaine des fonctions entières, à coefficients entiers, des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ et soit

$$P = [p, f_1(x_1), f_2(x_2; x_1), \ldots, f_n(x_n; x_1, \ldots, x_{n-1})]$$

un système de modules, pris dans β, et satisfaisant aux conditions suivantes : p est un nombre premier impair, $f_1(x_1)$ est irréductible $(\bmod p)$ et chacun des f_k contient l'indéterminée x_k correspondante et est irréductible

$$\bmod(p, f_1, \ldots f_{k-1}).$$

P est un *système de modules premier* et l'auteur en rappelle les propriétés fondamentales; entre autres, les généralisations des théorèmes de Fermat et de Wilson, relativement à ce module.

Soit alors x une nouvelle indéterminée, et soient f et g deux fonctions entières du domaine $[\beta, x]$, irréductibles $(\bmod p)$; soit μ le degré de f par rapport à x, ν celui de g; les coefficients de x^μ dans f et de x^ν dans g étant égaux à *un*. Soit encore m_k le degré de f_k par rapport à x_k et posons $q = p^{m_1 m_2 \cdots m_n}$. Cela fait, on définit deux fonctions F et G par les congruences

$$G \equiv g^{\frac{q^\mu - 1}{q - 1}} \quad (\bmod P, f), \qquad F \equiv f^{\frac{q^\nu - 1}{q - 1}} \quad (\bmod P, g).$$

Le théorème fondamental du Mémoire s'exprime par la congruence

$$G \equiv (-1)^{\mu\nu} F \quad (\bmod P),$$

qui exprime la réciprocité entre F et G.

Ce résultat permet de trouver les lois de réciprocité entre le *caractère* de g comme résidu de puissance $\tau^{\text{ième}}$ $(\bmod P, f)$ et le caractère analogue de

$f \pmod{P, g}$. Les cas qui fournissent des lois simples sont

$$q - 1 \equiv 0 \pmod{\tau}, \qquad \tau = 3, \qquad \tau = 4.$$

Grünfeld (*E.*), à Vienne. — Contributions à la théorie des équations adjointes à une équation différentielle linéaire d'ordre n. (134-142).

Relations entre les racines des équations fondamentales déterminantes de la proposée et de ses adjointes. Application à la fonction bilinéaire $P(y, z)$ de Lagrange. Expressions des intégrales des adjointes par des quadratures superposées. Si une intégrale de l'adjointe de Lagrange est connue, on en déduit une intégrale de chacune des autres adjointes et, par suite, une intégrale première de la proposée.

Lemke (*H.*), à Hambourg. — Sur l'équilibre des masses gazeuses cosmiques. (143-151).

Entre des corps solides fixes, en nombre fini et à distance finie, est répandu un gaz homogène, de température uniforme, obéissant à la loi de Mariotte et dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton. Il s'agit de déterminer la pression p du gaz en fonction des coordonnées x, y, z de manière que la masse gazeuse soit en équilibre. En posant $u = \log p$, l'auteur trouve pour u l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\lambda e^u = 0 \qquad (\lambda \text{ constante positive}).$$

Il discute si une solution de cette équation, fournissant pour p une fonction uniforme et continue dans tout l'espace et s'annulant à l'infini comme $\frac{1}{r^\alpha}$ (r rayon vecteur), satisfera bien au problème, c'est-à-dire si les autres inconnues, les composantes de la force, par exemple, auront des valeurs acceptables. Il trouve la condition $\alpha = 2$.

Pour ce qui est de l'intégration de l'équation (1), l'auteur montre que la détermination d'une certaine solution particulière dépend de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2\left(\frac{1 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) e^w = 0, \qquad \alpha = \frac{\xi\eta}{1 + \eta^2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{1 + \xi^2 - \eta^2}}{1 + \eta^2}.$$

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur les représentations asymptotiques des fonctions. (152-156).

L'auteur discute la véritable nature des représentations asymptotiques fournies par la série de Stirling, d'une part, et par les résultats de Poincaré sur les équations linéaires, d'autre part. Il conclut :

« Le premier genre de représentations asymptotiques (série de Stirling) est caractérisé par ce fait que la différence entre la fonction et sa représentation analytique tend vers zéro pour $x = +\infty$. Le deuxième genre de représentations asymptotiques (expressions de Poincaré) est caractérisé par ce fait que le quo-

tient de la fonction par sa représentation asymptotique tend vers *un* pour $x = +\infty$. »

Goebel (*J.-B.*), à Mayence. — Distribution électrique sur deux sphères conductrices. (157-164).

Solution nouvelle de ce problème (résolu par Poisson) au moyen de formules données par Kirchhoff. La densité électrique h sur l'une des sphères est donnée par la formule simple

$$4\pi ah - A = A\,\psi(\xi) - B\,\psi\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

où A et B sont les potentiels des deux sphères, a, b leurs rayons, c la distance des centres; où l'on a, de plus,

$$\xi = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}, \qquad \omega = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2ac},$$

et où la fonction ψ est définie par un développement en série de la forme

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{2n}}{\left(1 - \alpha_{2n}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

M_{2n} et α_{2n} étant certaines constantes et θ l'angle du rayon vecteur du point courant de la sphère avec la ligne des centres.

L'auteur applique ce résultat au cas particulier où les sphères se touchent.

Kokott (*P.*), à Sagan. — Recherches sur la transformation de Landen. (165-178).

L'aire d'un triangle de côtés a, b, c peut s'écrire

$$\Delta = i\,\frac{b^2 - c^2}{4}\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)},$$

en posant

$$y = \frac{a}{b - c} \qquad \text{et} \qquad k = \frac{b - c}{b + c}.$$

Si l'on suppose que les sommets A et B restent fixes et que b reste constant, on a un nouveau moyen pour rattacher la théorie des fonctions elliptiques à celle du cercle (le cercle de centre A et de rayon b). De ce point de vue, la transformation de Landen apparaît comme exprimant une représentation (*Abbildung*) de deux cercles l'un sur l'autre. L'auteur introduit ensuite le *cercle d'Apollonius* de la géométrie du triangle, ce qui donne une nouvelle signification à la transformation de Landen et rattache la représentation des fonctions elliptiques au moyen du cercle à celle que fournit le cercle d'Apollonius et à celle qu'a employée Halphen.

Fields (*J.-C.*), à Hamilton. — Le théorème de Riemann-Roch et

l'indépendance des conditions définissant les adjointes dans le cas d'une courbe dont les points multiples sont à tangentes distinctes. (179-201).

La méthode de l'auteur est une méthode algébrique. La fonction u de z est supposée définie par une équation algébrique $F(z, u) = 0$, telle que les points multiples soient à distance finie et à tangentes distinctes et que u ne devienne infinie pour aucune valeur finie de z; de plus, les points critiques sont à distance finie et distincts des points multiples.

Une fonction rationnelle du point analytique (z, u) est prise sous la forme

$$R(z, u) = \sum_{\lambda} R_{\lambda}\left(\frac{1}{z - a_{\lambda}}, u\right) + R_0(z, u),$$

où les R_i sont des polynomes entiers par rapport à leurs arguments. Et le principe de la méthode de l'auteur est la détermination d'une fonction R qui ne devienne infinie que pour $z = \infty$. La forme trouvée pour une telle fonction R est

$$(1) \qquad \sum_{l} \gamma_l \frac{F(a_l, u)}{(z - a_l)(u - b_l)} + R_0(z, u),$$

où (a_l, b_l) sont les coordonnées des divers points multiples et où γ_l est l'*opérateur*

$$\gamma_l = \sum_{s=0}^{\sigma_l - 2} \sum_{r=0}^{\sigma_l - s - 2} c_{r,s,l} \left(\frac{\partial}{\partial a_l}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_l}\right)^s$$

(σ_l étant l'ordre de multiplicité du point multiple correspondant). Cet opérateur dépend donc, sous forme linéaire et homogène, de $\frac{1}{2}\sigma_l(\sigma_l - 1)$ constantes arbitraires.

Si l'on exprime que cette fonction R est finie encore pour $z = \infty$, on trouve, d'abord, que R_0 doit se réduire à une constante; et l'on trouve en plus les conditions

$$(2) \qquad \sum_{l} \gamma_l a_l^i b_l^k = 0 \qquad (i + k = 0, 1, 2, \ldots, \overline{n - 3}),$$

la sommation étant étendue à tous les points multiples. Le fait que R doit alors se réduire à une constante prouve que ces conditions (2) entraînent l'évanouissement des $d = \sum_{l} \frac{1}{2}\sigma_l(\sigma_l - 1)$ constantes $e_{r,s,l}$. Il résulte alors de la forme des γ_l que les d équations de condition qui expriment qu'une courbe de degré $n - 3$ est une *adjointe* de la proposée sont aussi indépendantes. D'où la formule

$$p = \frac{1}{2} n(n - 1) - d$$

donnant le nombre des polynomes adjoints indépendants.

Si l'on cherche ensuite une fonction R ayant Q infinis simples donnés à distance finie, il n'y a qu'à ajouter ces infinis aux points (a_l, b_l) dans la formule (1), les opérateurs γ_l correspondants étant de simples constantes multiplicatives. La discussion qui exprime que R reste fini pour $z = \infty$ se fait maintenant sans peine et conduit au théorème de Riemann-Roch.

Königsberger (*Leo*), à Heidelberg. — Les principes de la Mécanique pour plusieurs variables indépendantes. (202-277).

Cette étude, qui est la généralisation des Mémoires sur les principes de la Mécanique publiés par l'auteur, pour la plupart, dans le même Recueil, est encore faite à un point de vue purement mathématique, sans égard aux applications possibles à la Physique.

Un premier paragraphe contient divers lemmes préliminaires, dont le plus important renferme la solution du problème suivant : On considère des fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_\mu$ des variables $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, des variables indépendantes t, u et des dérivées des p_i par rapport à ces variables indépendantes; à quelles conditions existe-t-il une fonction M de la même nature (et ne contenant que des dérivées premières), telle que l'on ait les identités

$$N_i = \frac{\partial M}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p_i^{(01)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

On dira que ce sont les conditions pour que les N_i aient un *potentiel cinétique* M. L'auteur indique qu'on pourrait introduire des dérivées d'ordre supérieur et considérer un nombre quelconque de variables indépendantes; mais il se borne, pour plus de clarté, à deux variables indépendantes et à n'introduire que des dérivées du premier et du second ordre par rapport à ces variables. Le potentiel cinétique considéré sera une fonction H de t, u, des variables $x_1, \ldots, x_n$ et des dérivées premières $x_i^{(10)} = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ et $x_i^{(01)} = \frac{\partial x_i}{\partial u}$. Les variations de $x_1, \ldots, x_n$ seront liées par des relations linéaires homogènes quelconques et l'on distinguera, d'après cela, comme dans la Mécanique classique, les systèmes *holonomes* et les systèmes *non holonomes*. Cela posé, il s'agit de déduire les diverses conséquences analytiques qui résulteront, pour les fonctions x_i de t et u, de l'hypothèse qu'elles satisfont au *principe d'Hamilton* généralisé

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\left(H - \sum_1^n X_i x_i\right) du\, dt = 0,$$

les X_i étant des fonctions données de t et u. On en déduit d'abord le *principe de d'Alembert*

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} - X_i\right)\delta x_i = 0,$$

qui conduit, en particulier, à considérer la mesure des forces extérieures, pour un système libre, comme de la forme

$$X_i = -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(01)}}.$$

Le principe de d'Alembert conduit immédiatement aux *équations de Lagrange* qui, pour les systèmes holonomes, prennent la forme simple

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s.$$

Pour un paramètre unique x, si l'on interprète (x, t, u) comme des coordonnées rectangulaires, le point correspondant se déplace sur une surface minima.

La généralisation du *principe de la force vive* présente plus de difficultés et n'est possible que si l'on particularise la fonction H. L'auteur traite encore de la généralisation du principe de *moindre action,* du *principe des aires* et du principe de la *conservation du mouvement du centre de gravité.*

Le système, qui généralise les *équations d'Hamilton,* est

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial q_s^{(10)}}, \qquad \frac{\partial p_s}{\partial u} = -\frac{\partial E}{\partial q_s^{(01)}}, \qquad \frac{\partial q_s^{(10)}}{\partial t} + \frac{\partial q_s^{(01)}}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial p_s}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Les deux derniers paragraphes concernent l'intégration des systèmes différentiels auxquels conduit la théorie. L'auteur étudie les équations du second ordre qui peuvent se ramener à la forme

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = 0.$$

Enfin il démontre le théorème général suivant :

Si H *ne dépend pas explicitement des variables indépendantes* $t_1, \ldots, t_\rho$, *mais seulement des fonctions inconnues* $p_1, \ldots, p_\mu$ *et de leurs dérivées et si les* P_s *sont des fonctions de* $p_1, \ldots, p_\mu$ *seulement, le système suivant, qui est la généralisation des équations de Lagrange,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_s} &- \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(010\ldots0)}} - \ldots - \frac{d}{dt_\rho}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(0\ldots1)}}\\ &+ \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(20\ldots0)}} + \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(110\ldots0)}} + \ldots + \frac{d^2}{dt_\rho^2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(0\ldots2)}}\\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt_\rho^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(0\ldots\nu)}} = P_s\end{aligned}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, \mu),$$

se ramène à un système analogue à une seule variable indépendante, en posant $t = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n$, $a, \ldots, a_n$ *étant des constantes arbitraires.*

Fuchs (*L.*). — Sur les limites entre lesquelles certaines intégrales définies gardent des signes donnés. (278-291).

L'intégrale considérée est de la forme

$$\int_0^x F(u, u', u'', \ldots, u^{(n)})\,dx.$$

où F est une forme quadratique de ses arguments, dont les coefficients sont des fonctions données, réelles et uniformes, de la variable réelle x; u est une fonction réelle indéterminée; u', u'', ... sont ses dérivées successives et l'on suppose u, u', u'', ... régulières dans le voisinage de $x = 0$. Il s'agit de déterminer un nombre b tel que l'intégrale conserve un signe constant pour

$$0 < x < b,$$

quelle que soit la fonction indéterminée u.

La solution est fondée sur la recherche d'une identité de la forme

$$F - p_{nn}[Q(u)]^2 = \frac{d}{dx}\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}),$$

où Q est une expression linéaire

$$Q(u) = u^{(n)} + q_1 u^{(n-1)} + \ldots + q_n u,$$

dont les coefficients sont des fonctions réelles de x et où φ est une nouvelle forme quadratique de ses arguments. L'auteur suppose F à coefficients constants et discute la nature des coefficients q_k et des coefficients A_{kl} de la fonction φ. Le résultat final est le suivant :

Soient α la plus petite valeur positive de x, pour laquelle un des q_k devienne infini et β la plus petite racine positive de l'équation

$$\text{dét.}\,|A_{kl}| = 0.$$

Le nombre b est le plus petit des deux nombres α et β et l'intégrale est positive pour $0 < x < b$, si le coefficient de $[u^{(n)}]^2$ dans F est positif.

Schlesinger (*Ludwig*), à Klausenburg. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires, rattachée au problème de Riemann (deuxième Mémoire). (292-319).

Dans le précédent Mémoire (même Recueil, t. 123) l'auteur a prouvé l'existence de systèmes de fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de x, admettant comme seuls points singuliers les points donnés $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ et se transformant, le long de coupures $a_1\infty, a_2\infty, \ldots, a_\sigma\infty$ par des substitutions linéaires données A_1, $A_2, \ldots, A_\sigma$. Ces substitutions sont seulement assujetties à certaines conditions, nécessaires pour la convergence des séries employées pour former les fonctions y_i. Pour déterminer entièrement le système de fonctions ainsi défini, il suffit de lui imposer la condition que son déterminant se réduise à l'unité pour une valeur x_0 de x donnée.

L'auteur étudie alors $y_1, \ldots, y_n$ comme fonctions des paramètres $a_1, \ldots, a_\sigma$. Le résultat remarquable est que, sous certaines conditions, elles se comportent, comme fonctions de l'un quelconque de ces paramètres, exactement comme elles se comportent comme fonctions de x. La méthode employée est la méthode de déformation continue des coupures. Le résultat précis est le suivant :

« On suppose que $A_1, \ldots, A_\sigma$ engendrent un groupe Θ irréductible et admettant des isomorphismes avec lui-même, relativement aux couples d'indices $(1, \lambda), \ldots, (\lambda-1, \lambda), (\lambda, \lambda+1), \ldots, (\lambda, \sigma)$ et que ces isomorphismes con-

servent les conditions de convergence auxquelles $A_1, \ldots, A_\sigma$ satisfont par hypothèse. Alors $y_1, \ldots, y_n$ satisfont, comme fonctions de x, à une équation linéaire d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x et a_λ, dont les points essentiellement singuliers sont $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$, et dont le groupe de monodromie Θ ne dépend pas de $a_1, \ldots, a_\sigma$; et elles satisfont, comme fonctions de a_λ, à une équation linéaire d'ordre n, dont les coefficients sont uniformes par rapport à x et a_λ, dont les points essentiellement singuliers sont $a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, x, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$ et dont le groupe Θ_λ est indépendant de $a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, x, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$. »

Il reste à prouver qu'il existe des groupes Θ satisfaisant aux conditions énoncées. L'équation linéaire, dite *de Tissot-Pochhammer,* en fournit effectivement un exemple.

Tome 125; 1903 ([1]).

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires au calcul des variations. (1-27).

Il s'agit de l'étude de la seconde variation d'une intégrale réelle de la forme

$$\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx.$$

L'auteur rappelle les résultats de Jacobi et de Hesse. L'application de la théorie des équations linéaires lui permet d'en déduire le résultat suivant :

« La fonction y obtenue au moyen de l'équation différentielle qui exprime que la première variation de l'intégrale, et satisfaisant aux conditions initiales données, est supposée une fonction analytique holomorphe dans une région du plan de la variable complexe x, à l'intérieur de laquelle se trouve le segment de l'axe réel compris entre $x = a$ et $x = b$; il en est de même, par hypothèse, pour les dérivées $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}}$. Enfin la condition de Jacobi, que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ ne s'annule pas sur le segment de l'axe réel considéré, est aussi supposée remplie. Cela posé, il existe toujours des familles de courbes infiniment voisines de la courbe trouvée y, telles que l'intégrale ait effectivement, soit un maximum, soit un minimum, pour cette courbe; et cela a lieu en général pour les courbes que l'on désigne généralement comme les courbes voisines de y. »

L'auteur étend ensuite ces résultats aux problèmes isométriques et étudie en détail plusieurs exemples.

([1]) A la mort de L. Fuchs (26 avril 1902), la rédaction du journal a été confiée à M. Kurt Hensel, avec la collaboration de MM. Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz.

Schlesinger (*L.*), à Klausenburg, et *Brodén* (*T.*), à Lund. — Remarques sur le problème de Riemann. (28-33).

1. *Lettre de M. Schlesinger à M. Broden.* — Le problème de Riemann, relatif aux équations linéaires, tel qu'il a été généralisé par M. Brodén, peut se ramener au problème restreint traité par M. Schlesinger (même journal, t. 123 et 124).

2. *Lettre de M. Brodén à M. Schlesinger.* — On peut aussi le rattacher au problème suivant :

« Un système d'équations différentielles linéaires homogènes *cogrédientes* (au sens de Schlesinger), qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques, et dont les coefficients sont uniformes, contient-il toujours des équations de la classe de Fuchs? »

Netto (*E.*), à Giessen. — Sur les valeurs approchées et les fractions continues. (34-63).

Ce travail se rattache à un précédent Mémoire de K. Th. Vahlen (même Journal, t. 115). L'auteur définit d'abord avec précision la *suite de Farey* de fractions que l'on peut former en partant des réduites du développement en fraction continue d'une fraction irréductible donnée. Il montre qu'on la retrouve quand on modifie la méthode de développement en fraction continue en prenant les quotients incomplets tantôt positivement, tantôt négativement, mais de manière à satisfaire à une certaine loi de formation. Le nombre de ces divers développements se trouve égal au numérateur de la fraction donnée; l'auteur trouve aussi le nombre de ceux qui contiennent un nombre de termes donné.

On peut aussi prendre une autre loi de formation des développements, dans laquelle le nombre des développements se trouve égal au dénominateur de la fraction. Enfin, dans un dernier paragraphe, l'auteur examine ce qu'il appelle les *développements avec retour,* dans lesquels la suite des opérations ramène une fraction déjà obtenue précédemment; et étudie le nombre de ces développements, qui peuvent encore se déduire de la même suite de Farey.

Landau (*Edmond*), à Berlin. — Sur la fonction zèta relative à un corps de nombres algébriques, et sur l'extension de la théorie des nombres premiers de Tschebyschef au problème de la distribution des idéaux premiers. (64-188).

Soit K un *corps* de nombres algébriques. Dedekind a introduit la fonction zèta correspondante, analogue à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et qui se définit par l'une quelconque des formules

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{|\operatorname{norm} \mathfrak{p}|^s} \tag{1}$$

(sommation étendue à tous les idéaux $\mathfrak{n}$ du corps);

$$(2)\qquad \zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{[\text{norm } \mathfrak{p}]^s}}$$

(produit étendu à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ du corps);

$$(3)\qquad \zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$$

($F(n) =$ nombre des idéaux du corps ayant n pour norme).

C'est l'étude des propriétés de cette fonction, et de leurs applications à la théorie des idéaux qui forme l'objet du Mémoire.

Le premier Chapitre contient la démonstration de deux propositions auxiliaires sur les séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, relatives à la convergence et au prolongement analytique de ces séries, sous certaines conditions imposées à $f(n)$. Dans le second Chapitre, l'auteur démontre que la fonction ζ_k, qui est convergente pour $R(s) > 1$, représente une fonction qui peut se prolonger au delà de la *droite de convergence* $R(s) = 1$, et qui n'a sur cette droite aucun zéro, et aucun infini autre que le pôle $s = 1$. Il détermine aussi un certain domaine situé à gauche de la droite de convergence, dans lequel ζ_k ne s'annule pas. Le résultat essentiel du troisième Chapitre est que le produit (2) est convergent pour toute valeur $s = 1 + ti$ ($t \neq 0$), et que sa valeur est égale à ζ_k. Pour y parvenir, l'auteur étudie certaines sommes étendues aux idéaux premiers du corps K; il étend ainsi à la théorie des nombres algébriques les méthodes introduites par Tschebyschef dans la théorie des nombres premiers naturels, en utilisant les résultats obtenus déjà, dans la même voie, par Poincaré. Dans le quatrième Chapitre, ces mêmes méthodes arithmétiques sont employées pour généraliser un théorème de Poincaré sur les limites entre lesquelles sont comprises, asymptotiquement, certaines fonctions arithmétiques relatives au corps des imaginaires de Gauss. Parmi les conséquences qui en résultent, sur la répartition des idéaux premiers, citons les suivantes :

Le quotient du nombre $\pi(x)$ des idéaux premiers dont la norme est au plus égale à x par le nombre $\frac{x}{\log x}$ tend vers 1, lorsque x devient infini, ou oscille entre deux nombres u et U, pour lesquels on a $u \leq 1 \leq U$.

Et :

Pour chaque corps algébrique K il existe un nombre b tel que, pour chaque valeur $x \geq 1$, il existe au moins un idéal premier dont la norme est comprise entre x et bx.

Dans le cinquième Chapitre il est question de la distribution des idéaux entiers, indépendamment des considérations précédentes sur les idéaux premiers. L'auteur se borne à traiter les problèmes analogues aux problèmes classiques traités par Dirichlet et Mertens pour le corps des nombres naturels

et le corps des imaginaires de Gauss. Les constantes qui interviennent dans les résultats s'expriment au moyen de valeurs particulières de la fonction ζ_k. Le sixième Chapitre contient une démonstration nouvelle de la célèbre *inégalité de Kronecker;* cette démonstration repose sur la considération de la fonction ζ_k d'un corps quadratique imaginaire K. Dans le septième et dernier Chapitre, l'auteur examine jusqu'à quel point divers théorèmes récents sur la distribution des nombres premiers naturels peuvent se déduire les uns des autres.

Kneser (*Adolf*), à Berlin. — De la stabilité de l'équilibre des fils pesants suspendus par leurs extrémités. (189-206).

La démonstration de Dirichlet, pour prouver qu'un maximum du potentiel donne toujours une position d'équilibre stable, ne s'applique en toute rigueur que si le système considéré dépend d'un nombre fini de paramètres. Sinon on se trouve en présence d'une difficulté analogue à celle qui se présente pour le *principe de Dirichlet;* on ne peut plus tirer en effet, immédiatement, de ce fait que la variation du potentiel, dans un certain domaine, est constamment positive, cette conséquence, nécessaire pour la démonstration en question, que cette variation est supérieure à un certain nombre positif. L'auteur montre comment, dans les cas du problème de la chaînette, on peut compléter la démonstration et prouver rigoureusement la stabilité de l'équilibre; la méthode, avec de légères modifications, pourra s'appliquer aux questions de stabilité analogues.

Stekloff (*W.*), à Charkow. — Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébicheff, et, en particulier, suivant le polynomes de Jacobi. (207-236).

Soit $p(x)$ une fonction arbitraire, positive dans un intervalle donné (a, b); et soient φ_n les polynomes de Tchébicheff correspondant à cette fonction p. On peut les définir, par exemple, comme l'on sait, par la condition

$$\int_a^b p\varphi_n \mathrm{P}_{n-1}\, dx = 0,$$

où P_{n-1} désigne un polynome arbitraire de degré $n-1$. On a d'abord le théorème général suivant :

Toute fonction f, continue dans l'intervalle (a, b), se développe suivant la série

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}_k \varphi_k, \qquad \mathrm{A}_k = \int_a^b p(x) f \varphi_k \, dx.$$

dans tout intervalle, intérieur à l'intervalle (a, b), et dans lequel cette série converge uniformément.

L'auteur suppose ensuite que l'on prend pour $p(x)$ la fonction

$$p = (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

et suppose, pour simplifier, $a = -1$, $b = +1$. Les polynomes φ_n sont alors les polynomes de Jacobi V_n, que l'on achève de déterminer par la condition

$$\int_{-1}^{+1} p V_n^2 \, dx = 1.$$

Il démontre que le développement considéré est valable à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, pourvu que f y soit continue et y admette des dérivées première et seconde. La série converge uniformément dans l'intervalle

$$(-1, +1)$$

si elle converge pour l'une des limites de l'intervalle. Elle converge uniformément si l'un des deux nombres α, s est inférieur à $\frac{1}{2}$. Si $\beta < \frac{1}{2}$, elle converge uniformément, sous la seule condition que f ait une dérivée du premier ordre.

Une lettre de Niels Henrik Abel à Edmond Jacob Kulp. (237-240).

Cette lettre inédite est datée de Paris, 1er novembre 1826. Elle ne contient que des explications complémentaires sur certains passages des Mémoires d'Abel.

Rothe (*Rudolf*), à Charlottenburg. — Sur la théorie des invariants différentiels. (241-266).

Recherche directe des invariants différentiels d'un système de m fonctions $x_1, \ldots, x_m$ de r variables indépendantes $u_1, \ldots, u_r$, relativement au changement de variables le plus général effectué sur $u_1, \ldots, u_r$. Applications à la Géométrie. Recherche de ceux de ces invariants qui sont en même temps des invariants pour le groupe des mouvements (effectué sur les x_i).

(Les résultats obtenus ne sont en général pas nouveaux, et l'auteur paraît ignorer la théorie générale de Lie sur les invariants différentiels des groupes infinis.)

Goebel (*J.-B.*), à Mayence. — Distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices (suite du Mémoire commencé même Journal, t. 124). (267-281).

L'auteur étudie la convergence des séries qui figurent dans l'expression de la densité électrique obtenue dans son premier Mémoire, en supposant le cas des sphères en contact. Il donne ensuite, dans le cas où les sphères sont égales, diverses transformations de ces séries, permettant d'effectuer le calcul numérique de la densité électrique; et construit des Tables donnant la densité, pour un certain nombre de valeurs particulières de l'angle θ (angle du rayon vecteur de l'une des sphères avec la ligne des centres). Il indique en terminant

de nouvelles séries, propres au calcul numérique, pour les points situés sur la ligne des centres.

Muth (P.), à Osthofen. — Sur les fonctions rationnelles de formes bilinéaires. (282-292).

Ce travail se rapporte à l'emploi du calcul symbolique des fonctions de formes linéaires, dont la théorie a été exposée par l'auteur dans son livre : *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Leipzig, 1899). Il démontre d'abord un principe général, dont Frobenius avait fait usage précédemment; il établit ensuite une forme canonique pour une fonction entière $f(\mathrm{A})$ de la forme bilinéaire A, A dépendant de $2n$ variables contragrédientes x_i et u_i et le déterminant caractéristique de $r\mathrm{E}-\mathrm{A}$ (où $\mathrm{E}=\Sigma u_i x_i$) étant de la forme $(r-c)^n$. Ces résultats fournissent la démonstration et la généralisation de deux théorèmes fondamentaux de la théorie des formes. Ils permettent aussi à l'auteur de résoudre le problème général suivant :

Déterminer les diviseurs élémentaires du déterminant caractéristique d'une fonction rationnelle d'une forme bilinéaire, connaissant les diviseurs élémentaires du déterminant caractéristique de cette forme.

Jung (Heinrich), à Marburg. — Démonstration arithmétique d'un théorème sur le degré du résultat de l'élimination d'une variable entre deux équations entières à deux variables. (293-298).

Il s'agit de trouver le degré de l'équation résolvante, quand les fonctions homogènes de degré maximum contenues dans les premiers membres des deux équations ont un diviseur commun de degré donné μ : le degré de la résolvante est au plus $mn-\mu$, m et n étant les degrés des deux équations données. L'auteur en donne deux démonstrations.

Frischauf (J.), à Graz. — Sur l'intégrale de l'équation différentielle $xy''+y'+xy=0$. (299-300).

Le mode de développement en série semi-convergente, donné par Lipschitz (même Journal, t. 56, p. 193) pour la fonction de Bessel J, peut s'appliquer aussi à une seconde intégrale particulière de l'équation considérée.

Teixeira (F. Gomes), à Porto (Portugal). — Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique. (301-318).

La fonction $f(x)$ considérée satisfait aux conditions

$$f(x+2\omega)=f(x),\qquad f(x+2\omega')=cf(x)$$

et a un seul pôle a dans un parallélogramme des périodes; ce pôle est simple, et le résidu est k. Par la méthode employée par l'auteur dans un précédent tra-

vail (même Recueil, t. 122, p. 97), il obtient la formule

$$f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\frac{c^{-\alpha}}{1-c} + \left(\frac{q^2}{c}\right)^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1-cq^{-2n}}\,e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \right.$$
$$\left. + (cq^2)^{\beta+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}}\,e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]$$
$$- \frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{\beta=m} c^{m}\left[1 + i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

où α et β sont des entiers positifs arbitraires. De cette formule générale l'auteur en déduit plusieurs autres, en particularisant les valeurs de α et β : certains des développements obtenus sont nouveaux, et ne sont valables que dans un demi-plan. L'auteur les applique à la fonction (Jacobi, Hermite)

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,(\Theta)\,(x+\nu)}{\mathrm{H}(\nu)\,\Theta(x)}.$$

Tome 126; 1903.

Jung (Heinrich), à Marburg. — Sur des fonctions thêta n'appartenant pas à la classe de Riemann. (1-51).

Ce travail se rattache à un Mémoire de Schottky (même Recueil, t. 106). On considère un corps algébrique K, de genre τ, défini par une équation $G(p, q) = 0$; on en déduit un nouveau $[K, z]$, par l'adjonction de la racine carrée z d'une fonction rationnelle $H(p, q)$; soit ρ le genre de ce nouveau corps, et $\sigma = \rho - \tau$. Parmi les intégrales de première espèce de $[K, z]$ figurent celles de K, et un système de σ intégrales, à 2σ périodes indépendantes seulement. Ces dernières donnent naissance à des fonctions thêta de σ variables, qui sont plus générales que celles qu'emploie Riemann pour son problème d'inversion. Schottky a étudié en détail le cas $\tau = 1$. L'auteur fait ici une étude analogue pour $\tau = 2$.

Dans les paragraphes 1 à 6, il introduit les fonctions ϑ des corps K et $[K, z]$ et les fonctions thêta à étudier, qui sont désignées par la lettre φ; il est commode aussi d'associer aux fonctions ϑ du corps K les fonctions ψ, de même nature, mais qui ont pour périodes différentes de *un* des périodes doubles de celles de ces fonctions ϑ. Les fonctions ϑ du corps $[K, z]$ s'expriment, par des relations bilinéaires, au moyen des fonctions φ et ψ; dans ces relations interviennent les caractéristiques de ces diverses fonctions qui doivent être convenablement associées.

L'objet essentiel du Mémoire est de trouver les valeurs des fonctions φ quand on y remplace leurs arguments par les intégrales de première espèce correspondantes. La solution est fondée sur la recherche des *fonctions-racines* (*Wurzelfunctionen*) du corps $[K, z]$. Cette recherche est faite dans les paragraphes 7 à 14. Il y a deux cas à distinguer, suivant qu'elles proviennent de différentielles

de première espèce de la forme

$$du = \frac{dv}{z}$$

ou de la forme

$$du = dw + \frac{dv}{z},$$

dv et dw étant des différentielles du corps K; elles s'expriment, dans le premier cas, au moyen des fonctions thêta du corps K; et, dans le second, au moyen des fonctions thêta elliptiques simplement. Les diverses fonctions obtenues peuvent se caractériser par des indices que l'on peut faire correspondre aux caractéristiques des fonctions thêta.

Les expressions cherchées pour les fonctions φ sont obtenues dans les autres paragraphes (15-18); elles sont entièrement explicites, sauf en ce qui concerne un certain facteur transcendant qui est le même pour toutes ces fonctions. Les fonctions φ se trouvent, dans ces formules, associées par groupes de quatre, et les formules sont différentes, suivant que les quatre fonctions considérées sont toutes les quatre paires, ou toutes les quatre impaires, ou deux paires et deux impaires.

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Sur la théorie des fonctions algébriques, dans ses rapports avec la théorie des équations différentielles linéaires. (52-70).

Dans sa théorie des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques (même Journal, t. 123, p. 75), l'auteur a fait usage d'une transformée rationnelle de la fonction algébrique qui figurait dans les coefficients de l'équation considérée. La propriété caractéristique de cette transformée est que son discriminant est le produit du *diviseur essentiel du discriminant* de la fonction algébrique donnée par le carré d'un polynome dont les facteurs linéaires sont tous distincts entre eux, et distincts de ceux du diviseur essentiel. L'existence d'une telle transformée a été établie par Kronecker dans son Mémoire : *Sur les discriminants des fonctions algébriques d'une variable* (même Recueil, t. 91). L'auteur donne une méthode pour la construire effectivement lorsqu'on suppose connus les développements de la fonction algébrique z donnée, pour les divers points de ramification.

Cette méthode est fondée sur le procédé donné par Weierstrass pour former des expressions, composées rationnellement avec z et la variable indépendante x, et dont les développements, pour les points de ramification de z, commencent par un certain nombre de termes donnés à l'avance [*voir*, sur ce point, le compte rendu de Brill et Nöther sur le développement de la théorie des fonctions algébriques (*Jahresberichte der deutschen mathematiker Vereinigung*, t. III, p. 376)].

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les valeurs de x qui annulent le discriminant de z, et $f_1(x, z), \ldots, f_k(x, z)$ les expressions correspondantes construites par le procédé de Weierstrass. La transformée considérée par l'auteur est de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x, z) \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{\alpha_i} + (C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots + C_n) \prod_{i=1}^{k} (x - a_i).$$

Il prouve qu'on peut disposer des constantes arbitraires figurant dans les $f_i(x, z)$, des entiers s_k et des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de manière qu'elle satisfasse à la propriété énoncée.

Thomé (*L.-W.*), à Greifswald. — Remarque sur la théorie des équations différentielles linéaires. (71-72).

L'auteur précise la différence entre les travaux de Fuchs et les siens sur cette théorie, et rappelle le but, la méthode et les résultats de ses propres recherches (représentation des intégrales dans le domaine d'un point singulier, où elles ne sont pas toutes régulières; emploi de la décomposition des expressions différentielles linéaires; caractère algébrique de la méthode, qui n'exige pas de considérations de convergence spéciales; application aux fonctions algébriques et au calcul des variations).

Hensel (*K.*). — Remarques sur la théorie des déterminants. (73-82).

Soit un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes, et soit $n \geqq m$. Soient D_i les déterminants de degré m qu'on en peut déduire, et E_i le tableau qu'on déduit du tableau donné en y remplaçant tous les éléments par zéro, à l'exception de ceux de la diagonale principale de D_i qu'on remplace par *un*. On a le théorème suivant :

Toute fonction $\theta(u_{gh})$ *des éléments du tableau, qui est linéaire et homogène par rapport aux éléments de la première ligne, et change de signe, en gardant la même valeur au signe près, par tout échange de deux lignes, est de la forme*

$$\theta(u_{gh}) = \sum_i D_i \theta(E_i).$$

De ce théorème l'auteur déduit le théorème sur la multiplication des matrices, et la règle de développement de Laplace. Il démontre enfin l'irréductibilité de la fonction θ.

Heffter (*Lothar*), à Bonn. — Sur la classification des formes quadratiques, et des courbes et des surfaces du second ordre et de seconde classe. (83-98).

L'auteur emploie, pour la classification des formes quadratiques, la *série caractéristique* de Sylvester, plus symétrique que celle de Jacobi, formée des sommes des mineurs principaux de même ordre du discriminant. Il l'applique à la classification des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe *deux*, au point de vue *projectif* et au point de vue de l'*affinité :* des tableaux résument la classification. Pour la classification des surfaces de seconde classe intervient l'équation du complexe des tangentes à cette surface.

Saalschütz (*Louis*), à Königsberg. — Formules nouvelles pour les nombres de Bernoulli. (99-101).

Communication de quelques résultats d'un travail plus étendu sur les puissances entières de la cotangente et de la cosécante, publié dans les *Schriften der Physikalisch-Œkonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr.*, t. XLIV, 1903.

Signalons, entre autres, la formule suivante :

$$2(2^{2h-1}-1)B_h = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k 2^{-k}\frac{[1.3.5\ldots(2m-2k-1)]^2 C_k[1^2,(m-k)^2]}{2m-1-2k},$$

où $C_k[1^2, n^2]$ représente la somme des combinaisons avec répétitions des nombres $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$.

Kühne (*H.*), à Dortmund. — Sur la résolution approchée des congruences suivant des systèmes de modules premiers et sur les unités de certains corps. (102-115).

Soient p un nombre premier impair et $x_1, \ldots, x_n$ des indéterminées. Un système de modules premier est de la forme

$$P = [p, f_1(x_1), f_2(x_2, x_1), \ldots, f_n(x_n; x_1, \ldots, x_{n-1})],$$

où f_1 est irréductible (mod p), et où, généralement, chaque f_k est irréductible mod $(p, f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})$. Les fonctions entières de $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients entiers, sont alors considérées *modulo* P, et forment un domaine 𝔅 composé d'un nombre limité d'éléments. Introduisons une nouvelle indéterminée x et considérons le domaine B des fonctions rationnelles de x dont les coefficients appartiennent à 𝔅. Il va jouer le rôle que jouent en Arithmétique les nombres rationnels écrits dans le système décimal. Il suffit pour cela d'imaginer chaque grandeur de B développée suivant les puissances entières et décroissantes de x : si on limite le développement au terme en $x^{-\omega}$, on aura une *valeur approchée* d'ordre ω. Soit $F(y)$ une fonction entière de l'indéterminée nouvelle y, dont le premier coefficient est *un* et dont les autres sont des *grandeurs entières de* B, et qui est supposée irréductible dans le domaine B; *en se limitant à un ordre d'approximation suffisamment élevé,* on peut décomposer F en facteurs de même nature dont le nombre m est déterminé de la manière suivante :

Soit

$$F(x^{\eta} z) = x^{m\eta} G(z) + x^{m\eta-1} G_1(z) + \ldots;$$

η étant choisi suffisamment grand, m est le nombre des diviseurs irréductibles de $G(z)$, *modulo* P. Supposant ces diviseurs différents, l'auteur considère alors le corps Y défini par la congruence $F(y) \equiv 0$ dans le domaine B; et, généralisant la marche suivie par Dirichlet, dans ses *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 559 et suiv., étudie les grandeurs de ce corps et spécialement ses *unités*. Il arrive à cette conclusion que chaque unité de ce corps Y se met sous la forme $W E_1^{p_1} \ldots E_{m-1}^{p_{m-1}}$, où W est une des racines d'unités, en nombre fini, que le corps contient, et où $E_1, \ldots, E_{m-1}$ constituent un système d'unités fondamentales; $p_1, \ldots, p_{m-1}$ sont des nombres entiers quelconques.

Teixeira (*F. Gomes*), à Porto (Portugal). — Sur la convergence

des formules d'interpolation de Lagrange, de Gauss, etc. (116-162).

I. L'auteur part de la formule d'interpolation de Lagrange avec un reste représenté par une intégrale curviligne, telle qu'elle a été donnée par Hermite (même Recueil, t. 84) :

$$f(x) = \Theta(x) + R(x).$$

Dans cette formule, $f(x)$ est une fonction holomorphe dans un champ C, où sont pris les points $a_1, \ldots, a_m$; $\Theta(x)$ est l'expression de Lagrange formée avec les valeurs de $f(x)$, pour $x = a_1, \ldots, x = a_m$; et $R(x)$ est le reste, qui est une intégrale prise le long du contour de C. Il s'agit de trouver des cas dans lesquels $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$ quand on augmente indéfiniment le nombre des points $a_1, \ldots, a_m$. L'auteur en indique plusieurs. Citons, par exemple, le suivant :

C étant un cercle qui a pour centre l'origine des coordonnées et de rayon ρ, *et* $a_1, \ldots, a_m$ *ayant les valeurs*

$$h\cos\frac{\pi}{2m},\quad h\cos\frac{3\pi}{2m},\quad \ldots,\quad h\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}$$

(considérées par Tchebicheff), où h est positif et inférieur à ρ, *la fonction* $\Theta(x)$ *converge vers* $f(x)$, *pour m infini, pourvu que l'on ait*

$$|x| < \sqrt{\rho^2 - h^2}.$$

L'auteur donne aussi une généralisation de la formule d'Hermite, pour le cas où $f(x)$ admet des singularités isolées dans le champ C.

II. La seconde Partie du Mémoire contient une étude analogue sur la formule d'interpolation trigonométrique donnée par Hermite, dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 322; sur une formule analogue de Gauss (*Œuvres complètes,* t. III, p. 281), et sur d'autres formules du même genre. L'auteur détermine un reste pour chacune d'elles, en suivant la méthode employée par Hermite pour la formule de Lagrange, et donne ensuite des cas où le reste tendra vers zéro. Voici l'un de ces nouveaux énoncés, qui concernent plus particulièrement les fonctions périodiques :

Si la fonction $f(x)$ *admet la période* 2π, *et qu'elle soit holomorphe dans la bande infinie comprise entre deux parallèles à* Ox, *équidistantes de cet axe, et que x soit un point à l'intérieur de cette bande, la formule de Gauss tend vers* $f(x)$, *pour n infini, si les valeurs particulières de x qui servent à la construire sont les valeurs*

$$\frac{k\pi}{n}\quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\overline{n-1}, n).$$

Le dernier paragraphe contient quelques additions au Mémoire *Sur les courbes définies par l'équation* $|\sin(x-a)| = c$, publié par l'auteur dans ce Journal, tome 116, page 14.

Sujet proposé pour le Prix de la Société princière de Jablonowski, pour l'année 1906. (163).

« Recherches sur les nombres analogues aux nombres de Bernoulli, notamment dans le domaine des fonctions elliptiques, qui admettent la multiplication complexe. »

Hensel (*K.*). — Sur la théorie des systèmes. (165-170).

Soient $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ deux *systèmes* d'ordre n, dont les éléments sont des grandeurs entières ou fractionnaires d'un domaine de rationalité quelconque. On sait que B est dit un multiple de A, si l'on peut déterminer deux multiplicateurs *entiers* P et Q, de manière que l'on ait

$$B = PAQ.$$

On a alors ce théorème de Frobenius :

Que la condition nécessaire et suffisante pour que B *soit multiple de* A *est que les diviseurs élémentaires de* B *soient des multiples des diviseurs élémentaires correspondants de* A.

L'auteur en expose une démonstration nouvelle dans laquelle est utilisée une transformation des *systèmes* qui peut servir dans beaucoup de questions de cette théorie. Cette méthode de démonstration permet également de trouver dans chaque cas les multiplicateurs par lesquels les diviseurs élémentaires de B diffèrent des diviseurs élémentaires correspondants de A.

Zimmermann (*O.*), à Zoppot. — Sur les foyers, les directrices et les orthogonales d'une courbe plane algébrique de classe quelconque. (171-193).

Il s'agit de déterminer les foyers d'une courbe plane quelconque par les méthodes de la Géométrie synthétique. La méthode employée consiste dans l'emploi de *courbes focales* dont les points communs seront les foyers cherchés. Pour définir une de ces courbes focales, on prend une courbe circulaire K_0 et une famille de courbes K contenant une courbe circulaire. La courbe focale correspondante Φ sera le lieu des points d'intersection des tangentes menées à la courbe donnée par les points communs à K_0 et à l'une quelconque des courbes K.

Une première solution simple s'obtient en prenant pour K_0 la droite de l'infini et, pour la famille K, un faisceau de coniques contenant un cercle. L'auteur détermine dans ce cas l'ordre de Φ, en en généralisant même un peu la définition; il y a divers cas particuliers à examiner. En général Φ est d'ordre $m(m-1)$, m étant la classe de la courbe donnée; et, pour $m > 2$, il faudra trois courbes Φ particulières pour définir les foyers. L'auteur applique la méthode au cas $m = 2$.

L'auteur fait ensuite l'étude, au point de vue de l'ordre et des points singuliers, de l'*orthogonale* de la courbe proposée, c'est-à-dire du lieu des sommets des angles droits qui lui sont circonscrits. Il détermine aussi les direc-

trices, comme tangentes communes à des *courbes directrices :* celles-ci sont les enveloppes des droites joignant les points de contact des tangentes dont les points d'intersection définissaient les courbes focales.

Une seconde espèce de courbes focales s'obtient en prenant pour K_0 un cercle particulier et, pour la famille K, un faisceau de droites parallèles. On obtient ainsi des courbes Φ qui sont, en général, du quatrième ordre.

L'auteur termine en déduisant de cette théorie la construction métrique élémentaire des foyers des coniques à centre.

Horn (*J.*), à Clausthal. — Étude des mouvements dans le voisinage d'une position d'équilibre stable. (194-232).

La position du système est supposée dépendre de n paramètres indépendants $x_1, \ldots, x_n$, et les forces données par une fonction des forces U, qui a un minimum pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Par une transformation linéaire des coordonnées, on peut faire en sorte que le développement de U en série prenne la forme $U = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 x_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n^2) + \ldots$, où les λ_i sont des constantes positives, et que l'expression de la force vive se réduise, pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, à $T_0 = \frac{1}{2}(x_n'^2 + \ldots + x_n'^2)$. Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$x''_\alpha + \lambda_\alpha^2 x_\alpha = F_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où F_α est une forme quadratique en $x'_1, \ldots, x'_n$, et où G_α est une série entière commençant par des termes du second degré.

L'auteur démontre (deuxième partie du Mémoire) que, si l'on suppose qu'il n'existe aucune relation à coefficients entiers $g_1, \ldots, g_n$ de la forme

$$\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n = 0,$$

ces équations sont vérifiées formellement par des séries de la forme

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \ldots + x_\alpha^{(p)} + \ldots \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

de la manière suivante : $x_\alpha^{(p)}$ est une fonction entière homogène de degré p de n constantes d'intégration $k_1, \ldots, k_n$, et une fonction périodique de n arguments $u_1, \ldots, u_n$ (de période 2π par rapport à chacun d'eux); et l'on a

$$u_\alpha = [\lambda_\alpha + \rho_\alpha^{(2)} + \rho_\alpha^{(4)} + \ldots] t + t_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\rho_\alpha^{(2)}, \rho_\alpha^{(4)}, \ldots$ sont des fonctions homogènes de degrés 2, 4, ... des constantes $k_1, \ldots, k_n$, tandis que $l_1, \ldots, l_n$ sont d'autres constantes d'intégration. En particulier

$$x_\alpha^{(1)} = k_\alpha \cos u_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

La première partie du Mémoire, qui en forme la partie essentielle, est consacrée à l'étude approfondie d'un cas particulier, considéré par Liouville et par Stäckel, et qui se ramène aux quadratures. C'est celui où l'on a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\alpha} x_\alpha'^2, \qquad U = \sum_{\alpha}^{n} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi} \psi_\alpha,$$

Φ étant le déterminant de n^2 séries : $\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ et Φ_α les mineurs définis par $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha 1}\Phi_\alpha$; où, de plus, ψ_α est une série entière dont l'ensemble des termes de degré moindre est $-\frac{1}{2}\lambda_\alpha^2 x_\alpha^2$. La théorie des fonctions *semi-périodiques* (bedingt periodische Functionen) de Staude et Stäckel fournit l'expression de $x_1, \ldots, x_n$ sous forme de séries *convergentes*, qui sont de la forme obtenue dans le cas général par un calcul purement formel, mais avec une simplification essentielle, qui consiste dans l'absence de diviseurs infiniment petits dans les coefficients de ces séries. Un choix particulier des constantes d'intégration fournit des mouvements périodiques se produisant dans le voisinage de la position d'équilibre stable. L'auteur traite comme exemple le mouvement d'un point pesant sur le paraboloïde elliptique à axe vertical dirigé vers le haut, dans le voisinage du sommet.

Fischer (*Victor*), à Stuttgart. — Représentation vectorielle des équations du mouvement des corps élastiques. (233-239).

L'introduction des notations de la théorie des quaternions permet de mettre les équations du mouvement des corps élastiques sous une forme extrêmement simple et expressive. Soit $\dot{\mathfrak{v}}$ le vecteur accélération, $\mathfrak{p}$ le vecteur qui représente la force extérieure pour l'unité de masse; on a l'équation unique

$$\mu\dot{\mathfrak{v}} = \mu\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z}.$$

On a aussi des formules simples pour la composante normale et tangentielle de la pression relative à un élément de surface quelconque. Les formules peuvent se condenser davantage encore par l'emploi des *dyadics* introduits par Gibbs. On posera

$$\Phi = \mathfrak{p}_x i + \mathfrak{p}_y j + \mathfrak{p}_z k,$$

et l'on aura l'équation du mouvement

$$\mu\dot{\mathfrak{v}} = \mu\mathfrak{p} + \nabla.\Phi.$$

La pression dans la direction $\mathfrak{n}$ sera donnée par la formule

$$\mathfrak{p}_n = \Phi.\mathfrak{n}.$$

Voronoï (*Georges*), à Varsovie. — Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. (241-282).

Le but de ce Mémoire est de démontrer un théorème nouveau concernant la fonction $F(x) = \sum_{n=0}^{n\leq x} E\frac{x}{n}$, où Ex désigne, suivant l'usage, le nombre entier satisfaisant aux conditions $x - 1 < Ex \leq x$. Ce théorème est le suivant :

La fonction $x(\log x + 2C - 1)$, *où* C *est la constante d'Euler, représente*

$F(x)$ *avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction* $\sqrt[3]{x}\log x$.

La démonstration est fondée sur l'emploi d'une transformation de la somme $F(x)$, qui peut s'appliquer plus généralement à toute somme $\sum_{(S)} f(m, n)$ étendue aux valeurs entières de m et n, positives et telles que $mn \leq x$, où $x \geq 1$, et qui permettrait d'en rechercher la valeur asymptotique. Le principe géométrique de cette transformation est le suivant : Soit (S) l'ensemble de ces systèmes de valeurs (m, n). La transformation consiste à le décomposer par le moyen de l'hyperbole équilatère $mn = x$. On choisit à cet effet des points sur cette hyperbole, limitée à la branche située dans l'angle yOx; on mène en ces points les tangentes à la courbe et on les limite à leurs intersections successives. La région située entre yOx et la branche d'hyperbole se trouve décomposée en plusieurs : la région comprise entre yOx et les tangentes (parmi lesquelles on fait figurer les asymptotes elles-mêmes), et les triangles curvilignes limités par les portions de tangentes et la courbe. La somme (S) se décompose, par suite, en autant de parties; les points (m, n), pour chacune de ces parties, faisant partie de l'une des régions partielles obtenues. Quant au choix des points sur l'hyperbole, il est lié à la construction de certaines suites de fractions (*suites de Farey*).

Cette transformation est, du reste, une modification d'une transformation employée par Dirichlet dans un but analogue, et qui est susceptible d'une représentation géométrique toute semblable.

La fonction $F(x)$ étant ainsi décomposée, l'auteur réussit à en exprimer les diverses parties par l'emploi de la méthode de Dirichlet, combiné avec celui de la formule sommatoire d'Euler généralisée par Sonine, de manière à arriver, en définitive, à la formule suivante, d'où résulte le théorème annoncé :

$$F(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \theta\left(\frac{65}{36}\sqrt[3]{x}\log x - \frac{79}{12}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\right)$$
$$(|\theta| < 1).$$

Tichomandritsky (M.), à Kharkow. — Sur le passage des intégrales abéliennes aux fonctions thêta. (283-325).

Le but de l'auteur est d'arriver aux fonctions thêta et de découvrir toutes leurs propriétés par une voie entièrement analytique. Le principe de son analyse consiste, suivant une idée de Weierstrass, à partir des intégrales de deuxième espèce. Soient $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_h$ les intégrales de première et de deuxième espèce $(h = 1, 2, \ldots p)$; on considérera les fonctions $J(u_h)_k$, des variables $u_h (h = 1, 2, \ldots, p)$; définies par les équations

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}}}{}_h = u_h, \qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_k = J(u_h)_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Une de leurs propriétés, due à Weierstrass et Nöther, est que l'expression

$$\sum_{k=1}^{p} \left[\mathrm{J} \left(u_h + \int_{x_0}^{\alpha_k} \mathrm{I}_h \right)_k + \mathrm{C}_k \right] du_k$$

est une différentielle totale exacte, les points α_k étant les pôles des II_k. En l'intégrant suivant une courbe de l'espace à p dimensions, on obtient donc une fonction Φ qui dépend des coordonnées u_h et $u_h^{(0)}$ des extrémités de cette courbe et des constantes C_k. La nature logarithmique de ses infinis conduit à introduire la fonction

$$\Theta(u_h \mid u_h^{(0)}, \mathrm{C}_h) = e^{\Phi(u_h \mid u_h^{(0)}, \mathrm{C}_h)},$$

qui est uniforme et partout finie. L'auteur établit la propriété fonctionnelle de cette fonction Θ, relativement aux périodes, et montre comment on peut l'exprimer au moyen d'une *fonction* Θ *fondamentale,* obtenue en particularisant les constantes $u_h^{(0)}$ et C_h.

La démonstration de la propriété fonctionnelle de Θ est liée à la solution du *problème auxiliaire* suivant :

Déterminer, pour l'une quelconque des fonctions J, *des constantes* $\overline{u_h}$ *et* C, *telles que l'on ait l'identité*

$$\mathrm{J}(-u_h + \overline{u_h}) + \mathrm{J}(u_h + \overline{u_h}) = \mathrm{C}.$$

La solution de ce problème est donnée au moyen d'une formule d'Ermakow; elle dépend de la considération de la *courbe adjointe de contact* de deuxième espèce, définie au moyen de la tangente à la courbe fondamentale au point qui est le pôle de l'intégrale de deuxième espèce servant à définir J. Il y a, en général, deux cas à distinguer. La nature des sommes d'intégrales de deuxième espèce qui servent à exprimer C conduit à introduire la fonction Z de Weber (*Sur la théorie de l'inversion des intégrales abéliennes,* même Journal, t. 70), dont l'auteur donne, à cette occasion, les propriétés fondamentales.

Les formules obtenues pour la solution du problème auxiliaire fournissent en réalité 2^{2p} *fonctions* Θ *fondamentales,* dérivant les unes des autres par addition de demi-périodes; l'auteur prouve que chacune d'elles est paire ou impaire et introduit les *caractéristiques* qui les définissent. Pour la plus simple d'entre elles sa propriété de périodicité permet de la développer en série de Fourier, et l'on obtient ainsi la série ϑ de Jacobi, c'est-à-dire l'expression analytique des fonctions Θ les plus générales.

E. V.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS ([1]).

Tome XXX; 1900-1901.

Forsyth (*A.-R.*). — Note sur la transformation birationnelle de Halphen. (1-7).

Il s'agit de la transformation indiquée par Halphen (*Journal de Liouville*, 3e série, t. II, 1876, p. 87) qui permet de décomposer les singularités d'une courbe en singularités plus simples; elle revient à faire correspondre au point x, y, z de la courbe $\varphi(x, y, z) = 0$ le point

$$\begin{aligned} \xi &= y\varphi'_z - z\varphi'_y, \\ \eta &= z\varphi'_x - x\varphi'_z, \\ \zeta &= x\varphi'_y - y\varphi'_x. \end{aligned}$$

M. Forsyth montre, successivement pour le cas d'une conique et le cas d'une courbe de degré n, comment x, y, z peuvent être exprimés rationnellement au moyen de ξ, η, ζ.

Prasad (*G.*). — Sur le potentiel d'un ellipsoïde de densité variable. (8-13).

La densité au point x, y, z de l'ellipsoïde est supposée développable en série entière en x, y, z; l'auteur calcule alors les termes de la série qui en résulte pour le potentiel.

Michel (*J.-H.*). — Détermination de la tension dans une sphère élastique isotrope, au moyen d'équations intrinsèques. (16-25).

La méthode développée par l'auteur s'applique aux problèmes qui concernent l'équilibre ou l'oscillation d'une sphère élastique isotrope.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le résidu suivant le module p de

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots + \frac{1}{(p-2)^{2n}}.$$

(26-34).

L'expression précédente, où l'on suppose que p est un nombre premier impair, est congrue à 0 (mod p), à moins que $2n$ ne soit un multiple de $p-1$, auquel cas elle est congrue à $-\frac{1}{2}$.

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, 1901, p. 5.

Bromwich (*T.-J.*). — Conditions pour qu'une forme quadratique ait un signe donné. (31-40).

Il s'agit du cas déjà examiné par M. Nanson (*Messenger*, t. XXV et XXVII) où les variables sont liées par des relations linéaires. La solution donnée par M. Bromwich résulte des identités signalées par M. Darboux (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XIX, 1874).

Bromwich (*T.-J.*). — Correction d'une erreur dans un précédent Mémoire. (34).

Renvoi à la page 184 du Tome XIX du *Messenger*.

Michell (*J.-H.*). — La stabilité uniplanaire d'un corps solide. (35-40).

Il s'agit d'une plaque mince assujettie à rester dans un plan; l'auteur examine successivement le cas où il y a un ou deux degrés de liberté.

Bromwich (*T.-J.*). — Le déplacement d'une droite donnée dans un mouvement hélicoïdal. (42-51).

Les six coordonnées pluckériennes de la droite mobile sont exprimées en fonction de l'angle de rotation, l'axe de l'hélice étant lui-même donné au moyen de ses six coordonnées. Ces formules sont rattachées à un passage de la *Geometrie der Berührungstransformationen* de S. Lie (Chap. VI, n° 3) sur le déplacement infinitésimal d'un corps solide.

Radford (*E.-M.*). — Quelques méthodes élémentaires de Géométrie analytique. (52-60).

Errata pour le Mémoire du colonel Cunningham sur les *Period-lengths of circulates*. (60).

Renvoi au Tome XXIX, p. 145-179.

Nanson (*J.*). — Théorème relatif à une expression quadratique. (61-65).

Généralisation d'une identité donnée par M. Bromwich dans le Tome XXIX du *Messenger*, p. 184.

Biddle (*D.*). — Nouvelle méthode pour la factorisation d'un nombre composé dont on sait qu'il est de la forme

$$(2\Delta p + 1)(2\Delta q + 1)$$

quand Δ est un nombre premier plus grand que 3. (66-70).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Résidus du produit de p nombres en progression arithmétique suivant les modules p^2 et p^3. (71-92).

Voici deux des résultats donnés par l'auteur : l'un est tiré de la première Partie de son Mémoire, l'autre de la deuxième. p désigne un nombre premier impair, l et r deux nombres premiers à p, k et t le quotient et le reste de la division de l par p.

$$L = \frac{l(r+l)(2r+l)\ldots[(p-1)r+l]}{p} \equiv -(k+h) \pmod{p},$$

en désignant par h la plus petite racine positive de la congruence

$$px \equiv t \pmod{r};$$

$$L \equiv (\mu_{p-1}+k+1)\times(p-1)!\times(1+\mathrm{II}_t p) \pmod{p^2},$$

en supposant

$$\mathrm{II}_t = \frac{\mu_1}{t+1}+\frac{\mu_2}{t+2}+\ldots+\frac{\mu_{p-t+1}}{p-1}$$
$$+\frac{\mu_{p-t+1}+1}{1}+\frac{\mu_{p-t+2}+1}{2}+\ldots+\frac{\mu_{p-1}+1}{t-1}.$$

Quant aux nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ ce sont des entiers tels que les nombres

$$\mu_1 p+1,\quad \mu_2 p+2,\quad \ldots,\quad \mu_{p-1}p+p-1$$

coïncident dans leur ensemble avec les nombres

$$r,\quad 2r,\quad \ldots,\quad (p-1)r.$$

Whitaker (*E.-T.*). — Sur la réduction de l'ordre des équations différentielles d'un problème dynamique au moyen de l'intégrale des forces vives. (93-98).

Les équations du problème dépendant de n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont supposées mises sous la forme de Lagrange ou sous celle de Hamilton; le temps n'y entre pas explicitement; alors, en éliminant le temps et en se servant de l'intégrale des forces vives, on peut abaisser de deux unités l'ordre du système; l'auteur montre comment cet abaissement peut être réalisé en conservant au système réduit la forme de Lagrange ou de Hamilton.

Biddle (*D.*). — Extension de la méthode de factorisation des nombres composés. (98-100).

Burnside (*W.*). — Sur la trisection cyclotomique. (101-102).

L'auteur montre comment on peut simplifier la résolution de l'équation du troisième degré qui donne les valeurs des périodes de $\frac{p-1}{3}$ termes (en supposant le nombre premier p congru à 1 mod 3) d'une racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, lorsque p est grand.

Lodge (*A.*). — Une valeur approchée de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r}$. (103-107).

En désignant par C la constante d'Euler la somme précédente est égale à

$$C + \frac{1}{2} \log r(r+1) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(r+1)^{2n+1}},$$

et la série qui figure dans cette expression peut être représentée approximativement par

$$\frac{1}{6r(r+1)+2}.$$

Nanson (*E.-J.*). — Un théorème sur les polygones circonscrits à une conique. (108-110).

Si deux polygones de n côtés sont circonscrits à une conique, leurs $n(n-1)$ sommets sont sur une courbe de degré $n-1$; si trois polygones de n côtés sont circonscrits à une conique, les trois courbes de degré $n-1$ ainsi obtenues ont en commun $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points.

Hicks (*W.-M.*). — Développement de $P_n(\cos 2\theta)$ suivant les quantités $P_n(\cos\theta)$. (111-112).

En posant

$$A(m) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m},$$

on a

$$P_n(\cos 2\theta) = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p 2^p \frac{4p+1}{2n+2p+1} \frac{A(n-p)A(p)}{A(n+p)} P_{2p}(\cos\theta).$$

Brill (*J.*). — Note sur la généralisation d'une solution particulière d'un système d'équations pfaffiennes. (113-127).

Extension d'une méthode donnée par Clebsch pour le cas d'une seule équation.

Il s'agit, étant donné un système d'équations aux différentielles totales

$$X_{i,1}\, dx_1 + X_{i,2}\, dx_2 + \ldots + X_{i,m}\, dx_m = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

et supposant connues les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, qui constituent un système intégral particulier de ces équations, d'en déduire un autre système intégral φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_s$. M. Brill commence d'ailleurs par traiter le cas d'une seule équation et termine par des observations générales sur la façon dont on doit considérer une équation aux différentielles totales, soit en elle-même, soit comme faisant partie d'un système.

Bromwich (*T.-J.*). — Notes de Dynamique. (127-135).

Théorème de Thomson. Théorème de Bertrand. Théorème de Gauss sur la moindre contrainte. Extension du théorème de Coriolis sur la force vive relative. Sur la théorie d'une tige vibrante.

Radford (*E.-M.*). — Quelques méthodes élémentaires de Géométrie analytique. (135-147).

Burnside (*W.*). — Note sur le groupe symétrique. (148-153).

L'auteur montre, par la considération des invariants projectifs d'un système de n points en ligne droite, que la représentation du groupe symétrique comme un groupe de substitutions birationnelles est toujours possible avec $n-3$ symboles. Il signale un Mémoire de M. E.-H. Moore sur le même sujet dans l'*American Journal* (t. XXII, 1900), Mémoire qu'il n'a connu que par un compte rendu sommaire.

Glaisher (*J.-W.*). — Note sur les résidus des rapports de certaines sommes des inverses des puissances de nombres en progression arithmétique. (154-162).

Les sommes considérées sont de la forme

$$\frac{1}{s^{2i}}+\frac{1}{(r+s)^{2i}}+\frac{1}{(2r+s)^{2i}}+\ldots+\frac{1}{(p-s')^{2i}};$$

p est un nombre premier >3; $2i$ est un nombre pair positif non divisible par $p-1$; $p-s'$ est le terme de la suite $s,\ r+s,\ 2r+s,\ \ldots$ qui est immédiatement inférieur à p; quant à s, c'est un des nombres $1, 2, \ldots, r$.

Les propositions établies par M. Glaisher concernent les résidus $(\operatorname{mod} p)$ du rapport de deux pareilles sommes relatives à des valeurs différentes de s, qui doivent être d'ailleurs choisies suivant la forme de p. Par exemple en supposant $p=4k+1$, on a

$$1+\frac{1}{5^{2i}}+\ldots+\frac{1}{(p-4)^{2i}}\equiv S \quad (\operatorname{mod} p),$$

$$\frac{1}{2^{2i}}+\frac{1}{6^{2i}}+\ldots+\frac{1}{(p-3)^{2i}}\equiv -S \quad (\operatorname{mod} p),$$

$$\frac{1}{3^{2i}}+\frac{1}{7^{2i}}+\ldots+\frac{1}{(p-2)^{2i}}\equiv -S \quad (\operatorname{mod} p),$$

$$\frac{1}{4^{2i}}+\frac{1}{8^{2i}}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^{2i}}\equiv S \quad (\operatorname{mod} p);$$

S étant le même nombre dans les quatre congruences, en sorte que, si l'on désigne par u_1, u_2, u_3, u_4 les premiers membres, on peut écrire

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \equiv 1, -1, -1, 1 \quad (\operatorname{mod} p).$$

Ces résultats sont rapprochés de ceux que l'auteur a établis dans un Mémoire

du *Quarterly Journal* (t. XXXII) et se relient d'ailleurs aux propriétés des nombres de Bernoulli.

Jolliffe (*A.-E.*). — Une certaine identité relative à l'équation déterminante de Lagrange et son application à la réalité des racines de cette équation. (163-171).

Extensions de propriétés connues du discriminant de la forme quadratique $\lambda\varphi + f$ au cas où la forme φ à n variables, tout en restant positive ou nulle quelles que soient les variables, peut être d'un rang inférieur à n.

Burnside (*W.*). — Sur la transformation projective générale. (171-173).

Expression explicite de la transformation projective qui, dans l'espace à $n-1$ dimensions, change $n+1$ points, non situés dans un espace à $n-2$ dimensions, en $n+1$ points donnés, soumis à la même condition.

Kolossoff (*G.*). — Sur un cas de mouvement d'un corps solide. (174-177).

Cas où la somme des moments des forces extérieures et des réactions par rapport à la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur un des plans cycliques de l'ellipsoïde d'inertie serait constamment nulle.

Burnside (*W.*). — Deux Notes sur les invariants projectifs d'un système de points. (177-185).

Une transformation projective étant déterminée dans l'espace à $n-1$ dimensions quand on se donne $n+1$ points et leurs correspondants, un système de $n+2$ points doit avoir $n-1$ invariants indépendants. La détermination de ces invariants conduit par une voie naturelle à la détermination des invariants différentiels projectifs d'un système de fonctions d'une variable.

Hardy (*G.-H.*). — Sur quelques points de Calcul intégral. (185-190).

On a

$$\int_a^{\mathrm{A}} \varphi(x)\,dx \int_a^{x} f(x)\,dx + \int_a^{\mathrm{A}} f(x)\,dx \int_a^{x} \varphi(x)\,dx$$
$$= \int_a^{\mathrm{A}} f(x)\,dx \int_a^{\mathrm{A}} \varphi(x)\,dx,$$

en supposant que les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ soient finies et intégrables dans l'intervalle (a, A).

Deux autres théorèmes se rapportent à l'existence d'intégrales dont une limite

est infinie et se tirent des propositions bien connues sur la convergence d'une série de la forme $\sum a_n b_n$ qui se déduisent d'un lemme d'Abel.

Biddle (*D.*). — Un moyen de déterminer si la demi-différence (h) de deux facteurs de N est un multiple (1) de $4\Delta^2$, ou (2) de Δ^2, quand $N = 2\Delta m + 1 = (2\Delta p + 1)(2\Delta q + 1)$. (190-192).

J. T.



SITZUNGSBERICHTE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH-BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN.

Tome XXIX.

Communications faites à l'Académie en 1899.

Seeliger (*H.*). — Sur la façon dont sont réparties les erreurs après un calcul de compensation. (3-21).

Nouvel exposé de recherches ayant le même objet, publiées autrefois par M. Seeliger dans les *Astronomische Nachrichten*, n°s 2284 et 2323.

Pringsheim (*A.*). — Contribution à la théorie des intégrales doubles. A propos du théorème de Green et du théorème de Cauchy. (39-62 et 268-271).

I. Envisageons une intégrale double

$$I = \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y)\, d\sigma.$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ du rectangle ($x_0 \leqq x \leqq X$; $y_0 \leqq y \leqq Y$); supposons que dans tout ce rectangle la valeur absolue de $f(x, y)$ reste plus petite qu'un nombre fini assignable; M. Pringsheim démontre que l'existence de l'intégrale double I entraine celle de l'intégrale simple

$$I_x = \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

pour un ensemble de points y *partout dense* dans l'intervalle $y_0 \leqq y \leqq Y$ ainsi

que celle de l'intégrale simple

$$\mathrm{I}_y = \int_{y_0}^{\mathrm{Y}} f(x, y)\, dy,$$

pour un ensemble de points x *partout dense* dans l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$.

Les points y de l'intervalle $y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}$ pour lesquels I_x n'existe pas, et les points x de l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$ pour lesquels I_y n'existe pas, peuvent, eux aussi, constituer des ensembles *partout denses;* mais ceux des points y de l'intervalle $y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}$ pour lesquels la différence

$$\overline{\int_{x_0}^{\mathrm{X}}} f(x, y)\, dx - \underline{\int_{x_0}^{\mathrm{X}}} f(x, y)\, dx,$$

entre l'intégrale par excès $\overline{\int}$ et l'intégrale par défaut $\underline{\int}$ de la fonction $f(x, y)$, prises dans l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$, est plus *grande* qu'un nombre positif quelconque ε donné à l'avance aussi petit que l'on veut, ne peuvent former qu'un ensemble *sans étendue;* et de même ceux des points x de l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$ pour lesquels on a

$$\overline{\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}} f(x, y)\, dy - \underline{\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}} f(x, y)\, dy > \varepsilon,$$

ne peuvent former qu'un ensemble *sans étendue*. M. Pringsheim fait suivre la démonstration de ce théorème de plusieurs exemples destinés à mettre en évidence les divers cas qui, d'après ce théorème, *peuvent* se présenter pour un choix convenable de la fonction $f(x, y)$. Le lecteur comparera la démonstration de M. Pringsheim à celle que M. C. Arzelà avait déjà donnée du même théorème dans les *Mémoires de l'Académie de Bologne* pour 1892 (p. 133-147).

Supposons maintenant que dans un rectangle donné

$$(a \leqq x \leqq \mathrm{A},\ b \leqq y \leqq \mathrm{B})$$

une fonction $f(x, y)$ reste positive et plus petite qu'un nombre fini assignable; supposons en outre que x_0, X, y_0, Y désignant des nombres quelconques vérifiant les inégalités $a \leqq x_0 < \mathrm{X} \leqq \mathrm{A}$; $b \leqq y_0 < \mathrm{Y} \leqq \mathrm{B}$, on soit assuré de l'existence de l'intégrale $\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx$ pour *chaque* y de l'intervalle $b \leqq y \leqq \mathrm{B}$ et de celle de l'intégrale $\int_b^{\mathrm{B}} f(x, y)\, dy$ pour *chaque* x de l'intervalle $a \leqq x \leqq \mathrm{A}$; supposons enfin que, en *chaque* point X, Y envisagé, on ait

$$\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} dy \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} dx \int_{y_0}^{\mathrm{Y}} f(x, y)\, dy$$

(ce qui implique l'existence de chacun des deux membres de cette égalité); M. Pringsheim démontre que *ces hypothèses ne sont pas suffisantes* pour que

l'on soit en droit de conclure qu'il existe une intégrale double

$$\int\int_{x_0, y_0}^{X, Y} f(x, y)\, d\sigma,$$

étendue au rectangle $(x_0 \leqq x \leqq X;\ y_0 \leqq y \leqq Y)$. La démonstration de M. Pringsheim repose sur la construction d'un ensemble de points d'une nature particulière fort curieuse.

II. On sait qu'il existe des fonctions $f(x)$ continues dans un intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$, admettant dans tout cet intervalle une dérivée $f'(x)$ univoque, restant dans tout l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ inférieure en valeur absolue à un nombre fini assignable, et qui cependant n'est pas intégrable, en sorte que l'intégrale $\int_{x_0}^{X_0} f'(x)\, dx$ *n'existe pas* pour $X_0 \leqq X$. Pour de telles fonctions $f(x)$, l'égalité

$$\int_{x_0}^{X} f'(x)\, dx = f(X) - f(x_0)$$

peut être remplacée par l'inégalité

$$\underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x)\, dx \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x)\, dx.$$

On peut utiliser cette inégalité pour démontrer que la relation fondamentale

$$\int\int_{x_0, y_0}^{X, Y} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} [Q(X, y) - Q(x_0, y)]\, dy$$

a lieu sous les conditions que voici : $Q(x, y)$ est une fonction des deux variables x, y, univoque, finie et continue dans le rectangle

$$(x_0 \leqq x \leqq X;\ y_0 \leqq y \leqq Y);$$

$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ est définie univoquement en chacun des points de l'intérieur de ce rectangle et sa valeur absolue reste dans tout le rectangle inférieure à un nombre fini assignable; l'intégrale double qui figure dans le premier membre de la relation fondamentale existe.

De cette relation fondamentale on déduit le théorème de Green que l'on peut d'ailleurs énoncer sous une forme un peu plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'ici :

Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *désignent deux fonctions univoques et continues à l'intérieur et sur le contour d'une aire connexe* (A) *limitée par un contour* (C) *formé d'une ou de plusieurs courbes monotones par section par rapport à chacun des deux axes coordonnes* (ce qui ne les empêche pas d'avoir éventuellement un nombre infini de maximés et de minimés pour d'autres directions que celles des axes coordonnés, voire même un nombre infini de maximés et de minimés formant un ensemble dense); *si, en outre, les dérivées* $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$

sont définies univoquement et restent, en valeur absolue, dans tout l'intérieur de (A), ***inférieures à un nombre fini assignable, on a***

$$\int\int_{(A)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA = \int_{+(C)} (P\,dx + Q\,dy),$$

pourvu que chacune des deux intégrales doubles qui figurent dans le premier membre $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$, $\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$ *existent.*

En d'autres termes :

Pourvu que les points (x, y) ***du domaine*** (A) ***où*** $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ***font des*** sauts $> \varepsilon$ ***forment, pour tout*** ε ***positif fixé aussi petit que l'on veut, tout au plus un ensemble (à deux dimensions)*** sans étendue.

Le théorème de Cauchy peut être envisagé comme un cas particulier de celui de Green. On peut l'énoncer sous la forme générale que voici :

Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ désignent deux fonctions univoques et continues à l'intérieur et sur le contour d'une aire connexe (A) limitée par un contour (C) du type spécifié dans l'énoncé que l'on vient de donner du théorème de Green; si, en outre, les dérivées $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont définies univoquement et restent inférieures en valeur absolue, dans tout l'intérieur de l'aire (A), à un nombre fixe assignable; si enfin les points (x, y) de l'aire (A) où $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ font des sauts $> \varepsilon$, ou bien où $\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > \varepsilon$ forment, pour tout ε positif fixé aussi petit que l'on veut, tout au plus un ensemble (à deux dimensions) *sans étendue,* on a

$$\int_{(C)} (P\,dx + Q\,dy) = 0.$$

Si donc $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ est une fonction univoque et continue de la variable complexe $z = x + iy$ à l'intérieur et sur le contour (C) de l'aire (A); si, en outre, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ sont définies univoquement et restent, dans tout l'intérieur de (A), inférieures en valeur absolue à un nombre fixe assignable; si enfin les points z pour lesquels $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $\left(\text{ou bien } \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$ font des sauts $> \varepsilon$, ou pour lesquels on a, soit

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right| > \varepsilon,$$

soit

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right| > \varepsilon,$$

forment, pour tout ε positif fixé aussi petit que l'on veut, tout au plus un ensemble à deux dimensions *sans étendue*, on a

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 0.$$

Sous les hypothèses que l'on vient de faire, la fonction $f(z)$ admet une dérivée *complète* $f'(z)$ (indépendante de la direction suivant laquelle on prend la dérivée et du mode de passage à la limite). On ne sait d'ailleurs pas si cette hypothèse concernant $f'(z)$ entraîne à elle seule l'égalité $\int_C f(z)\,dz = 0$ et, par suite, le caractère analytique de la fonction $f(z)$ ou s'il est nécessaire, pour établir ce caractère analytique, de faire, en outre, quelque hypothèse concernant la *continuité* de $f'(z)$.

Une analyse détaillée des conditions sous lesquelles le théorème de Cauchy a lieu, amène M. Pringsheim à reconnaître que le théorème de Green n'est pas la base la plus générale sur laquelle il conviendrait de faire reposer le théorème de Cauchy; on n'en connaît toutefois pas actuellement de meilleure et cela tient à ce que l'on ne connaît que des conditions *suffisantes* pour que, pour une fonction donnée $\frac{\partial P}{\partial y}$ et des limites d'intégration constantes données, on ait

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy,$$

alors qu'il faudrait connaître des conditions *nécessaires et suffisantes* pour que cette égalité ait lieu.

Fedorow (*von*). — Sur certaines divisions régulières du plan ou de l'espace. (63).

Cette Communication est insérée dans les Mémoires de l'Académie.

Lindemann (*F.*). — Sur quelques poids ayant une origine préhistorique conservés dans certains musées allemands et italiens. Premier article. (71-136).

On a trouvé au mont Loffa un *dodécaèdre* sur les faces duquel on avait tracé des signes qui coïncident en partie avec les signes tracés sur des *poids* trouvés au même endroit. En comparant ces signes, on est parvenu à en fixer le sens; ils ne diffèrent pas des signes hiératiques employés en Égypte pour désigner les nombres; ils ont, d'autre part, servi de types originaux aux chiffres étrusques d'où dérivent comme on sait, au moins en partie, les chiffres romains.

La date de provenance de ce dodécaèdre et de ces poids est antérieure à la civilisation étrusque; elle se rapporte à une époque où des relations existaient encore entre l'Italie septentrionale et l'Orient, en particulier l'Égypte, époque dont l'Histoire n'a gardé aucun souvenir. L'unité de poids était alors, d'après les poids trouvés au mont Loffa, d'environ 100g.

M. Lindemann donne les raisons qui le portent à croire à la haute antiquité de ce dodécaèdre et de ces poids; on sait que M. Pigorini a, tout au contraire, cru devoir émettre des doutes sur la provenance des objets envisagés comme préhistoriques par M. Lindemann. Suivant M. Lindemann des relations ont dû avoir lieu entre l'Italie septentrionale et l'Égypte dans l'intervalle de temps qui sépare l'avènement de la XIIe ou XIIIe dynastie en Egypte d'une part et les guerres puniques d'autre part. La date à laquelle remontent quelques-uns des

poids étudiés par M. Lindemann lui semble d'ailleurs pouvoir être fixée d'une façon plus précise et c'est à l'examen particulier de ces poids qu'est consacré son Mémoire.

Maurer (*L.*). — Sur les systèmes invariants de M. Hilbert. (147-175).

M. Hilbert a démontré (*Mathematische Annalen*, t. XXXVI, p. 473) que les invariants d'un système contenant un nombre quelconque de formes fondamentales, à autant de *suites de variables* que l'on veut, peuvent être représentés par des fonctions entières d'un nombre fini d'entre eux.

On peut caractériser les invariants par la propriété d'être transformés en eux-mêmes par un groupe G de substitutions linéaires et homogènes. On peut aussi dire que si x_1, x_2, ..., x_n désignent les coefficients des formes fondamentales rangées dans un ordre quelconque et si

$$C_\rho(f) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} C_{\rho\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r)$$

sont les transformations infinitésimales qui engendrent le groupe G, les invariants sont définis par les r équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad C_1(f) = 0, \quad C_2(f) = 0, \quad \ldots, \quad C_r(f) = 0;$$

ils forment ce que l'on peut appeler le *système invariant général* du groupe G.

M. Hilbert s'était déjà demandé (*Mathematische Annalen*, t. XLII, p. 314) si toutes les formes qui correspondent à chaque groupe de transformation linéaire et homogène peuvent s'exprimer en fonctions entières d'un nombre fini d'entre elles, ou, ce qui revient au même, si *toutes* les fonctions entières satisfaisant aux équations aux dérivées partielles (1) peuvent s'exprimer en fonctions entières d'un nombre fini d'entre elles. M. Maurer montre qu'il en est ainsi.

Le mode de démonstration qu'il emploie l'amène d'ailleurs à généraliser ce théorème en envisageant aussi le cas où les quantités x_1, x_2, ..., x_n, au lieu d'être indépendantes les unes des autres, vérifient un système d'équations algébriques données

$$(2) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_s = 0.$$

Supposons que chaque système de valeurs de x_1, x_2, .., x_n, vérifiant les équations (2) vérifie aussi les équations

$$C_\rho[F_1] = 0, \quad C_\rho[F_2] = 0, \quad \ldots, \quad C_\rho[F_s] = 0$$
$$(\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

et convenons d'appeler le système de fonctions f de x_1, x_2, ..., x_n qui, en tenant compte des relations (2), vérifie les r équations aux dérivées partielles (1), *le système invariant* particulier *du groupe* G. On peut démontrer que toutes les fonctions entières faisant partie d'un système invariant particulier peuvent s'exprimer par des fonctions entières d'un nombre fini d'entre elles.

M. Maurer démontre d'abord que le théorème a lieu quand l'ordre du groupe G

est égal à 1, en sorte que $r = 1$ et que le système invariant est, par suite, défini par *une seule* équation différentielle. Il démontre ensuite le théorème par induction dans le cas général où r est quelconque, en le supposant vrai pour tout entier $< r$; il faut alors distinguer deux cas, suivant que le groupe G est simple ou composé.

Mais sous quelle condition *existe-t-il* des fonctions entières vérifiant ces équations aux dérivées partielles (1)? M. Maurer n'aborde cette recherche qu'en se limitant au cas où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes. Supposons que $r - r'$ des r équations différentielles (1) soient une conséquence des r' autres et que $n > r'$; supposons aussi que le groupe G engendré par les r transformations infinitésimales $C_1(f)$, $C_2(f)$, ..., $C_r(f)$ soit *régulier*. Il y a alors $n - r'$ fonctions *rationnelles* qui vérifient les équations (1); M. Maurer montre que si le groupe G ne contient aucune autre transformation infinitésimale de *seconde espèce* que celles qui appartiennent au sous-groupe principal de G, il existe $n - r'$ invariants du groupe G qui sont des fonctions *entières* et sont indépendantes les unes des autres. Sous ces mêmes hypothèses, on peut démontrer que, si le produit de plusieurs fonctions *entières* est un invariant du groupe G, chacun des facteurs de ce produit est aussi un invariant de G. Mais, si le groupe G contient des transformations régulières de seconde espèce n'appartenant pas au sous-groupe principal de G, les théorèmes énoncés n'ont plus lieu en général.

Pour conserver l'analogie avec la théorie des invariants projectifs, il convient d'introduire la notion de fonction *remarquable*. On appellera *remarquable* une fonction entière de φ vérifiant r équations différentielles de la forme

$$C_\rho(\varphi) = k_\rho \varphi \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_r$ désignent des entiers quelconques. On est certain, dans tous les cas, de l'existence de $n - r' + 1$ fonctions remarquables et l'on peut démontrer que toute fonction remarquable peut s'exprimer en fonction entière d'un nombre fini d'entre elles et que, si un produit de plusieurs fonctions entières est une fonction remarquable, il en est de même de chacun des facteurs de ce produit.

Korn (*A.*). — Fondement d'une théorie mécanique du choc élastique et des frottements intérieurs dans des milieux continus. (223-229).

Lorsque deux éléments matériels de masses m_1 et m_2 se mouvant sur une même ligne droite avec des vitesses v_1 et v_2 se rencontrent, on déduit du principe de d'Alembert qu'après le choc les deux éléments matériels se mouvront avec une vitesse commune

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Le principe de la conservation de l'énergie est donc en défaut, puisque

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

n'est pas égal à

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2;$$

la raison en est, dit d'Alembert lui-même, dans la discontinuité qui se manifeste au moment du choc.

Ne serait-il cependant pas possible d'expliquer le changement de vitesse des deux éléments matériels de façon que le principe de la conservation de l'énergie ait lieu? M. Korn y parvient de la manière suivante :

Imaginons un milieu continu incompressible M remplissant tout l'espace; soient m_1, m_2 deux masses distribuées dans de petits volumes τ_1, τ_2 situés dans M et susceptibles d'une petite compression ou dilatation sous de fortes pressions. Les composantes u, v, w de la vitesse d'un point quelconque de M sont des fonctions continues admettant des dérivées; si p désigne la pression de M en un point x, y, z à l'instant t et ε la densité en ce point, on a en chaque point x, y, z, aussi bien dans que hors τ_1 ou τ_2, et à chaque instant t, les relations

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \varepsilon\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \varepsilon\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z};$$

on a, de plus, en chaque point hors de τ_1 et de τ_2, la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

car le milieu M est supposé incompressible; en chaque point de τ_1 ou de τ_2, on a

$$-\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\varepsilon}{dt};$$

enfin ε et p sont liés par la relation complémentaire

$$F(\varepsilon, p) = 0.$$

Ceci posé, on peut se demander sous quelles conditions les composantes u, v, w de la vitesse s'expriment dans tout l'espace par des relations de la forme

$$u = u_0 + \mathcal{L}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

$$v = v_0 + \mathcal{M}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

$$w = w_0 + \mathcal{N}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

où la durée T des oscillations est supposée très petite par rapport à l'unité de temps, tandis que les rapports de u_0, v_0, w_0, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ à l'unité de vitesse ne sont pas supposés grands, non plus que les rapports de $\frac{du_0}{dt}$, $\frac{dv_0}{dt}$, $\frac{dw_0}{dt}$, $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$, $\frac{d\mathcal{M}}{dt}$, $\frac{d\mathcal{N}}{dt}$ à l'unité d'accélération, en sorte que ces rapports sont petits relativement au rapport de l'unité de temps à T. M. Korn démontre qu'il faut pour cela que, dans tout l'espace, on ait, à de petites quantités près,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{M} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

où φ désigne une fonction de x, y, z qui, dans τ_1 et dans τ_2, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k \varphi,$$

k étant une constante dont la valeur dépend de la compressibilité des deux petites masses m_1, m_2 (compressibilité que M. Korn suppose ici égale pour les deux masses), tandis que, hors τ_1 et τ_2, φ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

les dérivées de φ doivent de plus être partout continues même quand on traverse les surfaces limites des masses m_1 ou m_2 et, à l'infini, elles doivent se comporter comme les dérivées du potentiel. Si donc on suppose que le milieu M est limité par une sphère de rayon très grand sur la surface de laquelle s'exerce une pression périodique, le problème à résoudre est un problème bien déterminé de la théorie du potentiel; M. Korn donne l'expression de φ en série convergente dans le cas où la constante k est suffisamment petite.

Au premier terme de cette série ne correspond aucune force attractive ou répulsive de m_1 et de m_2; au second terme correspond une force *attractive* de m_1 et de m_2 dont l'intensité est proportionnelle à k et inversement proportionnelle au carré de la distance de m_1 et de m_2; au troisième terme correspond une force *répulsive* de m_1 et de m_2 dont l'intensité est proportionnelle à k^2 et inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance de m_1 et de m_2; au $\nu^{\text{ième}}$ terme correspond une force dont l'intensité est proportionnelle à $k^{\nu-1}$.

Si donc k est assez petit pour que l'on soit en droit de négliger k^2, on est dans le cas de la gravitation universelle; si k est assez petit pour que l'on soit en droit de négliger k^3 mais non k^2 et si les petites masses m_1 et m_2 s'approchent l'une de l'autre, en restant toutefois à une distance encore grande par rapport aux dimensions de τ_1 et de τ_2, l'intensité de la force répulsive peut arriver à dépasser celle de la force attractive : les masses s'éloignent donc *avant de se choquer*, comme si une force élastique avait agi sur chacune d'elles. Dans cette explication le principe de la conservation de l'énergie n'est pas en défaut.

Il convient d'observer que l'on ne suppose rien de particulier sur la nature de la compressibilité de m_1 et de m_2 si ce n'est que les densités de ces masses ne peuvent subir que de petites variations sous de grandes pressions. Sous la même hypothèse, on parvient aussi à fonder une théorie des frottements intérieurs dans les milieux continus. Le point de vue auquel se place M. Korn jette donc quelque jour nouveau sur la position respective des deux grandes théories cinétiques du frottement dues à Maxwell et à O. E. Meyer.

Weber (*von E.*). — Sur les formes bilinéaires et les systèmes différentiels. (231-260).

Les faits algébriques qui servent de fondement aux théories générales concernant l'intégration des équations aux dérivées partielles découlent presque tous de la même source et cette source commune est la théorie des faisceaux

de formes bilinéaires. Il a semblé intéressant à M. von Weber de chercher à mettre en pleine lumière le lien qui unit ces deux ordres de recherches, en se bornant d'ailleurs au cas où les équations différentielles ne dépendent que de deux variables indépendantes.

I. Rappel des définitions et théorèmes connus de la théorie des *systèmes différentiels*. Tout système différentiel peut être ramené à une forme d'un type particulier, dit *canonique*. Définition des systèmes canoniques *passifs*. *Ordre* de ces systèmes; M. von Weber n'envisage que des systèmes passifs du premier ordre.

II. Contribution à la théorie des faisceaux de formes bilinéaires. M. von Weber démontre par induction que si $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ désignent deux systèmes de variables, u, v deux paramètres quelconques, et W le faisceau de formes bilinéaires

$$W = u \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=n} P_{i,k} x_i y_k + v \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=n} Q_{i,k} x_i y_k,$$

où $P_{i,k}$ et $Q_{i,k}$ sont des constantes, et si un système $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de fonctions rationnelles entières, homogènes de degré h en u, v, satisfait à l'identité

$$a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0,$$

ce système $a_1, a_2, \ldots, a_m$ est nécessairement une combinaison linéaire de $h+1$ systèmes *déterminés* de formes vérifiant les mêmes identités, combinaison linéaire dans laquelle les coefficients sont d'ailleurs des fonctions rationnelles *entières* de u et de v. M. von Weber caractérise d'une façon précise ces $h+1$ systèmes *déterminés* de formes qui sont de degrés 0, 1, 2, ..., h en u, v, en s'appuyant sur la loi de formation du système complet d'*invariants* du faisceau de formes bilinéaires W (pour des transformations linéaires quelconques des deux systèmes de variables x et y) que Kronecker a appris à former (*Voir* le compte rendu des *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin* pour 1890).

III. Définition de la *matrice caractéristique* d'un système différentiel du premier ordre. Définition de ceux des systèmes différentiels du premier ordre que M. von Weber appelle *systèmes d'involution du premier ordre*. Réduction de ces systèmes d'involution du premier ordre à une *forme normale* particulièrement simple.

IV. Diviseurs élémentaires de la matrice caractéristique d'un système d'involution du premier ordre. Relation qu'il y a, dans le cas général, entre les *caractéristiques* d'un système d'involution du premier ordre et les diviseurs élémentaires de la matrice de ce système d'involution.

Pringsheim (A.). — A propos d'un critère de convergence concernant les fractions continues à termes positifs. (261-268).

Soient $a_\nu, b_\nu, q_\nu, r_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) des suites illimitées de nombres positifs.

On sait que la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q_\nu$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la fraction continue illimitée

$$(1)\qquad \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ldots+\cfrac{1}{q_\nu+\ldots}}}$$

et que la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} r_\nu$, où

$$(2)\qquad r_1=\frac{a_1}{b_1},\qquad r_{2\nu}=\frac{a_1a_3\ldots a_{2\nu-1}}{a_2a_4\ldots a_{2\nu}}\,b_{2\nu},\qquad r_{2\nu+1}=\frac{a_2a_4\ldots a_{2\nu}}{a_1a_3\ldots a_{2\nu-1}}\,\frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}},$$

est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la fraction continue illimitée

$$(3)\qquad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ldots+\cfrac{a_\nu}{b_\nu+\ldots}}}$$

Il en résulte immédiatement que la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q_\nu q_{\nu+1}$ est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour la convergence de la fraction continue illimitée (1) et que la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour la convergence de la fraction continue illimitée (3). M. Pringsheim montre que la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ est déjà une condition *suffisante* pour la convergence de la fraction continue illimitée (1); mais cette condition suffisante n'est pas, en général, *nécessaire* pour que la fraction continue illimitée (1) converge comme avait cru pouvoir l'affirmer M. Saalschütz dans le Tome 120 du *Journal de Crelle* (p. 158 en note). Elle est *nécessaire, quand on peut assigner un nombre n* tel que la suite indéfinie

$$q_n,\quad q_{n+1},\quad q_{n+2},\quad \ldots,\quad q_{n+\nu},\quad \ldots$$

soit une suite *monotone*.

De même, la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ est une condition *suffisante* pour la convergence de la fraction continue illimitée (3), mais ce n'est pas, en général, une condition nécessaire. Elle est toutefois à la fois nécessaire et

suffisante lorsque l'on peut assigner un entier n tel que la suite indéfinie

$$r_n, \quad r_{n+1}, \quad \ldots, \quad r_{n+\lambda}, \quad \ldots$$

des quantités r définies par les relations (2), soit une suite *monotone*.

Le cas où tous les nombres de la suite b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) sont égaux à 1 se présente souvent dans les applications. Dans ce cas, on voit qu'il suffit de s'assurer de la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\sqrt{a_\nu}}$ pour être certain de la convergence de la fraction continue

$$\cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \ldots}}}$$

On reconnaît ainsi, sans aucun calcul, que la fraction continue illimitée

$$(4) \qquad \cfrac{1^p}{1 + \cfrac{2^p}{1 + \ldots + \cfrac{\nu^p}{1 + \ldots}}}$$

converge pour $p = 0$ et pour tout nombre positif $p \leq 2$: si l'on tient compte des conditions sous lesquelles la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} r^\nu$ est divergente, on peut seulement en conclure la convergence de la fraction continue illimitée (4) pour $0 \leq p \leq 1$.

Plus généralement, si l'on peut assigner deux nombres finis m et n tels que les rapports $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ soient tous plus grands que m et que les rapports $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ soient tous plus petits que n, la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sqrt{b_\nu}$ suffit pour assurer la convergence de la fraction continue illimitée (3).

Seeliger (*H.*). — Sur la distribution des étoiles fixes sur la sphère céleste. (363-413).

Lindemann (*F.*). — Contribution à la théorie des fonctions automorphes. (423-454).

La décomposition en éléments simples d'une fonction doublement périodique quelconque est analogue à la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle quelconque, en ce sens que l'*élément simple* n'y devient infini qu'en *un seul* point du parallélogramme des périodes et n'y est infini que du premier ordre. La fonction qui joue le rôle d'élément simple est au fond une intégrale elliptique de seconde espèce; en intégrant cette fonction, on parvient aisément aux fonctions *thêta* elles-mêmes.

M. Poincaré a suivi une voie analogue à celle qui permet ainsi d'édifier la théorie des fonctions doublement périodiques, pour constitner sa théorie des fonctions automorphes; au lieu d'introduire des fonctions analogues aux intégrales elliptiques de seconde espèce, il a préféré introduire les fonctions thêtafuchsiennes : si l'on désigne par

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty), \qquad f_0(z) = z$$

la substitution d'un groupe donné $(a_i d_i - b_i c_i = 1)$, et par $\mathrm{H}(z)$ une fonction rationnelle de z, il suffit de former la fonction

$$\Theta(z) = \sum_k \mathrm{H}[f_k(z)]\,[f'_k(z)]^m,$$

qui est absolument convergente pour $m > 1$, sauf aux pôles de $\mathrm{H}(z)$ et à ceux de $f'_k(z) = \frac{1}{(c_i z + d_i)^2}$; on a d'ailleurs

$$\Theta[f_i(z)] = (c_i z + d_i)^{2m}\,\Theta(z),$$

en sorte que le *quotient* de deux fonctions Θ formées avec le même nombre $m > 1$ est une fonction que les transformations du groupe envisagé n'affectent pas.

Mais qu'arrive-t-il quand $m = 1$? C'est ce cas qu'il faudrait envisager pour parvenir directement, dans le cas des fonctions automorphes, à des fonctions analogues aux intégrales elliptiques de seconde espèce; mais, dans ce cas, on n'apercevait pas le moyen de démontrer la convergence des séries qui conduiraient à ces fonctions. M. Lindemann fournit la démonstration de cette convergence et comble ainsi une lacune importante dans la théorie des fonctions automorphes. Quoique présentant quelque analogie avec des recherches déjà effectuées par M. Schottky, les recherches de M. Lindemann en diffèrent cependant aussi bien par le point de départ que par le mode de démonstration. Les développements de M. Lindemann ne sont effectués que dans le cas où l'on se donne un polygone fondamental à cercle principal correspondant au groupe envisagé, mais ils peuvent être immédiatement étendus à tous les autres cas, tout comme les développements de M. Poincaré.

M. Lindemann envisage d'abord la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} f''_i(z) = -2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{c_i}{(c_i z + d_i)^3}$$

et démontre sa convergence absolue pour toutes les valeurs de z pour lesquelles aucun $f_i(z)$ n'est infini; cette série peut être intégrée terme par terme; si $z = 0$ est à l'intérieur du domaine fondamental envisagé, la série

$$\Theta_0(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(c_i z + d_i)^2} = \sum_{i=0}^{i=\infty} f'_i(z)$$

converge absolument pour chacun des points z différant des points $-\frac{d_i}{c_i}$;

on a d'ailleurs

$$\Theta_0[f_i(z)] = (c_i z + d_i)^2 \Theta_0(z).$$

M. Lindemann envisage ensuite l'expression

$$(1) \qquad \Omega(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{f'_k(\zeta)}{z - f_k(\zeta)},$$

qui dépend de la position des deux points z, ζ dont le second est supposé à l'intérieur du cercle fondamental et il démontre que la série qui représente cette expression $\Omega(z, \zeta)$ est absolument convergente. On a d'ailleurs

$$\Omega[z, f_i(\zeta)] = (c_i \zeta - d_i)^2 \Omega(z, \zeta)$$

$$\Omega[f_i(z), \zeta] = \Omega(z, \zeta) + \Omega\left[\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right],$$

en sorte que Ω se comporte comme l'intégrale d'une fonction algébrique; elle est analogue à l'intégrale abélienne de seconde espèce et il résulte des recherches de M. Poincaré qu'elle peut toujours être identifiée à une telle intégrale; c'est pourquoi M. Lindemann donne à cette expression $\Omega(z, \zeta)$ le nom d'*intégrale de seconde espèce;* $\Omega\left[\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right]$ est un module de périodicité de $\Omega(z, \zeta)$; sous l'hypothèse faite pour ζ, chacun de ces modules de périodicité de $\Omega(z, \zeta)$ est *fini*.

La fonction $\frac{d\Omega(z, \zeta)}{dz}$ n'est pas *automorphe;* elle est analogue aux fonctions Θ de M. Poincaré, car on a

$$\frac{d\Omega[f_i(z), \zeta]}{df_i(z)} = \frac{d\Omega(z, \zeta)}{dz} \frac{df_i(z)}{dz};$$

on a aussi

$$\Omega\left[\frac{a_i}{c_i}, f_i(\zeta)\right] = \frac{1}{f'_i(\zeta)} \Omega\left[\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right].$$

En intégrant par rapport à ζ la relation (1) entre les limites η et ξ représentées par des points situés à l'intérieur du cercle fondamental, on obtient une nouvelle expression convergente dans le domaine envisagé

$$S_{\xi\eta}(z) = \int_{\eta}^{\xi} \Omega(z, \zeta)\, d\zeta = \sum_{k=0}^{k=\infty} \log \frac{z - f_k(\xi)}{z - f_k(\eta)},$$

sauf aux points $z = \xi$, $z = \eta$ de ce domaine où elle est infinie logarithmiquement. M. Lindemann donne à cette expression $S_{\xi\eta}$ le nom d'*intégrale de troisième espèce*. On voit aisément que l'on a

$$S_{\xi\eta}[f_i(z)] = S_{\xi\eta}(z) + S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right);$$

les expressions $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ sont les *modules de périodicité* de l'intégrale de troisième espèce.

L'intégrale de troisième espèce jouit de la propriété que l'on appelle, dans la théorie des fonctions abéliennes, *transposition du paramètre et de l'argument* des intégrales normales de troisième espèce; on a, en effet, la relation

$$\int_{\alpha}^{\beta} dS_{\xi\eta} = \int_{\xi}^{\eta} dS_{\alpha\beta}.$$

Les modules de périodicité de l'intégrale de troisième espèce envisagés comme des fonctions de ξ, η peuvent se mettre sous la forme

$$S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \log \frac{\dfrac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)}{\dfrac{a_i}{c_i} - f_k(\eta)} = \int_{\eta}^{\xi} du_i = u_i(\xi) - u_i(\eta),$$

le dernier membre ne devenant infini pour aucun point ξ (situé à l'intérieur du cercle principal); on peut le designer sous le nom d'*intégrale de première espèce*. Si le polygone fondamental a $2n$ côtés, il y a n modules de périodicité; si ρ est le nombre des cycles dans lesquels se décomposent les sommets du polygone fondamental, le nombre des modules de périodicité qui sont linéairement indépendants est égal à $\frac{1}{2}(n+1-\rho)$.

Ceci posé, envisageons une équation différentielle linéaire d'ordre μ

$$\frac{d^{\mu} v}{dx^{\mu}} + \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \varphi_i(x, y) \frac{d^i v}{dx^i} = 0,$$

dont les coefficients $\varphi_i(x, y)$ soient des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées par une équation algébrique donnée

$$f(x, y) = 0.$$

On sait que les fonctions rationnelles $\varphi_i(x, y)$ peuvent être représentées par des fonctions univoques automorphes d'une variable z que l'on peut poser égale à $\frac{w_1}{w_2}$, où w_1, w_2 sont des intégrales particulières d'une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w \psi(x, y),$$

dans laquelle $\psi(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x, y telle que x et y soient des fonctions univoques automorphes de w. Les intégrales de l'équation différentielle linéaire d'ordre μ envisagée peuvent alors aussi être envisagées comme des fonctions de z et, sous certaines hypothèses concernant les points singuliers de cette équation différentielle linéaire d'ordre μ, ces fonctions de z peuvent être développées en séries entières en z convergentes dans le cercle-unité, si l'on s'est arrangé de façon que le cercle-unité soit le cercle principal pour les fonctions automorphes introduites par l'équation $\frac{d^2 w}{dx^2} = w \psi(x, y)$. Si $v = Z_k(z)$ désigne une intégrale de l'équation différentielle linéaire d'ordre μ,

on a

$$(2) \qquad Z_k[f_i(z)] = a_{k1}^{i} Z_1(z) + a_{k2}^{i} Z_2(z) + \ldots + a_{k\mu}^{i} Z_\mu(z),$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$; on peut d'ailleurs écrire ces relations pour $k = 1, 2, \ldots, \mu$; les fonctions Z sont des fonctions *dzêtafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V). M. Lindemann se place dans le cas où, M désignant la plus grande des valeurs absolues des coefficients $a_{k\lambda}^{(i)}$ du groupe de substitutions (2), on a

$$M\mu < 1.$$

Si alors $A_{kj}^{(i)}$ désignent les coefficients obtenus en résolvant les équations (2) et si l'on pose

$$\eta_j(z) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{k=1}^{k=\mu} A_{kj}^{(i)} \frac{f_k'(\zeta_k)}{z - f_i(\zeta_k)},$$

on voit aisément que l'on a

$$\eta_j'[f_r(z)] = \frac{1}{f_r'(z)} \sum_{l=1}^{l=\mu} A_{lj}^{(r)} \eta_l'(z),$$

en sorte que les dérivées des fonctions η_j jouissent de la propriété essentielle des fonctions ξ_j de M. Poincaré. Pour un choix convenable de la fonction Θ de de M. Poincaré, ces fonctions η_j peuvent donc servir, aussi bien que les fonctions ξ_j, à former des fonctions dzêtafuchsiennes

$$\frac{\eta_1}{\Theta}, \quad \frac{\eta_2}{\Theta}, \quad \ldots, \quad \frac{\eta_\mu}{\Theta}.$$

Les fonctions η_j jouissent d'ailleurs de propriétés analogues à celles dont jouissent les intégrales abéliennes de deuxième espèce. En les intégrant par rapport au paramètre ζ, on obtiendrait des fonctions analogues aux intégrales abéliennes de troisième espèce et les modules de périodicité des fonctions ainsi obtenues correspondraient aux intégrales abéliennes de première espèce.

Tome XXX.

Communications faites à l'Académie en 1900.

Pringsheim (A.). — Sur la façon dont se comportent les séries entières en x sur la circonférence de leur cercle de convergence. (37-100).

I. Si l'on prend pour unité le rayon du cercle de convergence d'une série entière $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ et si l'on désigne par $X = e^{i\theta}$ un point déterminé de la circon-

férence de ce cercle et par ρ un nombre réel pouvant varier de o à 1, on peut être assuré de la convergence de l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu X^\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (\alpha_\nu + i\beta_\nu) e^{\nu\theta i},$$

lorsque la limite

$$\lim_{\rho=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu$$

est finie et déterminée et que l'on peut assigner un entier n tel que, pour tout indice $\nu \geq n$, les termes $(\alpha_\nu \cos\nu\theta - \beta_\nu \sin\nu\theta)$ soient tous de même signe et que les termes $(\alpha_\nu \sin\nu\theta + \beta_\nu \cos\nu\theta)$ soient aussi tous de même signe.

La condition *nécessaire et suffisante* pour la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu X^\nu$ est que, la limite

$$\lim_{\rho=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu$$

étant finie et déterminée, on ait, en outre,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} [1 a_1 X + 2 a_2 X^2 + \ldots + n a_n X^n] = 0.$$

Si donc $\lim_{n=\infty} (n a_n) = 0$, la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ converge en *chacun* des points X de la circonférence de son cercle de convergence pour lesquels la limite

$$\lim_{\rho=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu$$

a une valeur finie et déterminée.

II. La série entière $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$, convergente dans le cercle de centre o et de rayon 1, définit, pour $|x| < 1$, une fonction univoque et continue de x que nous désignerons par $f(x)$ et dont nous dirons qu'elle *appartient* à la série entière. Aux points X de la circonférence du cercle de convergence de la série entière pour lesquels la limite

$$\lim_{\rho=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu \qquad (\rho \text{ réel positif plus petit que } 1)$$

est finie et déterminée, la fonction $f(x)$ qui appartient à la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ sera

définie par l'égalité

$$f(X) = \lim_{\rho=1} f(\rho X) = \lim_{\rho=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu;$$

aux points X de la circonférence du cercle de convergence pour lesquels l'expression $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \rho^\nu X^\nu$ ne tend pas vers une limite finie et déterminée quand ρ tend vers 1 par valeurs positives croissantes, la fonction $f(x)$ n'est pas définie.

Ceci posé, M. Pringsheim démontre que si la fonction $f(x)$ qui appartient à la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ admet une dérivée $f'(x)$ *continue* aux environs des points x situés dans le cercle de convergence et sur sa circonférence, sauf tout au plus pour des points X de cette circonférence formant un ensemble *sans étendue* où $f'(X)$ pourrait être, soit finie discontinue, soit encore ne pas exister, mais conserverait une valeur finie aux environs de ces points, et si en outre $[f'(x)]^2$ est intégrable dans le cercle de convergence et sur sa circonférence, la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ est *absolument convergente* sur la circonférence du cercle de convergence. Ces conditions suffisantes ne sont d'ailleurs pas nécessaires.

III. Il existe des séries $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ convergentes en *chacun* des points X de la circonférence de leur cercle de convergence (de centre O et de rayon 1), mais qui n'y sont pas *absolument* convergentes, et où $k = 2$ est le *plus petit* exposant pour lequel $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} |a_\nu|^k$ converge, donc pour lequel $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu^k X^\nu$ converge absolument.

IV. Si la série entière $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ converge en tous les points d'un arc (C) déterminé de la circonférence de son cercle de convergence, on peut représenter, sur l'arc (C), la partie réelle de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ et sa partie purement imaginaire, par deux séries de Fourier qui dépendent l'une de l'autre, les conditions de convergence de l'une déterminant celles de l'autre. Ce mode de représentation est essentiellement distinct de la représentation d'une fonction réelle par une série de Fourier, car, tandis que la fonction représentée par la somme d'une série de Fourier peut avoir des *discontinuités finies,* la fonction qui appartient à la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu X^\nu$ le long de (C) et qui est représentée par la somme d'une série de Fourier augmentée de i fois la somme d'un seconde série de Fourier ne peut en avoir; elle peut toutefois avoir d'autres discontinuités.

Il résulte de ce théorème qu'il serait vain de chercher à déduire, de la convergence seulement de la série $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ sur (C), la continuité sur (C) de la fonction $f(x)$ qui appartient à cette série. Il n'est, par contre, pas impossible que l'on puisse déduire, de la continuité de $f(x)$ sur (C), la convergence sur (C) de la série à laquelle appartient $f(x)$ $\left[\text{dans le cas où cette série } \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu e^{i\theta} \text{ est identique au développement de Fourier de la fonction } f(e^{i\theta})\right]$; cette question demanderait à être approfondie.

De la formule fondamentale qui exprime la dépendance de la partie réelle et du coefficient de i dans l'expression de $f(e^{i\theta})$, M. Pringsheim déduit enfin, comme cas particulier, la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \cos(\nu\theta) = \log \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \alpha \cot\frac{\alpha}{2}\, d\alpha,$$

qui, pour $\theta = 0$, fournit la relation

$$\log 2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \alpha \cot\frac{\alpha}{2}\, d\alpha;$$

en retranchant ces deux égalités, membre à membre, on retrouve une relation due à Legendre qui y est parvenu par une autre voie,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \cos(\nu\theta) = \log\left(2 \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Finsterwalder (*S.*). — Sur la construction de cartes au moyen d'observations faites en ballon. (149-164).

Gœttler (*J.*). — Représentation conforme du demi-plan sur une aire limitée par une courbe circulaire du troisième ordre ou par une courbe bicirculaire du quatrième ordre. (165-185).

Dans les *Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg* pour 1894, M. Lindemann a caractérisé un certain nombre de cas où le problème de la représentation conforme du demi-plan, sur une aire limitée par une courbe donnée, peut être résolu. Parmi ces cas se trouvent compris ceux où la courbe donnée est une conique et aussi ceux où elle est une courbe circulaire du troisième ordre ou encore une courbe bicirculaire du quatrième ordre. M. Goettler *effectue* la représentation conforme du demi-plan sur une aire limitée par l'une ou l'autre de ces dernières courbes.

Pringsheim (*A.*). — Sur le théorème dit *second théorème de la moyenne* pour des sommes finies ou pour des intégrales. (209-233).

Ce théorème se présente sous deux formes dont l'une, due à O. Bonnet, consiste à montrer que l'on a

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx$$

pour une certaine valeur de ξ comprise dans l'intervalle

$$a \leq \xi \leq b,$$

lorsque $f(x)$ est, dans tout l'intervalle $(a, \ldots, b)$ une fonction positive n'augmentant jamais quand x croît, et dont l'autre, due à P. du Bois-Reymond, consiste à montrer que l'on a

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^b \varphi(x)\,dx.$$

pour une certaine valeur de ξ comprise dans l'intervalle

$$a \leq \xi \leq b,$$

lorsque $f(x)$ est dans tout l'intervalle $(a, \ldots, b)$ une fonction monotone de x. La forme (II) de P. du Bois-Reymond est, en réalité, malgré son apparence plus générale, un simple *corollaire* de la forme (I) de O. Bonnet; c'est le théorème de O. Bonnet qui est le *théorème général*. Cependant, en utilisant une remarque due à P. du Bois-Reymond, on peut aussi écrire, au lieu de la relation (II), la relation

$$(\mathrm{III}) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mathrm{A}\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx + \mathrm{B}\int_{\xi}^b \varphi(x)\,dx$$

où A et B vérifient soit les inégalités

$$(1) \qquad \mathrm{A} \leq f(a+0) < f(b-0) \leq \mathrm{B},$$

soit les inégalités

$$(2) \qquad \mathrm{A} \geq f(a+0) > f(b-0) \geq \mathrm{B}.$$

et où ξ a, pour chaque choix de A et de B concordant, soit avec les inégalités (1), soit avec les inégalités (2), une valeur située dans l'intervalle $a \leq \xi \leq b$. Cette relation (III) comprend aussi bien la relation (II) que la relation (I) comme cas particulier.

Il est curieux d'observer que le fait de pouvoir ainsi choisir pour A et B une infinité de valeurs sans que ξ quitte l'intervalle $a \leq \xi \leq b$, repose sur des considérations arithmétiques de caractère élémentaire. M. Pringsheim le met en

évidence en établissant pour des sommes formées d'un nombre fini de termes une relation qui, pour ces sommes, joue le rôle de la relation (III); il montre d'ailleurs que l'on peut déduire aisément de cette relation la relation (III) elle-même.

Voici quelle est la relation qui joue le rôle de la relation (III) pour des sommes finies :

Soient $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ une suite *monotone* de nombres, dont les deux termes extrêmes u_0, u_{n+1} sont supposés indéterminés, les autres réels et donnés. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, des nombres quelconques donnés; pour chaque indice $\nu = 1, 2, \ldots, n$, posons

$$V_\nu = v_1 + v_2 + \ldots + v_\nu, \qquad V_0 = 0,$$

et formons la somme

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\nu v_\nu,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(3) \qquad S_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (u_\nu - u_{\nu+1}) V_\nu + u_n V_n,$$

et aussi sous la forme

$$(4) \qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (u_\nu - u_{\nu+1}) V_\nu + u_{n+1} V_n.$$

L'expression de S_n fournie par la relation (4) peut se transformer en

$$(\mathrm{III}) \qquad S_n = u_0 \mathop{\mathrm{M}}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) + u_{n+1} \left[V_n - \mathop{\mathrm{M}}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) \right],$$

où $\mathop{\mathrm{M}}\limits_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu)$ désigne une valeur moyenne de $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n$, en sorte que l'on ait ou bien pour un indice m déterminé $< n$,

$$\mathop{\mathrm{M}}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) = V_m,$$

ou bien pour un indice m déterminé, ou pour plusieurs indices m déterminés vérifiant les inégalités $0 \leqq m < n$,

$$V_m < \mathop{\mathrm{M}}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) < V_{m+1}.$$

Si les éléments de la suite monotone $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ sont tous de *même signe*, on peut prendre $u_{n+1} = 0$ quand $|u_\nu| > |u_{\nu+1}|$, $u_0 = 0$ quand

$|u_\nu| \geq |u_{\nu+1}|$, et l'expression de S_n peut s'écrire

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} S_n = u_n \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathbf{M}}} (V_\nu) & \text{quand} \quad |u_\nu| \geq |u_{\nu+1}|, \\ S_n = u_{n+1} \left[V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathbf{M}}} (V_\nu) \right] & \text{quand} \quad |u_\nu| \leq |u_{\nu+1}|. \end{cases}$$

L'expression de S_n fournie par la relation (3) peut de même se transformer en deux relations analogues à (III) et à (IV). La relation analogue à (III) est la relation

$$\text{(II)} \qquad S_n = u_1 \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n-1}{\mathbf{M}}} (V_\nu) + u_n \left[V_n - \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n-1}{\mathbf{M}}} (V_\nu) \right],$$

qui joue le rôle de celle de P. du Bois-Reymond; la relation analogue à (IV) est la relation

$$\text{(I)} \qquad S_n = u_1 \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathbf{M}}} (V_\nu).$$

qui joue le rôle de celle de O. Bonnet.

Ceci posé, M. Pringsheim établit le théorème de la moyenne pour des *intégrales*, sous la forme générale (III), en précisant les conditions que doivent vérifier les fonctions envisagées $f(x)$, $\varphi(x)$ pour que ce théorème ait lieu. La fonction $f(x)$ est supposée monotone et finie dans l'intervalle envisagé

$$(a, \ldots, b);$$

elle est donc intégrable dans cet intervalle, même si elle y a un nombre infini de points de discontinuité finis pourvu que ces discontinuités ne rompent pas la monotonie de $f(x)$. Si alors $\varphi(x)$ est, dans tout l'intervalle $(a, \ldots, b)$, finie et intégrable, ou si $\varphi(x)$ n'admet que des infinis tels que non seulement $\varphi(x)$ mais aussi $|\varphi(x)|$ soit intégrable, la fonction $\varphi(x) f(x)$ sera *nécessairement* intégrable. Sous ces conditions le théorème (III) a lieu.

La fonction $\varphi(x) f(x)$ est encore nécessairement intégrable lorsque la fonction $\varphi(x)$, étant supposée intégrable, devient infinie pour un nombre fini de points aux environs desquels $|\varphi(x)|$ ne soit pas intégrable. Ce n'est que quand ces derniers points apparaissent en nombre *infini* qu'il faut joindre expressément aux conditions précédentes sous lesquelles le théorème (III) a lieu, l'hypothèse que le produit $\varphi(x) f(x)$ est intégrable.

M. Pringsheim termine son Mémoire en comparant entre elles les diverses démonstrations du second théorème de la moyenne que l'on a données avant la sienne.

Korn (A.). — Sur le cas désigné sous le nom de semi-défini dans la théorie des maximés et des minimés. (235-246).

Envisageons une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables indépendantes x_1,

$x_2, \ldots, x_n$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point analytique dont les coordonnées a_1, $a_2, \ldots, a_n$ vérifient les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en sorte que la variation δf soit nulle en ce point; supposons aussi que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit développable en série de Taylor aux environs de ce point. Formons alors la seconde variation

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{\substack{x_1 = a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = a_n}} \delta x_i \, \delta x_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_{ik} \, \delta x_i \, \delta x_k.$$

Si l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \rho & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \rho & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(1) \qquad \rho^n + \alpha_1 \rho^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \rho + \alpha_n = 0,$$

n'a aucune de ses racines égale à zéro, la discussion qui permet de reconnaître si au point analytique $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la fonction f a un maximé ou un minimé rentre dans le cas général; mais, si cette équation admet une ou plusieurs racines nulles, on se trouve dans le cas *semi-défini*.

Dans le cas où $\delta^2 f$ est identiquement nulle en $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, il faut, pour que le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ soit maximé ou minimé, que $\delta^3 f$ soit aussi identiquement nulle en $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$; *supposons cette condition vérifiée;* si alors $\delta^4 f$ est toujours de même signe pour tous les $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, on a un minimé si ce signe est positif, un maximé si ce signe est négatif; si $\delta^4 f$ est tantôt positif, tantôt négatif, il ne peut y avoir ni maximé, ni minimé; si $\delta^4 f$, sans changer de signe, devient nulle pour certaines valeurs de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$, δx_n (qui ne soient pas toutes nulles), on a une singularité du second ordre dont l'étude n'est pas abordée par M. Korn.

Dans le cas où $\delta^2 f$ est de la forme

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=r} \rho_h \, \delta x_h^2,$$

où r est un entier égal à l'un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$, et où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ sont de même signe, il faut, pour le point analytique $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ soit maximé ou minimé, que $\delta^3 f$ soit nulle identiquement en $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$ après que l'on y a fait

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0.$$

Si cette condition est vérifiée, il faut examiner l'expression

$$\delta^4 f - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=r} \frac{1}{\rho_h} \left| \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h} \right|^2;$$

si cette expression conserve le signe commun à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ pour toutes les variations $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$, après que l'on y a fait

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0,$$

on a un maximé quand le signe commun de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ est le signe — et un minimé quand ce signe est le signe +; si cette expression prend pour un seul système de valeurs données aux variations $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$, après qu'on a fait

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0,$$

le signe contraire de celui de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$, on n'a ni maximé, ni minimé ; si cette expression, sans prendre jamais le signe contraire à celui de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$, s'annule pour quelque système de valeurs données aux variations $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$, après qu'on a fait

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0,$$

on retombe sur une singularité du second ordre.

Une transformation bien connue de Jacobi permet d'ailleurs de ramener dans tous les cas l'expression de $\delta^2 f$

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k,$$

dans le cas semi-défini, à la forme

$$\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=r} \rho_h\, \delta y_h^2,$$

où

$$0 \leqq r \leqq n-1,$$

et où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ sont de même signe, donc à l'un des deux cas particuliers que l'on vient d'examiner. On parvient ainsi au théorème fondamental que voici :

Soit $(n-r)$ *le nombre de racines nulles de l'équation* (1), *en sorte que*

$$\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Supposons que cette équation (1) *admette* r *racines positives, en sorte que la suite*

$$1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_r$$

présente r *changements de signe, ou* r *racines négatives, en sorte que la même suite* $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *ne présente aucun changement de signe. Pour que le point analytique* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *où* $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0$, *soit maximé ou minimé, il faut que l'on ait*

$$\delta^2 f = 0$$

pour toutes les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ *qui vérifient les* n *relations*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} f_{ik}\,\delta x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont r seulement sont indépendantes.

Si cette condition est vérifiée, on examinera l'expression

$$(3) \qquad \delta^2 f - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\,\delta^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \delta^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),$$

dans laquelle, si $r = 0$, on prendra tous les c_{ik} nuls, et, si r n'est pas nul, on prendra, pour $i, k = 1, 2, \ldots, n$,

$$c_{kk} = \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial f_{kk}}$$

et

$$c_{ik} = \frac{1}{2\alpha_r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial f_{ik}},$$

pour $i \neq k$.

Si cette expression (3) a toujours le signe de $-\alpha_1$ (ou toujours le même signe quand $r = 0$), on aura, en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, un maximé quand α_1 est positif, un minimé quand α_1 est négatif. Si, pour un seul des systèmes de variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ envisagés [tel que les équations (2) soient vérifiées], l'expression (3) a quand $r > 0$ le signe de α_1, il n'y aura ni maximé, ni minimé en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; si, pour les différents systèmes de variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ [tel que les équations (2) soient vérifiées], l'expression (3) n'a pas pour $r = 0$ toujours le même signe, il n'y a ni maximé, ni minimé en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Enfin si l'expression (3), tout en n'ayant le signe de α_1 pour aucun système de variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ tel que les équations (2) soient vérifiées, peut cependant s'annuler pour l'un ou l'autre de ces systèmes de variations, on retombe sur le cas des singularités du second ordre qui n'a pas encore été étudié.

Schick (*J.*). — Relations entre la centrique isogonale et la théorie des invariants. (249-272).

La *centrique isogonale* comprend l'étude des figures planes polygonales dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un plan sur les côtés d'un polygone situé dans ce plan. Soient A, B, C et P quatre points du plan des variables complexes et X, Y, Z les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les droites qui joignent BC, CA, AB. Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point A, par x_2, y_2 celles du point B, par x_3, y_3 celles du point C, par x_4, y_4 celles du point P, et posons

$$z_h = x_h + i y_h \qquad \text{pour} \qquad h = 1, 2, 3, 4.$$

La valeur absolue du rapport anharmonique

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$$

des quatre points A, B, C, P est égale au rapport $\frac{|XY|}{|ZY|}$ des longueurs des côtés XY, ZY du triangle XYZ, tandis que l'argument de ce même rapport anharmonique est égal à la mesure de l'angle XYZ que font entre eux les deux côtés XY et ZY du triangle XYZ. Si l'on effectue une transformation linéaire

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

les quatre points A, B, C, P viennent en A', B', C', P'; soient alors X', Y', Z' les pieds des perpendiculaires abaissées de P' sur les droites qui joignent B'C', C'A', A'B'; comme le rapport anharmonique des quatre points A', B', C', P' est égal au rapport anharmonique des quatre points A, B, C, P, le rapport $\frac{|X'Y'|}{|Z'Y'|}$ est égal au rapport $\frac{|XY|}{|ZY|}$ et l'angle X'Y'Z' est égal à l'angle XYZ. L'invariance de la forme du triangle XYZ entraîne une suite de conséquences intéressantes dont on peut tirer profit dans la théorie des invariants. Plusieurs de ces conséquences sont développées dans le Mémoire de M. Schick.

Weber (*E. von*). — Sur les conditions sous lesquelles un système d'équations de Pfaff peut être réduit à une forme ne contenant qu'un nombre donné d'éléments différentiels. (273-300).

Ce Mémoire contient un exposé général des recherches de M. von Weber et l'étude systématique des cas particuliers les plus simples qui peuvent se présenter.

Envisageons un système de $(n-m)$ équations de Pfaff

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} dx_{m+1} &= a_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \\ &\quad + a_{21}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + a_{m1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_m, \\ dx_{m+2} &= a_{12}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \\ &\quad + a_{22}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + a_{m2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n &= a_{1,n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \\ &\quad + a_{2,n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + a_{m,n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_m. \end{aligned}\right.$$

Désignons par τ un entier qui n'est ni plus grand que $(n-2)$, ni plus petit que $(n-m)$ et proposons-nous de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles on peut ramener ce système (1) à la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &F_{11}\,df_1 + F_{21}\,df_2 + \ldots + F_{\tau 1}\,df_\tau = 0, \\ &F_{12}\,df_1 + F_{22}\,df_2 + \ldots + F_{\tau 2}\,df_\tau = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_{1,n-m}\,df_1 + F_{2,n-m}\,df_2 + \ldots + F_{\tau,n-m}\,df_\tau = 0, \end{aligned}\right.$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_\tau$ désignent des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indépendantes les unes des autres.

Lorsque le problème est possible, les relations

$$f_1 = c_1, \qquad f_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad f_\tau = c_\tau$$

représentent, quelles que soient les valeurs données aux constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, une *intégrale* $M_{n-\tau}$ du système d'équations (1); elle est de dimension $(n-\tau)$; si on la représente par

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-\tau}), \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-\tau}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-\tau}), \end{cases}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_{n-\tau}$ représentent $(n-\tau)$ paramètres indépendants, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifieront les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial u_r} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} a_{i,1} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}, \\ \dfrac{\partial x_{m+2}}{\partial u_r} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} a_{i,2} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_r} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} a_{i,n-m} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} \\ (r = 1, 2, \ldots, n-\tau), \end{cases}$$

ainsi que les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=m} a_{i,k,1} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=m} a_{i,k,2} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=m} a_{i,k,n-m} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0 \\ (r, s = 1, 2, \ldots, n-\tau), \end{cases}$$

obtenues en dérivant les précédentes par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}$ et égalant entre eux ceux des seconds membres des relations ainsi obtenues pour lesquels les premiers membres sont identiques.

Pour que l'on puisse ramener le système d'équations de Pfaff (1) *à la forme* (2), *il faut et il suffit que le système d'équations* $(S_{n-\tau})$ *formé par les équations* (3), (4) *et celles que l'on en déduit en prenant les dérivées un nombre quelconque de fois par rapport à* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-\tau}$ *n'entraîne, ni*

quelque relation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seulement, ni le système que l'on obtient en égalant à zéro TOUS *les déterminants d'ordre* $(n-\tau)$ *de la matrice*

$$\left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{n-\tau}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_{n-\tau}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_{n-\tau}} \end{array} \right\|.$$

Un nombre fini de différentiations et d'éliminations permet d'ailleurs de vérifier, sur chaque système d'équations (1) données, si ces conditions sont vérifiées ou non.

M. von Weber aborde ensuite la recherche des conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients a_{ik} du système d'équations différentielles (1) de Pfaff pour que : par chaque variété M_1 à une dimension, intégrale de ce système d'équations (1), passe en général au moins une variété M_2 à deux dimensions, intégrale du même système (1); par chaque variété M_2 à deux dimensions, intégrale du système (1), passe au moins une variété M_3 à trois dimensions, intégrale du même système (1); ...; enfin par chaque variété $M_{n-\tau-1}$ de dimension $(n-\tau-1)$, intégrale du système (1), passe au moins une variété $M_{n-\tau}$ de dimensions $(n-\tau)$ intégrale du même système (1). Avant d'aborder ce problème, il donne des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi, concernant les systèmes $(S_{n-\tau})$, $(S_{n-\tau-1})$, ... et déduites du théorème général précédent que l'on vient d'énoncer.

Les cas où $m=1$ ou 2 sont élémentaires. M. von Weber donne la solution complète du problème pour $m=3$ et pour $m=4$. L'étude des cas où $m>4$ nécessite l'emploi de faisceaux de formes bilinéaires alternées à plus de quatre variables.

Voit (von). — Notice biographique sur Sophus Lie. (339-345).

Voit (von). — Notice biographique sur Eugène Beltrami. (345-348).

Weber (E. von). — Sur les complexes linéaires dans l'espace à quatre dimensions et sur les systèmes d'équations de Pfaff. (393-434).

Ce Mémoire fait suite à celui qui a été analysé plus haut; il est consacré à l'étude du cas où $m=5$, en sorte que les systèmes d'équations de Pfaff que l'on y envisage sont formés par $(n-5)$ équations entre n variables. Ce cas est étudié en utilisant une suite de propriétés des complexes linéaires dans l'espace à quatre dimensions, propriétés que M. von Weber commence par établir avec soin. Il parvient ainsi à établir les conditions qui sont néces-

saires et suffisantes pour qu'un système d'équations de Pfaff données

$$dx_6 = \sum_{i=1}^{i=5} a_{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i,$$

$$dx_7 = \sum_{i=1}^{i=6} a_{i2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$dx_n = \sum_{i=1}^{i=6} a_{i,n-5}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i$$

puisse être transformé, soit pour $\rho = 1$, soit pour $\rho = 2$, soit pour $\rho = 3$, en un système de la forme

$$\begin{aligned} df_{1+\rho} &= F_{11}\ df_1 + F_{21}\ df_2 + \ldots + F_{\rho 1}\ df_\rho, \\ df_{2+\rho} &= F_{12}\ df_1 + F_{22}\ df_2 + \ldots + F_{\rho 2}\ df_\rho, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ df_{n-5+\rho} &= F_{1,n-\rho}\, df_1 + F_{2,n-\rho}\, df_2 + \ldots + F_{\rho,n-\rho}\, df_\rho, \end{aligned}$$

où les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{n-5+\rho}$ sont supposées indépendantes. Ces conditions nécessaires et suffisantes fournissent d'ailleurs la solution pour $m = 5$ du problème posé dans le Mémoire précédent pour un nombre quelconque $m < n$ et déjà résolu pour $m = 2$, 3 et 4.

Parmi les résultats auxquels parvient M. von Weber, il convient de mentionner tout particulièrement le fait que, sauf dans deux cas qu'il caractérise d'une façon précise et qu'il étudie à part, la réduction d'un système de Pfaff dans lequel le nombre des variables dépasse de cinq unités le nombre des équations, se ramène à la réduction de systèmes de Pfaff dans lesquels le nombre des variables dépasse de moins de cinq unités le nombre des équations.

Pringsheim (A.). — Sur la convergence des fractions continues périodiques. (463-488).

I. Envisageons une fraction continue *périodique*

$$(1) \qquad \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots + \cfrac{a_p}{b_p + \cfrac{a_1}{b_1 + \ldots}}}}$$

dans laquelle $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ désignent des nombres quelconques réels ou complexes (les valeurs absolues des nombres a étant toutefois supposées différentes de zéro), et formons la suite

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = a_1,$$
$$B_0 = 1, \qquad B_1 = b_1,$$

et, pour $\nu \geqq 2$,

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2},$$
$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2};$$

posons enfin

$$D = (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1}.$$

Pour que la fraction continue périodique (1) soit *convergente*, il *faut* que l'on ait

$$|B_{p-1}| > 0.$$

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante lorsque D est nul; la fraction continue périodique (1) converge alors vers

$$\frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Mais si |D| est positif, il faut encore, pour que la fraction continue périodique (1) soit convergente, que la partie réelle de

$$\frac{A_{p-1} + B_p}{\sqrt{D}}$$

ne soit pas nulle. Lorsque cette condition est vérifiée, on distinguera deux cas suivant que $|A_p|$ est positif ou nul.

Si l'on désigne par $\varepsilon\sqrt{D}$ le produit de la détermination principale de la racine carrée de D par l'unité positive ou négative ε choisie telle que l'on ait

$$|A_{p-1} + B_p - \varepsilon\sqrt{D}| < |A_{p-1} + B_p + \varepsilon\sqrt{D}|$$

et, si l'on pose

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon\sqrt{D}}{2 B_{p-1}}, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p - \varepsilon\sqrt{D}}{2 B_{p-1}},$$

la fraction continue périodique (1) convergera, dans le premier cas (celui où $|A_p|$ est positif), vers x_1 quand $p \leqq 2$, tandis que, toujours dans le premier cas, quand $p \geqq 3$, il faut encore, pour la convergence de la fraction continue périodique (1), que l'on ait

$$|A_\nu - B_\nu x_2| > 0 \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p-2;$$

cette condition jointe aux précédentes est alors *suffisante*.

Dans le second cas (celui où A_p est nul), la condition que la partie réelle de

$$\frac{A_{p-1} + B_p}{\sqrt{D}}$$

ne soit pas nulle, peut être remplacée par la condition

$$\left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

et la fraction continue périodique (1) converge alors vers $x_1 = 0$.

Lorsque a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_p, b_p sont *réels*, et plus généralement lorsque $A_{p-1}+B_p$ et D sont *réels* (voir même nuls), il *faut*, pour que la fraction continue périodique (1) converge, que l'on ait

$$|B_{p-1}| > 0, \qquad |A_{p-1}+B_p| > 0, \qquad D \geqq 0.$$

Ces conditions *nécessaires* sont aussi *suffisantes* quand D est nul, ou quand, D étant positif, p est $\leqq 2$; la fraction continue périodique (1) converge alors vers

$$\frac{1}{2B_{p-1}}\left[A_{p-1}-B_p+\frac{A_{p-1}+B_p}{|A_{p-1}+B_p|}\sqrt{D}\right].$$

Quand $p \geqq 3$, il *faut* encore, pour que la fraction continue périodique (1) converge, que l'on ait

$$|A_\nu - B_\nu x_2| > 0,$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots, p-2$, en représentant par x_2 le nombre

$$\frac{1}{2B_{p-1}}\left[A_{p-1}-B_p-\frac{A_{p-1}+B_p}{|A_{p-1}+B_p|}\sqrt{D}\right].$$

II. Convenons d'appeler *fraction continue conjuguée de la fraction continue périodique* (1), dans tous les cas où $p > 1$, la fraction continue périodique

$$(2) \qquad b'_0+\cfrac{a'_1}{b'_1+\cfrac{a'_2}{b'_2+\ddots+\cfrac{a'_{p-1}}{b'_{p-1}+\cfrac{a'_p}{b'_0+\cfrac{a'_1}{b'_1+\ddots}}}}}$$

où $b'_0 = b_p$, $a'_1 = a_p$, $b'_1 = b_{p-1}$, $a'_2 = a_{p-1}$, $b'_2 = b_{p-2}$, ..., $a'_{p-1} = a_2$, $b'_{p-1} = b_1$, $a'_p = a_1$; et, dans le cas où $p = 1$, la somme de b_1 et de la fraction périodique (1) elle-même.

Si $|D| > 0$ et si la fraction continue périodique (1) converge vers x_1, la fraction continue conjuguée de (1), changée de signe, converge vers x_2, à condition toutefois que, si $p \geqq 3$, on ait

$$|A'_\nu - B'_\nu x_1| > 0,$$

pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, p-3$, en désignant par A'_ν, B'_ν les nombres formés au moyen des formules de récurrence

$$A'_0 = b'_0, \qquad A'_1 = b'_1 A'_0 + a'_1,$$
$$B'_0 = 1, \qquad B'_1 = b'_1,$$

et, pour $\nu \geqq 2$,

$$A'_\nu = b'_\nu A'_{\nu-1} + a'_\nu A'_{\nu-2},$$
$$B'_\nu = b'_\nu B'_{\nu-1} + a'_\nu B'_{\nu-2}.$$

La fraction continue conjuguée (2) de la fraction continue périodique (1) n'est

divergente que quand $A_p = 0$ et que $|A_{p-1}| < |B_p|$, auquel cas la fraction continue périodique (1) tend vers zéro. Lorsque $A_p = 0$ et que $|A_{p-1}| > |B_p|$, c'est la fraction continue périodique (1) qui est divergente tandis que sa conjuguée (2) converge vers zéro.

Si $D = 0$ et si $|B_{p-1}| > 0$, la valeur commune de la fraction continue périodique (1) et de sa conjuguée (2) changée de signe est

$$\frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Lindemann (*F.*). — Contribution à la théorie des fonctions automorphes. (493-510).

M. Lindemann reprend, en la complétant, la Communication qu'il a faite sur le même sujet en 1899 (*voir* le compte rendu du Tome XXIX des *Sitzungsberichte* de Munich). De la convergence absolue de la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} f_i''(z),$$

il avait conclu, par intégration, à celle de la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} [f_i'(z) - f_i'(z_0)],$$

puis, un peu hâtivement, à celle de la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} f_i'(z),$$

en laissant de côté le terme $f_j'(z_0)$, à la suite d'une faute de calcul. En corrigeant son erreur, il cherche à montrer pourquoi le résultat obtenu est cependant exact et il donne les raisons de la contradiction apparente de ce résultat et du résultat concernant la *divergence* de la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} f_i'(z).$$

obtenu par M. Ritter dans le Tome XLI des *Mathematische Annalen* : le groupement des termes de la série est autre dans les deux recherches.

Pringsheim (*A.*). — Sur un théorème fondamental de la théorie des fonctions périodiques. (541-552).

Désignons par $f(u)$ une fonction périodique d'une variable complexe u qui, dans tout domaine fini, n'admet qu'un nombre *fini* de périodes. On sait que Jacobi a démontré que $f(u)$ ne peut être que *simplement* ou *doublement* périodique. M. Pringsheim reprend la démonstration de ce théorème en sui-

vant une marche distincte de celle de Jacobi. Il démontre d'abord que toutes les périodes Ω de $f(u)$, dont le rapport est réel, sont des multiples d'une période ω_1 de $f(u)$; il en déduit les théorèmes suivants :

1° Si ω' et ω'' sont deux périodes quelconques de $f(u)$, le rapport $\frac{\omega''}{\omega'}$ ne peut être un nombre réel irrationnel;

2° Si les rapports de toutes les périodes Ω de $f(u)$ sont réels, $f(u)$ est une fonction *simplement périodique* et la période *primitive* de $f(u)$ est alors, à volonté, l'une ou l'autre des deux périodes $\pm\omega_1$ pour laquelle $|\omega_1|$ est minimum;

3° Si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ de deux périodes $\omega = \xi + i\eta$, $\omega' = \xi' + i\eta'$ n'est pas réel, $f(u)$ ne peut pas être *simplement périodique*.

Il reste à démontrer que, dans ce dernier cas, la fonction périodique $f(u)$ est précisément *doublement* périodique. A cet effet, M. Pringsheim établit le lemme que voici :

Si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ *de deux périodes* ω, ω' *de* $f(u)$ *n'est pas réel et si aucune autre période* Ω *de* $f(u)$ *n'est de la forme*

$$h = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega',$$

où ε, ε' *désignent des nombres réels assujettis à l'unique condition de vérifier les inégalités*

$$\varepsilon \geq 0, \qquad \varepsilon' \geq 0, \qquad \varepsilon + \varepsilon' \leq 1,$$

toute période Ω *de* $f(u)$ *peut être mise sous la forme*

$$\Omega = m\omega + m'\omega',$$

où m, m' *sont des entiers déterminés, positifs, négatifs ou nuls, en sorte que* ω *et* ω' *sont alors des* périodes primitives *de* $f(u)$.

Se plaçant ensuite dans l'hypothèse où, parmi les périodes Ω de $f(u)$, il s'en trouve dont le rapport ne soit pas réel, il démontre, en s'appuyant sur le lemme précédent, que si ω_1 désigne une période de $f(u)$ telle que la valeur absolue d'aucune période de $f(u)$ ne soit plus petite que celle de ω_1, et si ω_2 désigne une période de $f(u)$ dont le rapport à ω_1 ne soit pas réel, et qui soit, en outre, telle que la valeur absolue d'aucune des périodes de $f(u)$ autre que celles de la forme $\nu\omega_1$ (où ν est un entier quelconque positif ou négatif), ne soit plus petite que la valeur absolue de ω_2, *les périodes* ω_1, ω_2 *sont des périodes primitives de* $f(u)$. Le théorème de Jacobi est ainsi complètement démontré.

On peut encore se demander combien l'on peut former de périodes de $f(u)$, telles que deux quelconques d'entre elles forment une paire de périodes primitives comme celle qui est caractérisée par les périodes ω_1, ω_2 du théorème précédent. M. Pringsheim démontre qu'on ne saurait en former plus de 3 (aux signes près); on s'assure d'ailleurs aisément que, dans certains cas, on peut en former effectivement 3; pour ces trois périodes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3,$$

définies aux signes près, on a alors

$$|\omega_1| \leq |\omega_2| = |\omega_3|,$$

tandis que, pour aucune période Ω de $f(u)$ distincte de $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, on n'a

$$|\Omega| \leq |\omega_2|,$$

et (ω_1, ω_2), (ω_1, ω_3), (ω_2, ω_3) forment trois paires distinctes de *périodes primitives* de la fonction $f(u)$.

Tome XXXI.

Communications faites à l'Académie en 1901.

Voss (A.). — Sur une loi énergétique fondamentale de la Mécanique. (53-62).

Envisageons un ensemble quelconque de points matériels soumis à des liaisons quelconques; sur cet ensemble sont distribuées des forces données admettant un potentiel; l'ensemble est supposé en repos à l'instant actuel t à partir duquel nous voulons étudier son mouvement pendant un temps infiniment petit τ.

Parmi tous les mouvements virtuels de l'ensemble qui sont compatibles avec le principe des forces vives, il en est un pour lequel la force vive est la plus grande possible à l'instant $t + \tau$. Ce sera ce mouvement virtuel qui sera le mouvement élémentaire que prendra l'ensemble pendant le temps τ sous l'action des forces données.

Ce théorème a été démontré par Carl Neumann; M. Voss l'étend au cas où, à l'instant actuel $t = 0$, l'ensemble envisagé est en mouvement, mais en se bornant au cas où les liaisons de l'ensemble sont fixes. Il démontre qu'alors, à un instant t suffisamment petit, l'excès du double de l'énergie cinétique de l'ensemble sur l'énergie cinétique relative obtenue en rapportant le mouvement de l'ensemble à l'instant t à un repère invariable tangent à l'ensemble à $t = 0$, est plus grand que l'excès correspondant obtenu en remplaçant le mouvement réel par un quelconque des mouvements virtuels possibles à $t = 0$.

Voss (A.). — Remarques sur les principes de la Mécanique. (167-182).

La variation δI de l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U)\, dt,$$

dans laquelle α et β désignent deux constantes, en général entièrement arbitraires, T la force vive de l'ensemble matériel que l'on envisage, U la fonction des forces données distribuées sur cet ensemble et $(t_0 \ldots t_1)$ un intervalle

quelconque de temps pendant lequel on envisage le mouvement de l'ensemble, est *nulle* en vertu des équations différentielles de la Mécanique. Inversement de la condition imposée à δI de s'annuler pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons de l'ensemble, on peut déduire les équations différentielles de la Mécanique.

La condition que les déplacements virtuels de l'ensemble doivent être nuls à t_0 et à t_1, n'intervient pas dans la démonstration de M. Voss qui donne à la notion de déplacement virtuel un sens précis qu'il rattache directement au calcul des variations, mais qui ne coïncide pas avec la notion généralement adoptée du déplacement virtuel dans laquelle on *fixe* t pour ne faire varier que les coordonnées des différents points de l'ensemble à l'instant *fixé*.

Suivant le choix que l'on fait pour les constantes α et β, le principe que l'on vient d'énoncer et par lequel on peut remplacer les équations différentielles de la Mécanique, se présente sous une forme plus ou moins avantageuse. Pour $\alpha = \beta$, on retrouve le principe d'Hamilton. Pour $\beta = 0$, on tombe sur une extension du principe de la moindre action. Pour $\alpha = 0$ ou pour $\alpha = -\beta$, on obtient d'autres formes encore qui sont toutefois d'un usage moins commode dans les applications.

M. Voss insiste sur la forme *conventionnelle* du principe général par lequel on remplace les équations différentielles de la Mécanique; ce principe n'a, au fond, rien à voir avec les fondements sur lesquels repose la Mécanique, il permet seulement de *condenser* les équations de la Mécanique sous une forme particulièrement simple.

M. Voss examine enfin le principe de la *moindre contrainte* de Gauss et met en évidence que la *contrainte* est représentée par une fonction covariante de la force vive de l'ensemble.

Lindemann (*F.*). — Sur le théorème de Fermat concernant l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^n = y^n + z^n$$

pour $n > 2$. (185-202 et 495).

On sait que Kummer a vérifié le théorème de Fermat pour certaines classes de nombres entiers positifs n parmi lesquels figurent tous les nombres entiers positifs inférieurs à 100. M. Lindemann cherche à prouver que si l'on admet que, pour un entier positif quelconque n, l'équation

$$x^n = y^n + z^n$$

est vérifiée par des nombres entiers x, y, z, on tombe sur des contradictions. Deux fautes de calcul, passées d'abord inaperçues, lui ont donné l'illusion d'être ainsi parvenu à la démonstration complète du théorème de Fermat. Son Mémoire renferme toutefois des résultats intéressants; on y trouve, en particulier, la démonstration du fait mentionné par Abel d'après lequel, si les entiers x, y, z vérifient l'équation

$$x^n = y^n + z^n$$

et si aucun de ces entiers n'est divisible par n, tous trois s'expriment au

moyen de trois entiers p, q, r par des relations de la forme

$$2x = p^n + q^n + r^n,$$
$$2y = p^n + q^n - r^n,$$
$$2z = p^n - q^n + r^n,$$

tandis que si z, par exemple, contient n en facteur, les trois entiers x, y, z s'expriment au moyen de trois entiers p, q, r par des relations de la forme

$$2x = p^n + q^n + n^{n-1} r^n,$$
$$2y = p^n + q^n - n^{n-1} r^n,$$
$$2z = p^n - q^n + n^{n-1} r^n.$$

Dyck (*W. von*). — Discours prononcé par C.-G. J. Jacobi et retrouvé dans les papiers de Franz Neumann. (203-208).

Il s'agit du discours prononcé par Jacobi le 7 juillet 1832 à l'occasion de son intronisation à la Faculté de Philosophie de l'Université de Kœnigsberg dont il avait été nommé professeur ordinaire en 1829. Ce discours est écrit de la main même de Jacobi.

Weber (*E. von*). — Sur la théorie de la correspondance circulaire dans le plan. (367-408).

Les théorèmes fondamentaux de cette théorie, dus à Mœbius, peuvent être complétés et généralisés. Ainsi l'on peut envisager des correspondances dans lesquelles les deux variables qui se correspondent ont des valeurs *complexes*, au lieu de se borner, comme on le fait d'ordinaire, au cas où ces valeurs sont réelles. On peut aussi, en se plaçant au point de vue de la théorie de la correspondance circulaire, chercher à transformer la théorie des projectivités binaires que C. Segre et H. Wiener ont développée dans les *Mémoires de Turin* pour 1888, le Tome 106 du *Journal de Crelle* et les *Berichte* de Leipzig pour 1891. Après avoir rappelé, en les complétant, les principaux théorèmes fondamentaux de Mœbius concernant la théorie de la correspondance circulaire, M. von Weber aborde l'étude, d'une part de la généralisation, d'autre part de l'adaptation que l'on vient toutes deux de signaler.

Korn (*A.*). — Distribution électrique naturelle sur une surface conductrice, à courbure quelconque, donnée. (425-434).

M. Korn démontre que sur toute surface fermée, à courbure quelconque, la distribution électrique naturelle est, en chaque point, plus grande qu'un nombre positif déterminé dont la valeur ne dépend que de la *forme* de la surface fermée.

Korn (*A.*). — Solution générale du problème de l'induction magnétique. (435-440).

Envisageons un milieu magnétisé M, limité par une surface S dont la courbure varie d'une façon continue (cette surface peut être formée de plusieurs

nappes distinctes); désignons par V le potentiel dû à des causes magnétiques supposées fixes et situées hors du milieu M. Le potentiel induit total de ces causes magnétiques et du milieu M est donné en un point quelconque x, y, z de l'espace par la formule

$$Q = k \int \frac{d(Q+V)}{dn} \frac{d\sigma}{r},$$

$d\sigma$ désignant un élément de la surface S; n la demi-normale intérieure à M en $d\sigma$; r la distance de $d\sigma$ au point x, y, z; k une constante qui varie d'un milieu M à un autre; et l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S.

Le problème que M. Korn cherche à résoudre revient à déterminer une fonction $Q = Q_i$ des coordonnées des points situés dans le milieu M, et une fonction $Q = Q_e$ des coordonnées des points situés hors du milieu M, de façon que, en chaque point de la surface S, on ait

$$Q_i = Q_e,$$

et

$$(1+4k\pi)\frac{dQ_i}{dn} - \frac{dQ_e}{dn} + 4k\pi\frac{dV}{dn} = 0.$$

Ce problème rentre d'ailleurs comme cas particulier dans celui de la détermination d'une fonction potentielle U_i des coordonnées des points situés dans le milieu M et d'une fonction potentielle U_e des coordonnées des points situés hors du milieu M, de façon que, en chacun des points de la surface S, on ait

$$U_i = U_e$$

et

$$\frac{dU_e}{dn} - \frac{dU_i}{dn} = \lambda\left[\frac{dU_e}{dn} - \frac{dU_i}{dn}\right] - 2f,$$

où, λ est une constante réelle donnée et f une fonction univoque continue donnée en chacun des points de la surface S.

M. Korn montre que les fonctions Q_i et Q_e peuvent être représentées par des expressions de la forme

$$Q = -\Phi + C_0\Phi_0 + C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \ldots,$$

où, pour Q_i, Φ est celle des solutions du problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace *intérieur* à M pour laquelle les valeurs données sur S le sont par la formule

$$\frac{2k\pi}{1+2k\pi}V,$$

tandis que, pour Q_e, Φ est celle des solutions du problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace *extérieur* à M pour laquelle les valeurs données sur S le sont par la même formule $\frac{2k\pi}{1+2k\pi}V$; $C_0, C_1, C_2, \ldots$ désignent des constantes déterminées; $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ des fonctions fondamentales déterminées de Poincaré.

Dans le cas particulier où la surface S est une sphère, la solution de M. Korn se réduit à un développement connu procédant suivant des fonctions sphériques.

Lindemann (*F.*). — Sur la théorie des raies d'un spectre lumineux. (441-494).

Les longueurs d'onde des raies d'un spectre lumineux peuvent être envisagées comme les racines d'équations transcendantes dont l'expression dépend des oscillations transversales et longitudinales que l'on suppose avoir lieu à l'intérieur des atomes correspondants. En général ces racines ne peuvent être évaluées, mais on peut déduire des équations transcendantes elles-mêmes, en faisant quelques hypothèses très simples, des relations entre les spectres de divers éléments. Après avoir établi ces relations, M. Lindemann vérifie qu'elles ont effectivement lieu, au moins d'une façon approchée, dans un grand nombre de cas.

Pringsheim (*A.*). — Sur la divergence de certaines séries entières, en un point déterminé de la circonférence de leur cercle de convergence. (505-524).

Soit

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots$$

une série entière convergente dans le cercle de rayon 1. Pour que cette série converge au point $x = 1$ de la circonférence de son cercle de convergence, il *faut* d'une part que l'on ait

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} [1 a_1 + 2 a_2 + \ldots + n a_n] = 0,$$

et il *faut* aussi, d'autre part, que, s désignant un nombre fini et déterminé (valeur de la série au point $x = 1$), on ait

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} [s_1 + s_2 + \ldots + s_n] = s,$$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant des notations abrégées pour désigner les sommes

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad \ldots, \qquad s_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu;$$

l'ensemble des deux conditions nécessaires (1) et (2) constitue d'ailleurs une condition *suffisante* pour la convergence de la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu + \ldots.$$

Il est donc naturel de se demander s'il existe des séries *divergentes*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu + \ldots$$

satisfaisant, soit à la condition (1) seulement, soit à la condition (2) seulement. En ce qui concerne la condition (1) la réponse est aisée; on sait, en effet, qu'il existe des séries divergentes

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu + \ldots$$

pour lesquelles

$$\lim_{\nu=\infty} \nu a_\nu = 0$$

et l'on voit immédiatement que chacune de ces séries divergentes satisfait à la condition (1); étant divergentes et satisfaisant à la condition (1), elles ne sauraient d'ailleurs satisfaire à la condition (2). La réponse est moins aisée en ce qui concerne la condition (2); M. Pringsheim est cependant parvenu à montrer non seulement qu'il existe des séries *divergentes* satisfaisant à la condition (2), mais encore à former de telles séries.

On peut en conclure, en généralisant un théorème démontré par M. Frobenius en 1880 (*Journal de Crelle*, t. 89, p. 262) que les conditions

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0, \qquad \lim_{x=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu = A,$$

où A est un nombre fini et déterminé, qui sont *nécessaires* pour que la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu + \ldots$$

soit *convergente*, ne sont pas *suffisantes*.

La généralisation du théorème de M. Frobenius auquel on vient de faire allusion consiste en ce que, si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} s_n \right] = A,$$

où A est fini et déterminé; on a aussi

$$\lim_{x=1} \left[(1-x) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} s_\nu x^\nu \right] = A,$$

d'où

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu = A,$$

x étant supposé tendre vers 1 depuis l'*intérieur* du cercle de convergence de centre O et de rayon 1, en suivant une courbe quelconque qui ne soit pas tangente à la circonférence de ce cercle.

La démonstration de ce théorème donnée par M. Pringsheim repose sur le lemme suivant :

Envisageons le cercle de centre O et de rayon 1; menons par le point $x = 1$ deux cordes de ce cercle qui soient symétriques par rapport à l'axe des x; décrivons enfin du point $x = \frac{1}{2}$ comme centre, avec un rayon égal à $\frac{1}{2}$, un cercle et désignons par (X) *le domaine d'un seul tenant limité par la circonférence de ce cercle et par les deux cordes envisagées; en chacun des points x situés, soit à l'intérieur, soit sur le contour du domaine* (X), *sauf*

au point $x = 1$, *on a*

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{4}{a},$$

a désignant la longueur commune des deux cordes envisagées.

A la fin de son Mémoire, M. Pringsheim démontre encore les deux théorèmes généraux que voici :

I. ***Si, p désignant un nombre positif quelconque, on a***

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu\right] = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n^p}s_n\right] = A,$$

où A désigne un nombre fini et déterminé, la série entière

$$a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots$$

est convergente pour $|x| < 1$ ***et l'on a***

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^p\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu\right] = A\,\Gamma(p+1).$$

II. *Si l'on a*

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{\log n}s_n\right) = A,$$

où A désigne un nombre fini et déterminé, on a aussi

$$\lim_{x=1}\left[\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu\right] = A.$$

Du premier de ces deux théorèmes, on déduit celui de M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVII, p. 690) :

Si, p désignant un nombre positif, on a

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}}a_n\right) = A_1,$$

on a aussi

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^p\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu\right] = A_1\,\Gamma(p).$$

Tome XXXII.

Communications faites à l'Académie en 1902.

Lœwy (A.). — Sur les équations différentielles qui appartiennent à la même espèce que leurs adjointes. (3-14).

M. Lœwy montre que, par adjonction d'une racine carrée seulement, le groupe de rationalité de la $m^{\text{ième}}$ associée d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $2m$, appartenant à la même espèce que son adjointe, transforme en lui-même un faisceau de formes bilinéaires, d'une façon cogrédiente. Il en résulte que la $m^{\text{ième}}$ associée d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $2m$, appartenant à la même espèce que son adjointe, peut être rendue réductible par adjonction d'une certaine racine carrée au domaine de rationalité dont font partie ses coefficients. Lorsqu'on se donne arbitrairement une équation différentielle linéaire homogène du *second* ordre appartenant à la même espèce que son adjointe, on peut donc toujours la rendre réductible par simple adjonction au domaine de rationalité dont font partie ses coefficients, d'une racine carrée convenablement choisie.

M. Lœwy démontre ensuite que, lorsque les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre impair supposée *irréductible* et dont les coefficients faisant partie d'un domaine de rationalité R ne sont liés par aucune relation quadratique homogène à coefficients entiers, la condition *nécessaire et suffisante* pour que cette équation différentielle appartienne à la même espèce que son adjointe est que l'équation différentielle d'ordre $\frac{1}{2}n(n+1)$ qui admet comme intégrales les produits deux à deux des éléments du système fondamental envisagé, admette une intégrale faisant partie du domaine de rationalité R.

Finsterwalder (*S.*). — Sur la représentation mécanique de surfaces minimées. (15).

Cette Communication ne sera publiée qu'ultérieurement.

Günther (*S.*). — Sur certaines notions fondamentales de topographie hydrologique. (17-38).

Après avoir rappelé les travaux de Breton de Champ, de Boussinesq, de C. Jordan, M. S. Günther cherche à fixer à nouveau la notion de Thalweg par des considérations *théoriques* qui seules peuvent lui donner un sens précis; c'est dans cette même voie *théorique* qu'il convient de s'engager si l'on veut parvenir à remplacer par un critère unique et s'imposant à tous, les critères plus ou moins arbitraires et souvent contradictoires au moyen desquels on distingue habituellement un cours d'eau de ses affluents.

Si l'on trace sur une surface donnée deux systèmes de courbes orthogonales, l'un formé par les *lignes de faite*, l'autre par les lignes de *plus grande pente*, on doit tout d'abord se demander si, parmi ces lignes de plus grande pente (en général à double courbure), il en existe *une* qui soit située tout entière dans un même plan vertical; si elle existe, c'est à elle qu'il convient de donner le nom de Thalweg, quoique théoriquement elle ne puisse être le lieu de rassemblement des eaux, puisque les lignes théoriques de plus grande pente ne se rencontrent pas; chacune de ces lignes converge toutefois asymptotiquement vers le Thalweg ainsi défini.

M. S. Günther estime qu'il conviendrait d'éclairer les recherches générales qui ont eu pour objet de résoudre ce problème, en envisageant tout d'abord des cas particuliers très simples et en poussant aussi loin que possible l'étude

de ces cas particuliers. Il s'attache au cas particulier où la surface donnée est un cylindre droit à base circulaire dont l'axe est incliné sur le plan horizontal (sans lui être ni parallèle, ni perpendiculaire). Le Thalweg est alors une *droite horizontale;* les lignes de faîte sont des ellipses; les équations des projections horizontales des lignes de plus grande pente s'expriment aisément au moyen d'un arc cosinus hyperbolique et on lit sur ces équations que ces projections horizontales des lignes de plus grande pente admettent le Thalweg comme asymptote commune.

Si l'on convient d'admettre qu'à une rencontre théorique de deux courbes à l'infini, correspond pratiquement une rencontre de ces deux courbes le plus bas possible, les considérations de M. S. Günther permettent d'édifier sur une base rationnelle la topographie hydrologique. On peut établir ainsi, au moyen de considérations d'ordre topologique seulement, la loi hydrographique de la convergence de deux cours d'eau.

Korn (A.). — Sur le cas semi-défini le plus simple que l'on rencontre dans le calcul des variations. (75-90).

On sait que f désignant une fonction donnée d'une variable indépendante x, d'une fonction inconnue y de x et de la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$, on se propose dans le calcul des variations de déterminer y en fonction de x, de façon que l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx,$$

prise entre deux limites fixes données x_1 et x_2, soit maximée (ou minimée). On convient de se limiter aux fonctions y de x qui, ainsi que $y + \delta y$, sont univoques et continues dans l'intervalle envisagé $(x_1 \ldots x_2)$, admettent dans cet intervalle des dérivées du premier et du second ordre finies et continues, et qui soient telles que dans le même intervalle les dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y}$ soient univoques et continues.

Le cas envisagé par M. Korn est celui où,

$$y = \varphi(x, c_1, c_2)$$

désignant la solution générale de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$, dans laquelle on suppose c_1, c_2 remplacées par les valeurs que l'on obtient en résolvant par rapport à c_1, c_2 les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x_1, c_1, c_2) = y_1, \\ \varphi(x_2, c_2, c_2) = y_2, \end{cases}$$

conserve le même signe, en restant d'ailleurs *différente de zéro*, et où l'expres-

sion

$$\frac{\partial y}{\partial c_1}\left(\frac{\partial y}{\partial c_2}\right)_{x=x_1} - \frac{\partial y}{\partial c_2}\left(\frac{\partial y}{\partial c_1}\right)_{x=x_1},$$

dans laquelle on suppose c_1, c_2 remplacées par les solutions des mêmes équations (1), est différente de zéro pour toute valeur de x comprise *entre* x_1 et x_2, mais s'annule pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$.

M. Korn établit, dans ce cas, des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

admette un maximé (ou minimé) et aussi des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que cette intégrale n'en admette pas.

Brunn (H.). — Nouveaux théorèmes de la moyenne concernant la valeur des intégrales définies. (91-112).

1. Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions de x, univoques, monotones, finies dans un intervalle fini quelconque donné $(a\ldots b)$. Si, pour abréger l'écriture, on désigne par p le produit

$$p = [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)][b - a],$$

et si $\operatorname{sgn} p$ (le signe du nombre p) désigne l'unité positive ou négative suivant que p est positif ou négatif, les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$, et $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, vérifient nécessairement l'inégalité

$$(1) \qquad \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx;$$

il est toutefois visible que, lorsqu'une des deux fonctions $f(x)$ ou $g(x)$ est constante dans l'intervalle envisagé $(a\ldots b)$, ou encore lorsque les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont constantes dans cet intervalle, la relation (1) doit être remplacée par celle que l'on obtient en y changeant le signe d'inégalité en un signe d'égalité.

2. Soient $f(x)\,m(x)$ et $h(x)\,m(x)$ des fonctions univoques, monotones, finies dans l'intervalle $(a\ldots b)$. Supposons aussi que $m(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x située dans cet intervalle ou, d'une façon plus précise, pour aucune valeur de x vérifiant les inégalités

$$a < x < b.$$

Lorsque

$$-\operatorname{sgn}\int_a^b \left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right]\frac{dx}{m(x)} = 1,$$

on a la relation

$$\operatorname{sgn} p \frac{\int_a^b h(x)\,dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}} \leqq \operatorname{sgn} p \int_a^b h(x)\,m(x)\,dx$$
$$\geqq \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b h(x)\,dx \int_a^b m(x)\,dx,$$

qui, comme on s'en aperçoit aisément, a une portée bien moindre que l'inégalité (1), mais qui a toutefois l'avantage d'enserrer l'intégrale

$$\int_a^b h(x)\,m(x)\,dx$$

entre *deux* limites dans lesquelles ne figurent que les intégrales

$$\int_a^b h(x)\,dx, \qquad \int_a^b m(x)\,dx, \qquad \int_a^b \frac{dx}{m(x)}.$$

3. M. Brunn donne ensuite des formules qui généralisent encore l'inégalité (1). Il donne aussi une interprétation géométrique de cette inégalité.

Lindemann (F.). — Sur l'hexagone de Pascal. (153-161).

Tandis que la plupart des relations de position entre les points et les droites de l'hexagone de Pascal qui ont été étudiées jusqu'ici concernent les points de Steiner et de Kirkmann où les lignes de Pascal se rencontrent trois à trois, M. Lindemann envisage une relation de position concernant des points où se croisent deux lignes de Pascal seulement, et des lignes qui joignent deux points de Pascal sans être elles-mêmes des lignes de Pascal.

Pringsheim (A.). — Sur la théorie des fonctions transcendantes entières. (163-192).

Il s'agit de nouvelles démonstrations du théorème de M. Poincaré publié en 1883 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XI, p. 142) et des propositions plus générales établies en 1893 par M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 171) auquel on doit aussi d'avoir montré que ces propositions peuvent être formulées de façon que leurs réciproques aient encore lieu. Les démonstrations de M. Pringsheim ont un caractère élémentaire; elles reposent sur le lemme que voici :

Si

$$c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots + c_\nu r^\nu + \ldots$$
$$C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + \ldots + C_\nu r^\nu + \ldots$$

désignent deux séries partout convergentes de la variable réelle r, à coefficients réels non-négatifs et si l'on a, en désignant par A *et* γ *des nombres*

positifs *déterminés*,

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu r^\nu < A e^{\gamma r}$$

pour toute *valeur de* r *plus grande qu'un nombre positif déterminé* R, *et*

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu r^\nu > A e^{\gamma r}$$

pour une infinité de valeurs de r *parmi lesquelles figurent des valeurs choisies aussi grandes que l'on veut, on a aussi*

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leq \gamma, \qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geq \gamma.$$

On peut d'ailleurs montrer par des considérations élémentaires (*sans faire usage de la formule de Stirling*) *que l'on a aussi*

$$\limsup_{\nu=\infty} \left(\nu \sqrt[\nu]{c_\nu}\right) \leq \gamma e, \qquad \limsup_{\nu=\infty} \left(\nu \sqrt[\nu]{C_\nu}\right) \geq \gamma e.$$

Ce lemme fondamental peut être généralisé. Si, α désignant un nombre positif déterminé, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu r^\nu < A e^{\gamma r^\alpha}$$

pour *toute* valeur de r plus grande qu'un nombre positif déterminé k et

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu r^\nu > A e^{\gamma r^\alpha}$$

pour une *infinité* de valeurs de r parmi lesquelles figurent des valeurs choisies aussi grandes que l'on veut, on a

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} c_\nu} \leq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} C_\nu} \geq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et aussi

$$\limsup_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{c_\nu}\right) \leq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\limsup_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{C_\nu}\right) \geq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La réciproque du lemme fondamental n'a pas toujours lieu. Mais on peut démontrer un théorème analogue dont la réciproque a lieu :

Si quelque petit que l'on fixe un nombre positif ε, *les deux inégalités*

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu r^\nu < e^{(1+\varepsilon)\gamma r^\alpha}, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu r^\nu > e^{(1-\varepsilon)\gamma r^\alpha} \end{cases}$$

sont vérifiées, la première pour toutes *les valeurs de* r *plus grandes qu'un nombre positif* R_ε (*qui dépend en général de* ε), *la seconde pour une* infinité *de valeurs de* r *parmi lesquelles figurent des valeurs choisies aussi grandes que l'on veut, on a*

$$(2)\quad \begin{cases} \limsup\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} c_\nu} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \limsup\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} C_\nu} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{cases}$$

et aussi

$$(3)\quad \begin{cases} \limsup\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{c_\nu}\right) \leqq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \limsup\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{C_\nu}\right) \geqq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Inversement, les inégalités (2), *ou aussi les inégalités* (3), *entraînent les inégalités* (1) *sous les restrictions énoncées.*

M. Pringsheim démontre aussi les théorèmes suivants qui admettent chacun leur réciproque :

I. *Si, quelque petit que l'on fixe* ε *et quelque grand que l'on fixe* ω, *les deux inégalités*

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu r^\nu < e^{\varepsilon r^\alpha}, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu r^\nu > e^{\omega r^\alpha} \end{cases}$$

sont vérifiées, la première pour toutes les valeurs de r *plus grandes qu'un nombre positif* R_ε (*qui dépend en général de* ε), *la seconde pour une infinité de valeurs de* r (*parmi lesquelles en figurent* évidemment *qui sont aussi*

grandes que l'on veut), on a

$$(5)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} c_\nu} = \lim\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{c_\nu}\right) = 0, \\ \limsup\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} C_\nu} = \limsup\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{C_\nu}\right) = \infty. \end{cases}$$

Inversement, des égalités (5) *on déduit les inégalités* (4) *sous les mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème direct.*

II. *Si, quelque petit que l'on fixe un nombre positif* δ, *les deux inégalités*

$$(6)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu r^\nu < e^{r^{\alpha+\delta}}, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu r^\nu > e^{r^{\alpha-\delta}} \end{cases}$$

sont vérifiées, la première pour toutes les valeurs de r plus grandes qu'un nombre positif R_δ, *la seconde pour une infinité de valeurs de r parmi lesquelles figurent des valeurs choisies aussi grandes que l'on veut, on a, pour chaque* $\delta > 0$, *les relations*

$$(7)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} c_\nu} = \lim\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \sqrt[\nu]{c_\nu}\right) = 0, \\ \limsup\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} C_\nu} = \limsup\limits_{\nu=\infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \sqrt[\nu]{C_\nu}\right) = \infty. \end{cases}$$

Inversement, des relations (7) *on déduit les inégalités* (6) *sous les restrictions énoncées.*

Des propositions que l'on vient d'énoncer, on déduit sans peine les théorèmes sur les séries entières qu'il s'agit de démontrer.

THÉORÈME A. — *Si pour* toutes *les valeurs de la variable complexe x dont la valeur absolue r dépasse un nombre positif déterminé* R, *la valeur absolue de la somme d'une série partout convergente*

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_\nu x^\nu + \ldots$$

à coefficients en général complexes b_ν, *satisfait à l'inégalité*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu\right| < A e^{\gamma r^\alpha},$$

où A, γ, α *désignent des nombres positifs déterminés, on peut en conclure*

que l'on a

$$\limsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}=\limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|}\leqq(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Théorème B. — *Si pour une* infinité *de valeurs de x, parmi lesquelles en figurent d'aussi grandes que l'on veut en valeur absolue, on a*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}b_\nu x^\nu\right|\geqq \mathrm{A}e^{\gamma r^\alpha},$$

on peut en conclure que l'on a

$$\limsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}=\limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|}\geqq(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si pour tout ε positif, fixé aussi petit que l'on veut, et pour tous *les x dont la valeur absolue r dépasse un nombre déterminé R_ε (qui dépend en général de ε), on a*

$$(8)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}b_\nu x^\nu\right|<e^{\gamma(1+\varepsilon)r^\alpha},$$

où γ et α sont des nombres positifs déterminés, on peut en conclure que l'on a

$$(9)\qquad \limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|}=\limsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}\leqq(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si, pour tout $\varepsilon>0$ fixé aussi petit que l'on veut, et pour une infinité de valeurs de x parmi lesquelles en figurent dont la valeur absolue r soit aussi grande que l'on veut, on a

$$(10)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}b_\nu x^\nu\right|>e^{\gamma(1-\varepsilon)r^\alpha},$$

on peut en conclure que l'on a

$$(11)\qquad \limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|}=\limsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}\geqq(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dans le cas où les deux *hypothèses que l'on vient d'énoncer et qu'expriment les inégalités* (8) *et* (10) *sont vérifiées simultanément, on a donc nécessairement*

$$(12)\qquad \limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|}=\limsup_{\nu=\infty}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}=(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Inversement, l'hypothèse qui est exprimée par l'inégalité (9) *entraîne*

l'inégalité (8); *celle qui est exprimée par l'inégalité* (11) *entraîne l'inégalité* (10); *celle qui est exprimée par l'égalité* (12) *entraîne les deux inégalités* (8) *et* (10).

Si pour tout ε *positif fixé aussi petit que l'on veut, et pour* tous *les* x *dont la valeur absolue* r *dépasse un nombre positif déterminé* R_ε (*qui dépend en général de* ε), *on a*

$$(13)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon r^\alpha},$$

on peut en conclure que l'on a aussi

$$(14)\qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\left(\nu^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}\right) = 0.$$

Si pour tout ω *positif fixe aussi grand que l'on veut, et pour une infinité de valeurs de* x, *on a*

$$(15)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu\right| > e^{\omega r^\alpha},$$

on peut en conclure que l'on a

$$(16)\qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}|b_\nu|} = \limsup_{\nu=\infty}\left(\nu^{\frac{1}{\alpha}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}\right) = \infty.$$

Inversement (14) *entraîne* (13) *et* (16) *entraîne* (15).

Si, quelque petit que l'on fixe un nombre positif δ, *l'inégalité*

$$(17)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu\right| < e^{r^{\alpha+\delta}}$$

a lieu pour tous *les* x *dont la valeur absolue* r *dépasse un nombre positif déterminé* R_δ (*qui dépend en général de* δ), *on peut en conclure que l'on a pour chaque* $\delta > 0$

$$(18)\qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}|b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty}\left(\nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\sqrt[\nu]{|b_\nu|}\right) = 0.$$

Si, quelque petit que l'on fixe $\delta > 0$, *l'inégalité*

$$(19)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu\right| > e^{r^{\alpha-\delta}}$$

est vérifiée pour une infinité de x *parmi lesquels en figurent d'aussi grands que l'on veut en valeur absolue, on peut en conclure que l'on a pour chaque*

$\delta > 0$

$$(20) \qquad \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}-\delta}|b_\nu|} = \limsup_{\nu \to \infty} \left(\nu^{\frac{1}{\alpha}-\delta} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \right) = \infty.$$

Inversement (18) *entraîne* (17) *et* (20) *entraîne* (19).

M. Pringsheim montre enfin que le procédé qui lui a permis d'établir le lemme fondamental permet aussi de démontrer que, si pour tout x dont la valeur absolue r dépasse un nombre déterminé R, on a

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu \right| < e^{\gamma r^\alpha},$$

on peut affirmer que, à tout nombre positif ε fixé aussi petit que l'on veut, correspond un nombre positif R_ε tel que l'on ait, pour tout x dont la valeur absolue r dépasse R_ε,

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon) r^\alpha}.$$

De même, si, à tout $\eta > 0$, on peut faire correspondre un nombre positif r_η tel que, pour tout x dont la valeur absolue r dépasse r_η, on ait

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu \right| < e^{\gamma(1+\eta) r^\alpha},$$

on peut aussi lui faire correspondre un nombre R_η tel que l'on ait

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\eta) r^\alpha}$$

pour tout x dont la valeur absolue r dépasse R_η. Et si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour une infinité de x parmi lesquels s'en trouvent dont la valeur absolue r est aussi grande que l'on veut, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} |b_\nu x^\nu| > e^{\gamma(1-\varepsilon) r^\alpha},$$

on peut en conclure que l'on a aussi pour tout $\varepsilon > 0$ et pour une infinité de x parmi lesquels s'en trouvent dont la valeur absolue r est aussi grande que l'on veut,

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu x^\nu \right| > e^{\gamma(1-\varepsilon) r^\alpha}.$$

Enfin on établit des théorèmes analogues aux deux derniers, mais dans lesquels

dans les seconds membres les exposants

$$\gamma(1-\eta)r^{\alpha}, \qquad \gamma(1-\varepsilon)r^{\alpha}$$

sont remplacés par les exposants

$$\gamma r^{\alpha-\delta}, \quad \gamma r^{\alpha+\delta}.$$

Voit (*C.*), d'après *Pringsheim* (*A.*). — Notice nécrologique sur Ch. Hermite. (262-268).

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des fonctions transcendantes entières. (295-304).

Quelques remarques de M. Lüroth ont amené M. Pringsheim à simplifier encore la démonstration élémentaire qu'il avait donnée des théorèmes de MM. Poincaré et Hadamard concernant les fonctions transcendantes entières. Il démontre actuellement directement le théorème que l'on a appelé plus haut THÉORÈME A et, pour établir le THÉORÈME B, il s'appuie uniquement sur les deux lemmes que voici :

1. *Si, r désignant une variable positive, la série*

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_\nu r^\nu + \ldots$$

à coefficients réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, *est partout convergente et si pour une infinité de valeurs de r, parmi lesquelles figurent des valeurs choisies aussi grandes que l'on veut, la somme de cette série n'est pas négative, la suite des coefficients réels* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ *comprend une infinité de termes non-négatifs.*

2. *Si, k désignant un nombre plus grand que* 1, *et* $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ *une suite de nombres non-négatifs, la série*

$$(S) \qquad b_0^k + b_1^k + b_2^k + \ldots + b_\nu^k + \ldots$$

est convergente, la somme de cette série est plus petite que

$$\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu\right]^k;$$

si k est positif mais plus petit que 1, *la somme de la série* (S) *est plus petite que*

$$\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-k}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(1-\delta)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)\nu} b_\nu\right]^k,$$

quelque petit que l'on ait fixe le nombre positif δ.

J. M.

MESSENGER OF MATHEMATICS.

Tome XXXI; 1901-1903.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points du Calcul intégral. (1-8).

Sur les critères logarithmiques. Sur l'intégrale $\int_0^\infty \sin x\,\psi(x)\,dx$. Signalons l'exemple suivant :

L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{\mu} - a \sin x}\,dx$ $(a > 0)$ est infinie si l'on a

$$0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

Jourdain (*Ph.*). — Sur une fonction entière reproduisant tous les nombres entiers sans répétition. (8-11).

Telle est la fonction des nombres entiers m, n

$$\varphi(m, n) = m + \frac{1}{2}(m + n - 1)(m + n - 2);$$

l'auteur donne le moyen de former de pareilles fonctions.

Nanson (*E.-J.*). — Une identité algébrique. (12-13).

Si a, b, c, ..., x, y, z, ... désignent deux systèmes de lettres et si l'on pose

$$s_r = x a^r + y b^r + z c^r + \ldots,$$

l'identité considérée a la forme

$$s_r + p_1 s_{r-1} + \ldots + p_{r-1} s_1 + p_r s_0 = x \mathrm{A}_r + y \mathrm{B}_r + z \mathrm{C}_r + \ldots;$$

r est un entier positif; $(-1)^r p_r$ est la somme des produits différents des n lettres a, b, c, ..., r à r; A_r est la somme des produits $r-1$ à $r-1$ des $n-1$ lettres b, c, d, ...; B_r, C_r se définissent de même.

Dixon (*A.-L.*). — Quadriques homofocales et surfaces associées. (13-22).

Applications d'une méthode indiquée par M. Forsyth (*Messenger*, t. XXVII). D'une part, en partant de l'équation en u

$$k(x\,\mathrm{sn}\,u + y\,\mathrm{cn}\,u + i z\,\mathrm{dn}\,u) = a,$$

et en désignant par u_1, u_2, u_3, u_4 quatre solutions de cette équation, puis en posant

$$u_1 = -u - v - w, \quad u_2 = u - v + w, \quad u_3 = u - v - w, \quad u_4 = -(u - v + v),$$

les surfaces $u, v, w =$ const. forment un système triple orthogonal; on retrouve ainsi les quadriques homofocales; cette remarque conduira l'auteur dans l'article qui suit à d'intéressantes transformations de l'équation de Laplace.

D'autre part les deux équations

$$k'x\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta) - y\,\mathrm{cn}(\alpha+\beta) + iz\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta) = a,$$
$$k'x\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta) + y\,\mathrm{cn}(\alpha-\beta) - iz\,\mathrm{dn}(\alpha-\beta) = a$$

conduisent en supposant β constant à des quadriques homofocales, et, en supposant α constant, à des surfaces réglées du huitième degré, à quatre coniques doubles, dont l'auteur donne l'équation explicite.

Dixon (*A.-L.*). — Quelques transformations de l'équation de Laplace. (23-30).

Hardy (*G.-H.*). — Nouvelle démonstration de la série de Kummer pour $\log\Gamma(a)$. (31-33).

La formule

$$\log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x + n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1\right]$$

se déduit simplement de la considération de l'intégrale

$$\int \frac{\log 2x}{x}\,\frac{\sin(1-2a)\pi x}{\sin \pi x}\,dx,$$

le long d'un contour formé comme l'auteur l'a expliqué dans le *Quarterly Journal* (t. XXXIII, p. 369).

Biddle (*D.*). — Étude du nombre $N = \frac{1}{9}(10^{17} - 1)$. (34-47).

Ce nombre est premier.

Nanson (*E.-J.*). — Une inégalité relative aux déterminants. (48-50).

La valeur d'un déterminant symétrique positif dont les mineurs principaux de tous les ordres sont positifs ne peut dépasser le produit des éléments de la diagonale principale.

Glaisher (J.-W.). — Une série pour $\frac{\pi}{\sqrt{7}}$. (50-51).

$$\frac{\pi}{\sqrt{7}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots;$$

dans les dénominateurs ne figurent pas les multiples de 7; le signe est + ou — suivant que le reste du dénominateur relatif à 7 est 1, 2, 4 ou 3, 5, 6.

Harrisson (C.-H.). — Sur les carrés magiques. (52-63).

Extension et application d'une méthode communiquée par l'auteur à M. Rouse Ball pour la troisième édition de ses *Mathematical Recreations and Problems;* le principe en a déjà été donné dans le *Messenger* (t. XXIII, p. 65).

Glaisher (J.-W.). — Table de l'excès du nombre de diviseurs d'un nombre qui sont de la forme $3k+1$ sur le nombre de diviseurs qui sont de la forme $3k+2$. (64-72).

La fonction $H(n)$ qui désigne cet excès, pour le nombre n, est liée comme on sait à la représentation d'un nombre n par la forme x^2+3y^2, elle figure dans divers développements de la théorie des fonctions elliptiques; on a, par exemple,

$$\frac{2kK}{\pi}\,\mathrm{sn}\,\frac{2K}{3} = 2\sqrt{3}\sum_{n=1}^{n=\infty} H(2n-1)\,q^{\frac{2n-1}{2}};$$

la Table va de 1 à 1000.

Hardy (G.-H.). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (73-76).

Formation d'intégrales finies où la quantité sous le signe somme devient infinie un nombre transfini de fois.

Burnside (W.). — Sur les groupes qui contiennent $1+2p$ ou $1+4p$ sous-groupes d'ordre p^n. (77-81).

Si p^n est la plus haute puissance d'un nombre premier p qui divise l'ordre d'un groupe, le nombre des sous-groupes d'ordre p^n que le groupe contient est de la forme $1+kp$. Il y a toujours des groupes pour lesquels k est égal à 1. On peut se demander s'il y a des limitations pour l'un des nombres k, p quand l'autre est donné : si k est égal à 2, $1+2p$ doit être premier ou égal à une puissance de 3; si k est égal à 4, $1+4p$ doit être premier, égal à 9 ou à une puissance de 5.

Glaisher (J.-W.). — Table de l'excès du nombre des diviseurs d'un nombre n qui sont de la forme $8k+1$ ou $8k+3$, sur le

nombre de diviseurs qui sont de la forme $8k+5$ ou $8k+7$. (82-91).

Table analogue à celle de la fonction $H(n)$ définie plus haut.

Ferrers (*N.-M.*). — Séries pour $\frac{\pi}{\sqrt{7}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{11}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{19}}$. (92-94).

La série de M. Glaisher pour $\frac{\pi}{\sqrt{7}}$, signalée plus haut, se déduit de la formule

$$\int_0^1 \frac{1+z-z^2+z^3-z^4-z^5}{1-z^7} = \frac{\pi}{\sqrt{7}};$$

les autres séries sont obtenues par un procédé analogue.

Nanson (*E.-J.*). — Une identité relative à l'éliminant de Bézout. (95-97).

Soient

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2}\ldots,$$
$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = x^\nu - \pi_1 x^{\nu-1} + \pi_2 x^{\nu-2}\ldots,$$

et soit A_r la somme des produits des quantités $b, c, d, \ldots$; on a

$$\sum \frac{\varphi(a)}{f'(a)}(A_{r-1}A_s - A_{s-1}A_r) = (-1)^k(p_r\pi_{s-k} - p_s\pi_{r-k}).$$

Burnside (*W.*). — Sur les lignes de courbure dans les surfaces inverses. (97).

Démonstration géométrique et directe du fait que les lignes de courbure se conservent dans une inversion.

Glaisher (*J.-W.*). — Séries pour $\frac{n\pi}{\sqrt{P}}$. (98-115).

Les séries signalées plus haut par lui-même et par M. Ferrers sont contenues dans la formule de Lejeune-Dirichlet (*Zahlentheorie*, 3e édit., p. 262),

$$\sum \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\sum\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha,$$

où P est un entier de la forme $4k+3$ qui n'est pas divisible par un carré, où n doit prendre les valeurs naturelles premières à P, α les valeurs naturelles premières et inférieures à P et où $\left(\frac{n}{P}\right)$ est le symbole de la théorie des restes quadratiques. M. Glaisher donne diverses applications et transformations de cette formule, qui conduisent à de curieuses égalités numériques.

Workman (*W.-P.*). — Note sur les fractions décimales périodiques. (115).

Biddle (*D.*). — Étude du nombre

$$N = 3.2^{41} + 1 = 6597069766657.$$

(116-125).

Ce nombre est premier.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral.

Considérons l'intégrale multiple

$$\int\int\cdots\int \frac{\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\left(\sum_{i=1}^{i=k} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}\mu}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue à un champ fini dans l'espace à n dimensions; dans ce champ, la fonction Θ est supposée positive et continue; il contient d'ailleurs l'origine et le champ $(n-k)^{\text{uple}}$, passant par l'origine, qui est l'intersection des k champs $(n-1)^{\text{uples}}$ définis par les équations $f_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; on suppose que chacun de ces derniers champs est régulier, que l'origine en est un point ordinaire, et que le champ $(n-k)^{\text{uple}}$ (leur intersection) est aussi régulier; enfin chaque élément de ce champ est entièrement entouré par le domaine d'intégration. Dans ces conditions, l'intégrale converge pour $k > \mu$ et diverge pour $k \leq \mu$.

Burnside (*W.*). — Sur les racines du hessien d'une forme binaire du quatrième degré. (128-132).

Les expressions des carrés des facteurs linéaires d'une telle forme au moyen de la forme et de son hessien conduisent, en regardant les facteurs linéaires comme rationnellement connus, à un système d'identités algébriques entre ces facteurs. M. Weber les a données dans son *Lehrbuch of Algebra* comme résultant de la réduction de la forme binaire du quatrième degré à sa forme canonique. M. Burnside les établit directement.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (132-134).

Sur la formule

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^A f(x, \alpha)\, dx = \int_a^A \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx.$$

La fonction $f(x, \alpha)$ est supposée finie dans le rectangle $(a, A, \alpha_0, \alpha_0 + H)$ et intégrable pour toutes les valeurs de α que l'on considère.

M. Hardy part de cette proposition, facile à établir :

Si deux fonctions d'une variable sont définies dans un intervalle de longueur l et si leur différence y est moindre que δ, leurs intégrales par excès (ou par défaut) dans cet intervalle ne peuvent avoir une différence supérieure à δl.

Dès lors, en supposant seulement que le rapport

$$\frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h}$$

tende uniformément, pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, A), vers une limite $\frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha_0}$ quand h tend vers o par valeurs positives, et en se reportant aux définitions, on montre aisément que la fonction (de x) $\frac{\partial f}{\partial \alpha_0}$ est intégrable et que l'intégrale $\int_a^A f(x, \alpha)$ regardée comme une fonction de α admet une dérivée à droite, égale à $\frac{\partial f}{\partial \alpha_0}$. On n'a pas besoin de postuler ni la continuité par rapport à x de la fonction $f(x, \alpha)$, ni l'existence de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ pour des valeurs de α autres que α_0.

Taylor (H.-M.). — Sur la condition pour que cinq droites rencontrent une sixième droite. (135-137).

Si $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), d'une part, et l, m, n, p, q, r, de l'autre, sont les coordonnées des six droites et si L, M, N, P, Q, R sont les mineurs du déterminant du sixième ordre formé avec les 36 coordonnées relatives à l, m, n, p, q, r cette condition est

$$LP + MQ + NR = 0.$$

Nanson (E.-J.). — Sur un procédé symbolique d'intégration. (137-140).

L'extension de la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit, qu'exprime l'égalité symbolique

$$\varphi(D)uv = u\,\varphi(D)v + Du\,\varphi'(D)v + \frac{1}{2}\Delta^2 u\,\varphi''(D)v \quad \ldots,$$

et qui se démontre aisément quand φ est une fonction rationnelle entière de D, n'est pas vraie en général quand φ n'est pas une fonction entière.

Nanson (E.-J.). — Note sur les déterminants. (140-143).

Les relations linéaires entre certains mineurs d'un déterminant symétrique

découvertes en 1882 par Kronecker (*Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss.*, 1882, p. 821), ainsi qu'un théorème dû à M. Muir sur l'évanouissement de certains agrégats de déterminants tirés d'un déterminant général, sont des conséquences immédiates d'un théorème de Sylvester.

Nanson (*E.-J.*). — Un système d'équations relatives aux circulants. (143-144).

Si X_r, A_r désignent respectivement les cofacteurs de x_r, a_r dans les circulants $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, les équations

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} = \ldots = \frac{X_n}{a_n}$$

entraînent

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{x_2}{A_2} = \ldots = \frac{x_n}{A_n}.$$

Whittaker (*E.-T.*). — Note sur une fonction analogue à la fonction sigma de Weierstrass. (145-148).

L'auteur considère un groupe infini discontinu de substitutions

$$z_n = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n},$$

et forme le produit infini

$$\sigma(z, \alpha) = (z - \alpha) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[\left(1 - \frac{(z-\alpha)(z_n - \alpha_n)}{(z - z_n)(\alpha - \alpha_n)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\frac{(z-\alpha)(z_n-\alpha_n)}{(z-z_n)(\alpha-\alpha_n)}} \right],$$

où α_n est la même fonction de α que z_n de z, et où le produit infini est étendu à toutes les substitutions du groupe autres que la substitution identique.

Le produit infini est absolument et uniformément convergent pour toutes les valeurs de z, à l'exception de certaines valeurs spéciales, et cela quelle que soit la nature du groupe infini discontinu. Cette fonction n'a qu'un zéro dans chacune des régions A_0, A_1, ... du plan qui se déduisent les unes dans les autres par les transformations du groupe; elle se réduit à la fonction de Weierstrass, quand ce groupe est formé par les transformations

$$(z, z + 2m\omega + 2m'\omega').$$

Miller (*G.-A.*). — Sur un système infini de groupes conformes. (148-150).

Deux groupes distincts sont dits *conformes* s'ils ont le même nombre d'opérateurs de chaque ordre. La Note de M. Miller concerne un système infini de groupes non abéliens qui ne peuvent être conformes à aucun groupe abélien.

Hudson (*R.-W.*). — Une nouvelle méthode dans la géométrie de droite. (151-157)

Trois des six coordonnées d'une droite peuvent être regardées comme les coordonnées d'un point mobile sur une sphère de rayon un, les trois autres étant regardées comme les composantes de la vitesse de ce point. L'auteur donne quelques applications intéressantes de cette idée.

Dixon (*A.-C.*). — Sur la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\theta \cos n\theta \, d\theta.$$

(158).

En supposant n réel et $m > 0$, cette intégrale est égale à

$$\frac{\pi}{2^m} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}.$$

Hudson (*R.-W.*). — Note sur les conditions d'équilibre d'une membrane flexible soumise à la pression hydrostatique. (159-160).

Nouvelle démonstration de la formule qui relie la tension en un point et la différence des pressions sur les deux côtés de la membrane.

Hardy (*G.-H.*). — Sur les zéros de la fonction entière

$$x - \sin x = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(161-165).

On peut évidemment se limiter aux zéros $\xi + i\eta$ tels que ξ et η soient positifs tous deux. Les valeurs de ξ et η peuvent être mises sous la forme

$$\xi = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \alpha,$$

$$\eta = \log(2n + 1)\pi + \beta,$$

où n est un entier et où α, β deviennent très petits pour les zéros très éloignés.

Cunningham (Lieutenant-Colonel *A.*) et *Woodall* (*H.-J.*). — Détermination de grands nombres premiers successifs. (165-176).

Les nombres premiers que les auteurs appellent *grands* sont ceux qui dépassent 9 millions et cette appellation est légitimée par l'existence de Tables qui contiennent tous les nombres premiers plus petits que 9000000. Ils indiquent des procédés pour trouver les nombres premiers qui sont compris entre deux limites, et donnent en particulier les 117, [illegible], [illegible] et 127 nombres premiers

qui se trouvent respectivement dans les intervalles ($2^{[illegible]} - 1020$), ($2^{[illegible]} - 1020$), $\frac{1}{3}$($2^{[illegible]} - 1080$), ($3^{[illegible]} - 1020$). L'article se termine par des Tables de diviseurs.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (177-183).

Intégrales convergentes de types irréguliers.

Bromwich (*T.-J.*). — Note sur un problème de condensateur. (184-192).

M. J.-H. Michel a montré comment la représentation conforme définie par la fonction $Z(u)$ de Jacobi conduisait à une solution exacte du problème concernant un condensateur formé de deux barres conductrices parallèles, très longues, égales et placées vis-à-vis l'une de l'autre. M. Bromwich traite le même problème en partant de la représentation conforme définie par la fonction pu et compare sa solution et celle de M. Michel.

Burnside (*W.*). — Sur les lignes de courbure des surfaces inverses. (192).

La solution donnée par M. Burnside (*voir* plus haut) a été publiée antérieurement par M. H.-M. Taylor (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. V, p. 105-112).

Tome XXXII, 1902-1903.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (1-3).

Sur l'intégrale $\int_0^x [A - \varphi(\sin^2 x)]\psi(x)\,dx$.

Muir (*Th.*). — Note sur les relations linéaires de Kronecker entre déterminants. (4-6).

A propos de la Note de M. Nanson sur ce sujet, insérée dans le Tome XXXI, M. Muir signale une intéressante relation entre des produits de déterminants, susceptible d'une représentation symbolique très simple.

Dixon (*A.-C.*). — Sur une propriété des fonctions de Bessel. (7-8).

Entre deux racines réelles consécutives de $J_n(x)$, il y a une racine de $J_{n+1}(x)$ et une seule.

Bessel (*A.-C.*). — Développement de x^n en fonctions de Bessel. (8).

Nanson (*E.-J.*). — Sur les facteurs de

$$a(b-c)^m + b(c-a)^m + c(a-b)^m$$

quand m est impair. (9-11).

Expression du quotient par

$$(b-c)(c-a)(a-b)$$

de

$$a(b-c)^m + b(c-a)^m + c(a-b)^m$$

pour m impair : le quotient est divisible par $bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2$ quand n est de la forme $6k - 1$, conformément à une remarque de M. Mathews (*Educational Times Reprint*, t. LXXI, p. 57).

Glaisher (*J.-W.*). — Sur des séries pour $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{k\pi}{\sqrt{n}}$ dont les termes sont les inverses des nombres naturels. (12-30).

Diverses généralisations de la série de Gregory

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

dont un bon nombre sont tirées des formules

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \ldots,$$

$$\frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \ldots,$$

en donnant des valeurs particulières aux nombres n, m.

Signalons en passant la formule

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}} - \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{2m}} - \ldots \pm \frac{1}{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}} = \frac{m \pm 1}{2},$$

où, dans le second membre, on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que m est de la forme $4k + 1$ ou $4k + 2$.

D'autres séries résultent d'une formule de Lejeune-Dirichlet dont l'auteur avait déjà tiré parti dans un Mémoire du Volume précédent, d'autres encore

de la relation

$$\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)} + \frac{1}{(4n+1)(4n+3)\ldots(6n-1)} - \ldots$$
$$= \frac{\pi}{2^n n!}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} - (n-1)_1\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2n}} + (n-1)_2\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{2n}} - \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}(n-1)_{\frac{n-3}{2}}\frac{1}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

où n est un nombre impair et où $(n-1)_r$ désigne le coefficient de x^r dans $(1-x)^{n-1}$.

Hudson (*R.-W.*). — Coordonnées de droite dans l'espace absolu. (31-36).

Développement d'un mode particulier de correspondance entre les droites d'un espace elliptique et les points imaginaires d'un plan de cet espace.

Hardy (*G.-H.*). — Sur les zéros de certaines fonctions entières. (36-45).

Les zéros de la fonction entière

$$\sin x - \sum_0^n a_\nu x^\nu,$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont réels et a_n positifs, qui sont dans l'angle des coordonnées positives, approchent asymptotiquement des points

$$\left(2p+\frac{1}{2}\right)\pi + i\left[\log 2a_n + n\log\left(2p+\frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

Les zéros de $e^x - ax$ approchent asymptotiquement des points

$$\left(2p+\frac{1}{2}\right)\pi \pm i\log\left(2p+\frac{1}{2}\right)a\pi.$$

Hardy (*G.-H.*). — Sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log(ax^2+2bx+c)^2}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\,dx$. (45-50).

L'intégrale est calculée pour toutes les valeurs réelles de a, b, c, α, β, γ telles que sa valeur principale soit convergente; les résultats sont différents suivant la nature des racines des deux trinomes du second degré.

Hudson (*R.-W.*). — La notation des matrices dans la théorie des vis (*Screws*). (51-57).

Représentation élégante, au moyen de deux matrices, de deux vis polaires.

Young (*A.*). — Sur certains types d'invariants de formes quadratiques. (57-59).

Il s'agit d'invariants se rapportant à des formes quadratiques a_x^2, b_x^2, c_x^2, ..., linéaires par rapport aux coefficients de ces diverses formes, et de leur expression explicite, en les supposant de degré pair, au moyen des invariants irréductibles.

Taylor (*H.-M.*). — Un problème d'arrangements. (60-63).

Étant donnés n maris et leurs n femmes, de combien de manières peut-on les ranger autour d'une table de façon que chaque convive soit entre deux convives d'un autre sexe que lui, et qu'un mari ne soit jamais à côté de sa femme?

Nanson (*E.-J.*). — Sur la *pedal equation* d'une courbe plane et deux interprétations géométriques pour la puissance d'un point par rapport à une courbe. (64-66).

Forme et interprétation de la relation entre les distances r et p d'un point fixe à un point d'une conique et à la tangente en ce point.

Workmaw (*W.-P.*). — Note sur les fractions périodiques décimales. (67-68).

Forsyth (*A.-R.*). — Les grandeurs fondamentales dans la théorie générale des surfaces. (68-80).

Dans la théorie générale des surfaces (rapportées à deux paramètres), telle qu'elle a été fondée par Gauss, les grandeurs fondamentales du premier ordre (E, F, G) et celles du second ordre tiennent, comme on le sait, un rôle essentiel. Dans certaines recherches, interviennent certaines combinaisons des dérivées premières de ces grandeurs fondamentales du premier et du second ordre, qu'il convient de désigner comme grandeurs fondamentales du troisième ordre, etc. L'article de M. Forsyth est consacré à la formation de ces grandeurs fondamentales des divers ordres : celles du troisième ordre s'obtiennent en différentiant l'expression de la courbure d'une section normale, etc. Il convient de signaler, en particulier, la discussion relative aux lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic.

Dixon (*A.-C.*). — Sur le problème des cartes en couleur. (81-83).

Kolosoff (*G.*). — Sur le cas de Goriatschoff de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. (84-88).

En désignant par A, B, C les moments d'inertie, par h, k, l les coordonnées du centre de gravité (l'axe des z étant vertical et dirigé vers le nadir), il s'agit du cas où l'on a

$$A = B = 4C, \qquad k = l = 0$$

(Goriatschoff, *Collections de Moscou*, 1900).

M. Tshapliguine (*Travaux de la Societé impériale des amis de la Philosophie naturelle de Moscou*, 1901) a montré que, si la constante des aires était nulle, le problème se ramenait aux intégrales hyperelliptiques. M. Kolosoff traite la même question en se servant des équations de Hamilton.

Brill (*J.*). — Note sur les propriétés algébriques des pfaffiens. (88-92).

Addition à un Mémoire paru dans le XXXIVe Volume des *Proceedings of the London mathematical Society*.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (92-97).

Sur des intégrales multiples, s'étendant à un champ infini, conditionnellement convergentes. L'auteur estime qu'on a tort de ne regarder comme convergentes, parmi les intégrales étendues à un champ infini, que celles qui sont absolument convergentes : il y a là une question de terminologie, et tout dépend de la façon dont on fait croître le champ de l'intégrale.

Forsyth (*A.-R.*). — Sur les familles de géodésiques et sur les géodésiques parallèles. (98-107).

L'auteur montre comment diverses propriétés des lignes géodésiques ressortent facilement quand on rapporte la surface aux lignes de longueur nulle.

Barnes (*E.-W.*). — Sur la valeur de la série de Fourier

$$\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{(-1)^s e^{si\theta}}{s^{n+1}}.$$

(108-112).

En supposant que n soit un nombre naturel et en supposant $-\pi < \theta < \pi$, la valeur de cette série est

$$-\frac{(2\pi i)^{n+1}}{(n+1)!} S'_{n+1}\left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2}\right).$$

en désignant par $S_n(a)$ la $n^{\text{ème}}$ fonction de Bernoulli, définie par les conditions

$$S_n(a+1) - S_n(a) = a^n \qquad S_n(0) = 0.$$

Bromwich (*T.-J.*). — La droite des inflexions d'une cubique plane unicursale. (113-115).

Hume-Rothery (*J.-H.*). — Étude du vol planant des oiseaux. (115-128).

Cette étude est à la fois théorique et expérimentale; elle comporte des données et des calculs numériques.

Thompson. — Sur la quartique gauche rationnelle. (130-132).

Intersection d'une surface du troisième degré et d'une surface du second degré dont deux génératrices du même système sont situées sur la surface du troisième degré. Intersection de la quartique avec les vingt-sept droites de la surface du troisième degré.

Wright. — Note sur les surfaces de Weingarten dont les lignes de courbure forment un système isotherme. (133-146).

En désignant par ρ et ρ' les rayons de courbure principaux, les surfaces dont les lignes de courbure forment un système isotherme sont :

1° Les surfaces pour lesquelles $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ est constant;

2° Les surfaces de révolution;

3° Les surfaces données par une solution quelconque de l'équation

$$y^2 - y'^2 = y'\frac{d}{du}\left[y'\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{ch} x}{y'}\right)\right],$$

en supposant

$$y = F(x),$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 2\lambda F'(x),$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = -2\lambda F(x),$$

$$x = \lambda(u - v);$$

λ est une constante, u, v sont les paramètres des lignes de courbure.

Burnside (*W.*). — Sur les inversions composées et les transformations alliées. (147-159).

Généralisation de l'inversion composée de M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 79). M. Burnside montre en particulier comment toute transformation du groupe continu le plus général pour lequel

l'équation

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

est invariante peut être obtenue en composant un nombre impair d'inversions composées généralisées.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (159-165).

Exemples d'intégrales doubles, à champ infini, conditionnellement convergentes.

Thompson (*A.-P.*). — La courbe quintique rationnelle dans l'espace à quatre dimensions. (166-176).

Étude géométrique de cette courbe; représentation sur cette courbe des covariants irréductibles d'une forme binaire du cinquième degré.

Dixon (*A.-L.*). — Une généralisation du théorème d'Ivory. (177-187).

Ce théorème subsiste, en donnant au mot *distance* la signification générale signalée par Cayley, toutes les fois que l'absolu fait partie des surfaces homofocales.

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. (187-192).

Sur l'opération qui est l'inverse d'une double intégration.

L'auteur montre qu'il y a lieu de distinguer entre les trois opérations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \lim_{h=0}\lim_{k=0} \Theta(x, y, h, k),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \lim_{k=0}\lim_{h=0} \Theta(x, y, h, k),$$

$$D_{x,y} f = \lim_{h,k=0} \Theta(x, y, h, k),$$

en posant pour abréger

$$\Theta(x, y, h, k) = \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk};$$

la fonction $D_{x,y} f$ peut très bien exister lors même que les dérivées n'ont pas de sens; elle est nulle, par exemple, si l'on suppose

$$f(x, y) = \varphi(x) + \chi(y),$$

en supposant seulement que les fonctions $\varphi(x)$, $\chi(y)$ soient définies pour

toutes les valeurs de x, y, sans qu'on suppose rien sur la continuité de ces fonctions ou l'existence de leurs dérivées.

Signalons le théorème suivant :

Si $\mathrm{D}f(x, y)$ *est une fonction continue dans le rectangle* $(a, \mathrm{A}, b, \mathrm{B})$, *on a*

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}) - f(\mathrm{A}, b) - f(a, \mathrm{B}) + f(a, b) = (\mathrm{A} - a)(\mathrm{B} - b)\,\mathrm{D}f(\xi, \eta)$$
$$[a \leq \xi \leq \mathrm{A},\ b \leq \eta \leq \mathrm{B}].$$

On en conclut que, si $\mathrm{D}f$ est nulle dans le rectangle $(a, \mathrm{A}, b, \mathrm{B})$, elle est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y.

J. T.



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK [1].

La Revue fondée par O. Schlömilch en 1856, sous le titre de *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, est consacrée désormais aux Mathématiques appliquées. Les Professeurs R. Mehmke, à Stuttgart, et C. Runge, à Hanovre, qui ont pris en 1901 la succession de M. Cantor à la direction de cette Revue en expliquent (pages 8-10) le nouveau but, qui est la publication d'articles relatifs à la Mécanique rationnelle ou technique, à la Physique mathématique, aux méthodes de calcul numérique, à la Géométrie descriptive, à la Géodésie, etc.

La Revue publie aussi un répertoire des articles concernant les Sciences appliquées et parus dans 270 des plus importants périodiques; les titres de ces articles sont classés, par ordre de matières, par E. Wölffing, Tome XLVI, pages 390-418; Tome XLVII, pages 287-317; Tome XLVIII, pages 152-182; un répertoire spécial est consacré aux publications techniques, Tome XLVI, pages 501-506; Tome XLVII, pages 317-320; Tome XLVIII, pages 183-192.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVI, p. 157.

Tome XLVI; 1901.

Helm (Georg.). — Notice sur O. Schlömilch (1823-1901). (1-7).

Sommerfeld (A.). — Étude théorique sur la diffraction des rayons de Röntgen. (11-97).

Le point de départ est l'hypothèse de Wiechert et de sir Georges Stokes : les particules qui constituent les rayons cathodiques produisent un choc en frappant un obstacle; ce choc est la cause d'un fort et rapide ébranlement qui trouble l'équilibre de l'éther et se propage dans le temps et l'espace suivant les équations de Maxwell.

L'auteur examine le cas d'une seule impulsion plane se propageant depuis l'infini et arrivant sur un écran ou sur une fente dont les arêtes sont parallèles au plan de l'impulsion; il suffit de traiter le problème analytique dans un plan normal à ces arêtes, avec deux variables x et y. L'impulsion peut être représentée par une fonction de la forme $e^{-k^2(x+Vt)^2}$, où k est très grand, ou par une fonction égale à zéro pour $|x+Vt| > \frac{\lambda}{2}$, et à l'unité pour $|x+Vt| < \frac{\lambda}{2}$, λ étant un nombre très petit qui représente la largeur de l'impulsion.

Le problème revient à la recherche d'une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

qui satisfasse à des conditions données; l'auteur l'a résolu dans le cas d'un écran en imaginant une surface de Riemann à deux feuillets dont la ligne de jonction est la trace de l'écran sur le plan xOy, et en cherchant une solution uniforme sur cette surface; le feuillet supérieur correspond à la réalité physique, l'autre est une surface idéale sur laquelle passe l'énergie de l'impulsion au contact de l'écran. L'auteur exprime la solution par une intégrale définie, montre qu'elle est unique et calcule l'énergie de l'impulsion; il reprend ensuite le problème en partant du principe de Huyghens tel qu'il a été exposé par Kirchhoff et formulé dans le cas de deux dimensions par Volterra (*Rendiconti dei Lincei*, 1892); les deux méthodes conduisent à des résultats sensiblement identiques lorsque λ est très petit.

Lorsque la diffraction est produite par une fente de largeur $\varkappa$, la méthode de la surface de Riemann est impuissante à fournir la solution, que l'auteur déduit du principe de Huyghens; il calcule l'effet de l'impulsion diffractée sur une plaque photographique, et trouve que l'effet le plus net se manifeste à la distance $\frac{\varkappa^2}{8\lambda}$ de la fente; il discute les observations de Haga et Wind (*Annales de Wiedemann,* 1899) et, par comparaison avec ses calculs, il estime que la largeur λ de l'impulsion est égale à $0^{\mu\mu},13$ et sa durée égale à $0,4 \times 10^{-18}$ secondes.

Killermann (*Anton*). — Foyers des lentilles; détermination des constantes des lentilles. (98-133).

Un rayon tombant sur la surface de séparation de deux milieux se divise en deux parties dont l'une est réfléchie et l'autre réfractée; les rayons issus d'un point à distance finie ou infinie subissent sur les deux faces d'une lentille des réflexions et des réfractions donnant lieu chacune à un point conjugué ou à un foyer; l'auteur donne les formules qui déterminent tous les points ainsi obtenus.

Disteli (*M.*). — Sur les courbes et surfaces d'engrenages. (134-181).

Suite de l'article du même auteur, Tome XLIII de cette Revue.

On considère deux surfaces réglées S_1, S_2 animées de mouvements de rotation autour de deux arbres O_1, O_2 et en même temps de mouvements de translation le long de ces arbres; comment doit-on déterminer S_1 et S_2 pour qu'elles se raccordent à chaque instant suivant une génératrice commune g, et pour que leur mouvement relatif soit analogue à celui des engrenages cylindriques ou coniques, c'est-à-dire ne renferme pas de glissement parallèle à g?

L'auteur examine d'abord le cas où les mouvements de S_1 et S_2 sont héliçoïdaux et sont représentés par deux vis; g est alors l'axe de la vis résultant de la deuxième vis et d'une autre opposée à la première; S_1 et S_2 sont des héliçoïdes engendrés par g dans les deux mouvements donnés. Pour que la vitesse relative parallèle à g soit nulle, il faut que les héliçoïdes soient développables ou que leurs lignes de striction soient tangentes entre elles. Lorsqu'on donne une des vis et l'axe de l'autre, les droites g répondant à la question se répartissent suivant des surfaces réglées G dont les plus simples sont des conoïdes de Pluecker.

L'auteur examine ensuite le cas où les rotations et les translations relatives à O_1 et O_2 sont quelconques; à chaque instant il existe des héliçoïdes S_1, S_2 tangents le long d'une droite g et réalisant la transformation de mouvement pendant un temps infiniment petit; les droites g relatives aux instants successifs ont comme lieu une des surfaces G dont on a parlé; elles déterminent des surfaces réglées R_1, R_2 rattachées aux axes O_1 et O_2, et répondant à la question. Pour que le glissement le long de g soit nul, il faut et il suffit que R_1 et R_2 soient applicables l'une sur l'autre; à chaque surface G correspond une relation entre le rapport des vitesses angulaires autour de O_1 et O_2 et le rapport des vitesses de translation le long de ces axes. Suivent des exemples particuliers.

Wittenbauer (*F.*). — Sur le choc de filets liquides libres. (182-198).

La pression causée par le choc d'un filet liquide sur une plaque plane, oblique à la direction du filet, est étudiée en partant du théorème de la quantité de mouvement projetée et du principe de la moindre contrainte de Gauss. Cas où le mouvement des filets sur la plaque est gêné par des obstacles. Exemples.

Somoff (*P.*). — Applications de la cinématique des systèmes déformables aux systèmes articulés. (199-217).

Étude des systèmes articulés, dérivés du plagiographe ou pantographe de Sylvester, permettant la description d'une figure semblable ou d'une figure homothétique à une figure donnée. Cas où les points du mécanisme primitivement fixes décrivent des courbes données.

Proell (*Reinhold*). — Règle à calculs héliçoïdale. (218-223).

Runge (*C.*). — Sur les fonctions empiriques et l'interpolation entre ordonnées équidistantes. (224-243).

Premier problème. — $f(x)$ étant une fonction réelle et h une quantité fixe, on forme la suite des polynomes $G_0(x)$, $G_1(x)$, ... tels que $G_n(x)$ soit de degré n et ait les mêmes valeurs que $f(x)$ pour $x = 0, h, 2h, \ldots, nh$; cette suite de polynomes est-elle convergente?

Elle ne l'est pas toujours, comme le montre l'exemple de $f(x) = e^x$; la suite n'est convergente dans ce cas que pour $h < \log 2$. Même problème lorsqu'on interpole pour les valeurs $0, \pm h, \pm 2h, \ldots$.

Deuxième problème. — a et b étant deux quantités fixes réelles, on insère entre elles $n-1$ moyens arithmétiques et l'on forme le polynome $G_n(x)$, de degré n, qui a les mêmes valeurs qu'une fonction donnée $f(x)$ pour les $n+1$ termes ainsi déterminés; la suite des polynomes $G_n(x)$ est-elle convergente lorsque n augmente indéfiniment?

Si $g_n(x)$ est le polynome qui s'annule pour les $n+1$ valeurs de x considérées, la formule de Cauchy donne

$$f(x) = G_n(x) + \frac{1}{2i\pi}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \cdot \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

l'intégrale relative à la variable complexe z étant étendue à un contour ne renfermant pas de point singulier de $f(z)$; il suffit donc d'étudier le terme complémentaire.

Si $U(x, y)$ est la partie réelle de la fonction

$$\frac{z-a}{b-a}\log(z-a) + \frac{z-b}{a-b}\log(z-b),$$

et si l'on trace la courbe de la famille $U(x, y) = \text{const.}$ qui passe par un point singulier de $f(z)$ sans en contenir d'autre à son intérieur, la limite de $G_n(x)$ n'existe et ne représente $f(x)$ que dans la portion du segment (a, b) intérieure à cette courbe.

Mehmke (*R.*). — Une construction d'ombres. (244-245).

Mehmke (*R.*). — Construction de l'intersection d'une surface enveloppe avec une surface plane ou courbe. (246-248).

C'est l'enveloppe des sections des surfaces enveloppées.

Rohrbach (*Carl*). — Un nouveau trait de perspective. (249-250).

Cas où le point de fuite est hors des limites de l'épure.

Finsterwalder (*S.*). — Solution d'un problème proposé Tome XLII. (251-253).

Le filet d'un ballon sphérique est un réseau constitué par deux familles de loxodromies; étude de ses déformations lorsqu'on l'applique sur un plan ou sur une surface de révolution.

Heymann (*W.*). — Sur les groupes de racines découpés par des contours polygonaux. (265-296).

Application du procédé indiqué dans le Tome 113 du *Journal de Crelle* pour calculer par approximations successives les abscisses des points communs à deux courbes $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$; cas où $\varphi(x) = x$. On construit une ligne polygonale dont les sommets sont alternativement sur les deux courbes et les côtés alternativement parallèles aux axes et l'on cherche les points limites; cas où la ligne polygonale se ferme.

Heymann (*W.*). — Détermination des axes d'une ellipse dont on donne le périmètre et la surface. (296-299).

Salfner (*Eduard*). — Sur les rotations en Géométrie descriptive. (300-310).

Applications à la recherche de la plus courte distance de deux droites et de l'angle de deux plans, ainsi qu'à la construction d'un trièdre dont on donne les trois dièdres.

Timerding (*H.-E.*). — Sur un problème de Géométrie descriptive. (311-323).

Construction des droites s'appuyant sur quatre droites données. La surface réglée du second ordre déterminée par trois des droites est coupée par deux plans issus de la quatrième suivant des coniques rapportées projectivement l'une à l'autre; les trois premières droites déterminent sur ces plans deux triangles dont les côtés homologues rencontrent la quatrième droite en des couples de points homologues; les points doubles des divisions ainsi définies sont les points d'où sont issues les deux droites cherchées. La correspondance définie sur les deux coniques fournit les contours apparents de la surface réglée.

Grünwald (*Josef*). — Sur la construction des figures renfermant des points, des droites et des plans imaginaires. (323-329).

Addition à l'article Tome XLV, page 10; construction de l'homologue d'un point réel *m* dans l'involution gauche définie par deux droites imaginaires

conjuguées. Les deux directrices étant définies par les quaternes (a, b, a', b'), (a, b', a', b) de génératrices d'un système réglé, on mène par le point m les transversales $m\alpha\beta'$, $m\alpha'\beta$ s'appuyant sur a, b' et sur a', b; l'intersection de $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ est le point m' cherché.

Müller (*R.*). — Les courbes liées au mouvement de la bielle et touchées en six points par une tangente. (330-342).

Addition aux articles des Tomes XLII et XLIII de cette Revue. Pour un choix particulier des côtés d'un quadrilatère articulé dont un membre est fixe, un point qui est sur la bielle ou qui lui est invariablement lié décrit une courbe dont la tangente en un point particulier a six points confondus communs avec la courbe; celle-ci se confond sensiblement avec une droite aux environs du point et le mécanisme peut remplacer le parallélogramme de Watt.

Les quadrilatères répondant à la question dépendent d'un paramètre variable: le plus simple d'entre eux est un trapèze de seconde espèce dont la grande base est fixe et vaut trois fois la petite base, les côtés obliques valant quatre fois celle-ci; le milieu de la petite base décrit une courbe rencontrée six fois par la tangente parallèle à la grande base.

Cramer (*Hans*). — Sur le mouvement caché. (343-347).

A l'aide du principe du mouvement caché, la loi de Weber relative à l'action de deux masses électriques se ramène à l'attraction newtonienne.

Graefe (*F.*). — Relations entre l'ellipse centrale d'inertie et les cercles d'inertie. (348-353).

Un cercle passant par le centre de l'ellipse centrale d'inertie et par les points où une des tangentes à cette ellipse rencontre le cercle de Monge est un cercle d'inertie dont le point principal est le point de contact de la tangente considérée; connaissant les moments d'inertie par rapport à trois droites dont deux sont rectangulaires, on peut construire un cercle d'inertie et son point principal et en déduire le moment par rapport à une droite quelconque.

Staeckel (*Paul*). — Remarque sur une Note de R. Ziegel. (354).

La Note du Tome XLV, page 338, est une conséquence d'un théorème connu sur les fonctions des racines d'une équation irréductible.

Kriemler (*Ch.-J.*), *Pilgrim* (*L.*), *Kübler* (*J.*). — Remarques sur la résistance au flambement. (355-371).

Kübler a publié dans le Tome XLV de cette Revue un article sur la résistance au flambement; Kriemler relève des fautes de calcul et montre que le résultat exact est celui que donne la formule d'Euler corrigée.

Pilgrim arrive aux mêmes conclusions et pousse plus loin l'approximation; dans le cas d'une compression axiale, le flambement ne se produit pas tant que

sa valeur P est inférieure à la valeur P_0 donnée par

$$P_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2(1-\varepsilon_0)}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{P_0}{E\Omega};$$

lorsque $P > P_0$, la flèche f produite est donnée par des formules renfermant des fonctions elliptiques, mais si $P < 5P_0$, on peut se contenter de la formule approchée

$$\frac{f}{l} = 1{,}255\,\frac{P_0}{P}\sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_0}}-1}.$$

Kübler justifie ses calculs, en disant qu'ils s'appliquent à une poutre déjà pliée, dont les extrémités sont ensuite maintenues fixes.

Klein (F.). — Sur la fonction de Bruns appelée *Eikonal*. Transformation collinéaire de l'espace dans la théorie des instruments d'optique. (372-382).

Bruns a étudié la marche des rayons lumineux dans un instrument d'optique à l'aide des dérivées partielles d'une fonction de quatre variables qu'il appelle *Eikonal;* Klein montre qu'elle se déduit de la fonction caractéristique de Hamilton, égale au temps employé par la lumière à traverser les milieux successifs.

Klein démontre géométriquement les résultats de Bruns relatifs à un instrument d'optique absolu; si les rayons issus d'un point concourent tous au point conjugué, l'instrument opère une transformation collinéaire de l'espace qui est une similitude.

Francke (Adolf). — Résistance au flambement de colonnes de section variable. (419-434).

Généralise pour les poutres de section variable et chargées debout les calculs qui conduisent à la formule connue d'Euler relative au flambement des pièces de section constante.

Kutta (Wilhelm). — Contribution à l'intégration des équations différentielles par approximations successives. (435-453).

Complément de l'article de Runge (*Math. Ann.*, t. XLVI) et de celui de Heun (cette Revue, t. XLV). Soit x, y un système de valeurs relatives à une solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; on se propose de déterminer l'accroissement Δy relatif à un accroissement donné Δx de la variable; on cherche une suite de valeurs $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, ... et des coefficients α_1, α_2, ... tels que la différence

$$\Delta y - (\alpha_1 \Delta_1 y + \alpha_2 \Delta_2 y + \ldots)$$

soit d'ordre le plus élevé possible en Δx. La méthode s'applique d'une infinité de manières jusqu'au quatrième ordre, mais non au delà; le calcul approché

de Δy le plus simple est donné par les formules

$$\Delta_1 y = f(x, y)\,\Delta x,$$
$$\Delta_2 y = f\left(x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta_1 y}{3}\right)\Delta x,$$
$$\Delta_3 y = f\left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \Delta_2 y - \frac{\Delta_1 y}{3}\right)\Delta x,$$
$$\Delta_4 y = f(x + \Delta x, y + \Delta_3 y - \Delta_2 y + \Delta_1 y)\,\Delta x,$$
$$\Delta y = \frac{1}{8}(\Delta_1 y + 3\Delta_2 y + 3\Delta_3 y + \Delta_4 y).$$

Jolles (*Stanislaus*). — Théorie géométrique de la poutre parabolique. (453-456).

Considérons un système réticulaire dont la membrure inférieure est horizontale et la membrure supérieure est parabolique, possédant des traverses verticales et d'autres obliques et supposons qu'une charge régulière se déplace sur la membrure inférieure; par la statique graphique, on voit que le maximum de l'effort dans une traverse oblique est proportionnel à sa longueur.

Grusinzew (*A.-P.*). — Théorie de la capillarité et de l'hydrostatique. (457-470).

L'hydrostatique et la capillarité peuvent être traitées simultanément en considérant un liquide comme un système de points matériels remplissant d'une manière continue un volume donné; les forces intérieures, en vertu des liaisons existantes, dérivant d'un potentiel qui est fonction de la densité du liquide et du rayon de la sphère d'action moléculaire.

L'auteur applique le principe du travail virtuel aux forces extérieures et intérieures en distinguant :

1° Les points intérieurs au volume occupé par le liquide;
2° Les points de la surface de contact avec les corps fixes;
3° Les points de la surface libre du liquide.

Pour les premiers, le potentiel des forces intérieures ne dépend que de la densité; pour les autres, il dépend de l'épaisseur de la couche superficielle du liquide et aussi de sa densité; celle-ci, comme dans la théorie de Poisson, peut avoir une valeur différente de celle qu'elle a dans le volume; les actions du fluide voisin sur la surface libre sont remplacées par des forces réparties sur la surface.

Le principe du travail virtuel et la condition relative à la compressibilité ou l'incompressibilité du liquide conduisent pour les points intérieurs aux équations usuelles et au principe de Pascal, pour les points de la surface libre à la pression capillaire et à la tension superficielle; enfin, pour les points du contour de cette surface, à l'angle d'accommodation, qui dépend seulement de la densité et de l'épaisseur des couches superficielles.

Denizot (*Alfred*). — Sur un problème d'Euler relatif au pendule. (471-479).

Un corps pesant repose sur un plan horizontal par une surface cylindrique de révolution qui peut rouler sans glisser sur le plan; le mouvement de ce pendule, déjà proposé en exercice par Jullien, dépend d'intégrales elliptiques qui sont calculées complètement ici; une faute de calcul est rectifiée page VI.

Mehmke (*R.*). — Calcul des racines d'équations du deuxième ou troisième degré par la machine à calculer. (479-483).

Soient α et $\alpha+1$ deux entiers consécutifs comprenant une seule racine x d'une équation algébrique; dans la transformée en $x-\alpha$, on ne garde que le terme constant et le terme du premier degré; on a ainsi le premier chiffre décimal de la racine et ainsi de suite. Les calculs s'effectuent rapidement avec la machine à calculer.

Tome XLVII; 1902.

Fischer (*Victor*). — Analogies avec la Thermodynamique. (1-14).

Helmholtz et Boltzmann ont montré l'analogie qui existe entre le mouvement des systèmes monocycliques et celui de la chaleur; l'auteur compare avec Thomson et Rankine la Thermodynamique à l'étude du mouvement des tourbillons élémentaires. Dans ce mouvement, la force centrifuge équivaut à une pression p; si v est le volume spécifique, T le carré de la vitesse tangentielle et R une constante, il existe une relation de la forme $pv = \mathrm{RT}$. Le passage de l'énergie d'un tourbillon à un autre voisin de vitesse différente est analogue à la transmission de la chaleur et satisfait à des formules dans lesquelles les chaleurs spécifiques c_v et c_p auraient les valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{12}$.

Francke (*Adolf*). — Arcs dont les appuis sont reliés d'une manière élastique. (15-28).

Les formules habituelles relatives aux déformations élastiques des arcs métalliques sont établies en supposant que leurs extrémités sont des rotules fixes; lorsque ces rotules sont reliées par une tige extensible, les formules doivent être modifiées, mais tout se passe, à des termes négligeables près, comme dans le cas où les extrémités sont fixes, à la condition d'introduire à la clef une tension supplémentaire fictive. L'auteur examine le cas d'un arc circulaire simple, et celui de l'ensemble de deux arcs articulés en ogive.

Dolezal (*Eduard*). — Les problèmes des cinq et des trois rayons en Photogrammétrie. (29-85).

En Géodésie, on utilise les clichés photographiques pour déterminer la position réelle dans l'espace des points dont on a l'image sur la plaque; on les rapporte pour cela à certains points de repère dont on connaît à l'avance les coor

données géographiques et l'altitude. Il faut rapporter d'abord à ces points de repère le point de vue d'où est prise la projection photographique, puis le plan du tableau et la ligne d'horizon.

La détermination de ces inconnues fondamentales peut se faire de deux manières :

1° On connaît cinq points de repère et leurs coordonnées géographiques et l'on mesure sur le cliché la distance horizontale de leurs images;

2° On connaît trois points de repère et leurs coordonnées géographiques; on mesure dans l'espace leurs azimuts relatifs et sur le cliché la distance horizontale de leurs images.

Dans l'un et l'autre cas, on détermine alors d'une manière unique le point de vue, l'orientation du plan du tableau et la projection du point de vue sur ce plan; la connaissance des altitudes des points de repère fournit ensuite la position la plus probable de la ligne d'horizon.

Lorsque le nombre des points de repère connus est plus élevé, on utilise la méthode des moindres carrés pour trouver la solution la plus probable et les erreurs correspondantes; l'auteur indique une marche simple de calculs et donne des exemples numériques.

Skutsch (*Rudolf*). — Sur les balances à équations. (85-104).

Rappel de la balance hydrostatique de Meslin (*Journal de Physique*, 1900), pour résoudre les équations algébriques, puis des balances de Massau et de Grant, formées de $n+1$ leviers du premier genre successifs agissant chacun sur le suivant; le rapport x des bras des leviers est le même pour tous et on le fait varier jusqu'à obtenir l'équilibre. Étude d'une balance formée encore par des leviers successifs, dont les bras sont constants en grandeur, mais dont les centres d'oscillations et les inclinaisons relatives sont variables et fournissent la valeur de l'inconnue.

Heun (*Karl*). — Étude du viriel et du moment d'un système stationnaire de forces dans le mouvement d'un corps solide. (104-125).

Möbius, Minding, Darboux, etc. ont étudié les systèmes de forces dont les vecteurs représentatifs restent constants en grandeur et direction tandis que leurs points d'application varient. Si f est le vecteur représentatif d'une force et si x est le vecteur allant de l'origine à son point d'application, la somme des produits intérieurs des vecteurs x et f est le viriel du système; la somme de leurs produits extérieurs est le moment de ce système.

L'auteur applique les procédés du calcul vectoriel à l'étude de la variation du viriel et du moment lorsque les points d'application des forces appartiennent à un solide animé d'une translation, d'une rotation ou d'un mouvement héliçoïdal; il retrouve d'une manière simple et élégante les résultats connus depuis Möbius sur l'équilibre astatique, sur les droites qui sont axes d'équilibre pour les rotations, sur les rotations qui amènent le système en équilibre et il les généralise.

Rudio (*Ferdinand*). — Sur la cubature du paraboloïde de révolution. (126-127).

Évaluation du volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe, en fonction des aires de deux sections circulaires quelconques.

Burmester (*L.*). — Théorie cinématique géométrique du mouvement dans le plan ou dans l'espace des systèmes déformables d'après la loi de l'affinité ou la loi de similitude, ainsi que des systèmes indéformables. (128-156).

Suite d'un article de cette Revue, Tome XXIII, 1878, page 108.

Toute déformation par affinité, c'est-à-dire toute transformation homographique laissant invariable le plan de l'infini, comprend comme cas particulier la déformation par similitude et le mouvement des corps solides. Si par chaque point du système déformé on mène le vecteur vitesse, les extrémités des vecteurs ainsi tracés forment un système transformé du premier par affinité; les points du système donné et les plans perpendiculaires aux vitesses de ces points forment un système nul ou focal de Möbius.

A un instant donné, les droites qui se déplacent sans déformation sont les génératrices d'un cône du deuxième ordre et les droites parallèles à ces génératrices; en particulier, celles de ces droites qui sont animées d'une rotation autour d'un axe qui leur est normal forment une congruence de quatrième ordre et de deuxième classe. Dans chaque déformation infiniment petite, existent deux systèmes de plans parallèles tels que les points contenus dans un de ces plans subissent une transformation par similitude.

Application aux dilatations des cristaux et aux déformations des hyperboloïdes ou paraboloïdes articulés.

Krüger (*L.*). — Sur la compensation des polygones et des chaînes de triangles géodésiques et sur la formule internationale d'approximation pour l'erreur angulaire moyenne. (157-196).

L'Association géodésique internationale, dans sa réunion de Nice en 1887, a adopté une formule de Ferrero pour la valeur approchée de l'erreur moyenne des mesures angulaires; cette formule ne s'applique qu'à une chaîne simple de triangles; l'auteur en donne une autre plus exacte pour les autres cas, en particulier pour les systèmes centraux, et indique dans quels cas la formule de Ferrero est encore applicable.

Rodenberg (*C.*). — Sur la courbe d'intersection de deux tores égaux et sa décomposition en cercles. Sur les points d'intersection d'une ellipse et d'une conique ayant mêmes directions d'axes. (196-200).

Si deux tores égaux ont même plan d'équateur, leur intersection se compose d'une courbe du quatrième ordre et d'une courbe sphérique projetées sur le

plan de l'équateur suivant une droite et une ellipse; la deuxième courbe se décompose en deux cercles si les tores sont bitangents.

Zermelo (*E.*). — Recherches hydrodynamiques relatives aux mouvements tourbillonnaires sur une surface sphérique. (201-237).

Établissement des équations du mouvement d'un fluide mobile sans frottement sur une surface, en coordonnées curvilignes u, v orthogonales. Dans le cas d'un liquide homogène incompressible, la répartition des vitesses est déterminée par la valeur de la fonction de courant $\psi(u, v)$; cette fonction est discontinue pour les sources positives ou négatives; on suppose ici qu'il n'en existe pas.

Si ds^2 est égal à $U^{-2}du^2 + V^{-2}dv^2$, l'intensité ρ du tourbillon en chaque point est donnée par l'équation

$$(\alpha) \qquad 2\rho = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right],$$

et inversement la recherche des vitesses lorsqu'on donne les tourbillons dépend de l'intégration de l'équation précédente où ψ est l'inconnue; les points de discontinuité peuvent remplir des lignes ou coupures telles que la vitesse varie brusquement d'un bord à l'autre, ou bien ils peuvent être isolés; ce sont alors des centres tourbillonnaires (*strudel*) autour desquels le liquide tourne avec une vitesse d'autant plus grande qu'il en est plus rapproché; la circulation le long d'un contour infiniment petit entourant un tel point reste finie.

L'auteur applique ces considérations au mouvement sur la sphère en prenant soit les coordonnées polaires sphériques θ, ω autour d'un pôle O, soit les coordonnées cartésiennes x, y de la projection stéréographique faite du pôle opposé O'. Le cas le plus simple est celui où l'intensité de tourbillon ρ a une valeur constante $-\frac{m}{4\pi}$ et où la vitesse ne dépend que de θ; la fonction ψ est alors égale à $\frac{m}{\pi}\log\sin\frac{\theta}{2}$ et le pôle O est un centre tourbillonnaire de moment m. Plus généralement, si n points P_1, P_2, ..., P_n sont des centres tourbillonnaires de moments m_1, m_2, ... et si les distances polaires d'un point P à ces points sont θ_1, θ_2, ..., la fonction

$$\psi = \sum \frac{m_i}{\pi}\log\sin\frac{\theta_i}{2},$$

que l'on peut appeler *potentiel sphérique* des masses m_i, est une fonction de courant, l'intensité de tourbillon étant $-\frac{\Sigma m_i}{4\pi}$. La notion de potentiel sphérique s'étend au cas d'une répartition continue de masses sur la sphère et elle fournit, à une constante près, une solution de l'équation (α).

Pour les courants stationnaires, ρ est une fonction de ψ; si $\rho = k\psi$, la solution du problème dépend de fonctions sphériques; si ψ ne dépend que de θ, on a à intégrer l'équation

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\psi}{d\theta} - 2k\psi = 0;$$

elle n'a de solution continue que si $2k = -n(n+1)$, n étant entier, et cette solution s'exprime par les polynomes de Legendre.

Klein (*F.*). — Sur la théorie de la vis de Sir Robert Ball. (237-265).

L'auteur complète analytiquement la théorie de Ball au point de vue de la théorie moderne des groupes de transformation de l'espace et il la rattache à la géométrie réglée. Les six coordonnées p, q, r, u, v, w de la vitesse instantanée d'un corps solide et les six coordonnées X, Y, Z, L, M, N d'un système de forces subissent les mêmes transformations par le groupe des mouvements et les homothéties directes, mais subissent des transformations de signes contraires par les symétries.

La théorie de la vis est celle des substitutions de l'espace réglé laissant invariables les équations $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ et $pu - qv - rw = 0$.

Timerding (*H.-E.*). — La théorie de la valeur d'après Bernoulli. (321-354).

Buffon et Bernoulli ont, indépendamment l'un de l'autre, énoncé ce principe que la valeur relative d'un gain ou d'une perte est en raison inverse de la fortune du joueur. L'auteur discute ce principe, simplifie les démonstrations des théorèmes qu'en a déduits Laplace, cherche les propriétés générales d'une fonction du revenu que l'on pourrait substituer à celle de Bernoulli et en fait l'application à l'établissement de l'impôt sur le revenu.

Bobylew (*D.*) et *Friesendorf* (*Th.*). — Sur le roulement périmétrique de la toupie dont le centre de gravité est au-dessous du point de suspension. (354-367).

Un corps de révolution en forme de cloche repose sur une pointe fixe; il est surmonté d'une tige cylindrique dirigée suivant l'axe de révolution et cette tige s'appuie avec frottement sur une courbe sphérique dont tous les points sont à une distance constante du centre de suspension. Dans quelles conditions doit-on lancer la toupie ainsi constituée pour que la tige roule sans glisser sur le périmètre de la courbe? Les auteurs résolvent le problème lorsque la courbe est un cercle, puis lorsqu'elle est quelconque.

Kübler (*J.*). — Encore une fois la véritable formule du flambement. (367-374).

Complément à l'explication donnée Tome XLVI, page 367.

Schuh (*Fred.*). — La courbe de vision. (375-399).

Supposons les deux yeux accommodés pour la vision nette d'un point de l'espace; les autres points perçus nettement sont ceux qui envoient des rayons frappant les rétines en des points correspondants; ils forment une cubique tracée sur un cylindre circulaire, cubique appelée *horoptercurve* par l'auteur.

Horn (*J.*). — Sur la théorie des petites oscillations finies d'un système à un degré de liberté. (400-428).

Suivant une idée de Routh, il faut considérer la solution donnée habituellement comme le premier terme d'un développement en série et étudier la convergence de cette série, ainsi que la stabilité du mouvement; les méthodes de Poincaré indiquent la marche à suivre.

On ne considère ici que le cas d'un degré de liberté, les liaisons étant indépendantes du temps. Si les forces ne dépendent pas de la vitesse, l'équation du mouvement se ramène à la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots;$$

en supposant la vitesse initiale nulle et l'amplitude initiale égale à une valeur c suffisamment petite, le mouvement est périodique et la durée ω de la demi-oscillation est une série convergente de puissances de c; la valeur de x est aussi une série de la forme

$$\sum \varphi_\lambda(t) c^\lambda,$$

$\varphi_\lambda(t)$ étant une fonction périodique s'exprimant au moyen de $\cos\frac{\pi t}{\omega}$, $\cos\frac{2\pi t}{\omega}$, ..., $\cos\frac{\lambda\pi t}{\omega}$.

Si les forces dépendent de la vitesse, le mouvement étant amorti, l'équation se ramène à la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \varkappa^2 x = \alpha x^2 + 2\beta x x' + \gamma x'^2 + \ldots,$$

où λ et $\varkappa$ sont positifs. Les trois cas $\lambda < \varkappa$, $\lambda > \varkappa$, $\lambda = \varkappa$ donnent lieu à des calculs analogues aux précédents et la solution classique de l'équation sans second membre constitue une approximation de la solution réelle; mais il n'en est plus de même si λ est nul et les résultats varient suivant la forme du second membre. Au moyen des coefficients qu'il renferme, on calcule une suite indéfinie de nombres; s'ils sont tous nuls, le mouvement est périodique; si le premier de ceux qui ne sont pas nuls est négatif, le mouvement est stable et amorti; s'il est au contraire positif, le mouvement est instable pour des valeurs croissantes du temps.

Fischer (*O.*). — Sur les systèmes réduits et les points principaux des membres d'un mécanisme articulé et leur signification pour la Mécanique technique. (429-466).

Exposition de la méthode employée pour l'étude des mouvements des membres du corps humain et application aux systèmes articulés de la Mécanique. Si l'on a dans un plan n barres C_1, C_2, ... de masses m_1, m_2, ..., de centres de masses g_1, g_2, ..., articulées successivement l'une à l'autre aux points a_{12}, a_{23}, ..., on appelle *système réduit* relatif à C_i le système de trois masses, l'une m_i appliquée en g_i, l'autre $m_1 + m_2 + \ldots + m_{i-1}$ appliquée en $a_{i-1,i}$ et la

troisième $m_{i+1} + m_{i+2} + \ldots$ appliquée en $a_{i,i+1}$: le centre h_i de ces trois masses est le point principal correspondant à C_i.

La connaissance des points principaux permet de construire géométriquement le centre de masse du système total, d'étudier ses déplacements et d'évaluer la force vive totale; on peut ainsi simplifier les calculs de Lorenz (Tomes XLIV et XLV) sur les forces d'inertie des bielles et manivelles.

Unger (*O.*). — Sur un principe de construction et son application à la construction de l'ombre d'une surface de révolution. (467-479).

On donne en descriptive une surface de révolution à axe vertical; à l'aide de la projection verticale seule, on peut effectuer la construction de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface parallèle à une direction donnée; application à l'ombre au soleil.

Mayr (*Robert*). — Sur les corps de symétrie cinétique. (479-488).

Recherche des corps homogènes dont l'ellipsoïde central d'inertie est une sphère. En choisissant des coordonnées polaires dont l'origine est le centre de masse, la cinquième puissance du rayon vecteur de la surface limitant le volume est une somme de fonctions sphériques particulières des angles polaires θ et ψ; elles s'expriment par des polynomes de Legendre dont l'indice est pair et au moins égal à 4. L'auteur généralise les résultats de Legendre et construit les surfaces les plus simples données par ses formules.

Tome XLVIII; 1903.

Gans (*Richard*). — Sur l'induction dans les conducteurs tournants. (1-28).

Un conducteur ayant la forme d'un corps de révolution se meut autour de son axe, avec une vitesse de rotation uniforme, dans un champ magnétique donné; en partant de l'extension donnée par Hertz aux équations de Maxwell, l'auteur détermine le champ électromagnétique produit, les courants étant supposés stationnaires et la vitesse des points du corps étant très petite en comparaison de la vitesse de la lumière.

Les points de l'espace sont rapportés à un système de coordonnées orthogonales p, q, φ pour lequel les méridiens de la surface et leurs trajectoires orthogonales sont des lignes coordonnées; d'après les recherches de Riemann et de Weber, le potentiel V peut être développé en une série dont les termes sont des produits de fonctions de p seul, de q seul et de $\sin\nu\varphi$ ou $\cos\nu\varphi$. L'auteur considère le cas traité par Hertz d'une sphère homogène; en se donnant le potentiel magnétique développé suivant des fonctions sphériques, il trouve des développements analogues pour le potentiel V et pour les vecteurs du champ électromagnétique; dans le cas d'un ellipsoïde de revolution, les termes des développements en série sont les produits de fonctions sphériques par des polynomes

hypergéométriques. Lorsque le champ statique est constant et perpendiculaire à l'axe, la solution s'exprime sous forme finie.

Radacović (*M.*). — Sur le mouvement d'un moteur en ayant égard à l'élasticité du bâti. (28-39).

Sommerfeld et Wirtinger ont étudié les trépidations du bâti d'un moteur lorsque leur période est égale à celle de la rotation de ce moteur. L'auteur examine le cas simple d'une manivelle dont l'axe subit des tensions élastiques et il cherche dans quelles conditions peut se produire un état stationnaire.

Matthiessen (*Ludwig*). — Sur les infinies variétés des positions des points cardinaux dioptriques de lentilles et de systèmes de lentilles dans le cas de l'incidence oblique. (39-49).

Les points fondamentaux de Gauss : points cardinaux, foyers, nœuds peuvent être remplacés d'une infinité de manières par d'autres jouant le même rôle et donnant lieu à des relations de même forme entre les abscisses des points conjugués.

Grünwald (*A.*). — Les systèmes linéaires de vis de Sir Robert S. Ball. (49-108).

Exposé didactique des théories de Ball, en prenant comme bases les coordonnées barycentriques de Möbius et le calcul vectoriel de Grassmann et rattachant ces théories à celles de la géométrie réglée.

Une vis, réunion de deux vecteurs ou d'un vecteur et d'un couple, a un paramètre, celui du complexe linéaire qui lui est lié; elle est une combinaison linéaire de six vis fondamentales, affectées de coefficients qui sont les coordonnées de la vis considérée. Le produit de deux vis est la somme des moments mutuels de leurs vecteurs; s'il est nul, les vis sont réciproques ou en involution : leurs paramètres, la distance de leurs axes et l'angle de ceux-ci sont liés par la relation $p + p' = e \tang \varphi$.

A tout système linéaire de vis de rang n, dépendant de n coordonnées indépendantes, en correspond un autre de rang $6 - n$, réciproque du premier; l'étude des systèmes réciproques est analogue à celle des coniques harmoniquement inscrites ou circonscrites.

L'ossature (*gerippe*) d'un système est l'ensemble des vis de ce système réduites à un seul vecteur; les ossatures de deux systèmes réciproques sont réciproques, chaque droite de l'une rencontrant toutes celles de l'autre.

L'auteur passe en revue tous les systèmes réciproques, il étudie en détail les axes du système de rang 2 et leur lieu qui est le cylindroïde, ceux du système réciproque de rang 4, qui forment un complexe quadratique, enfin ceux du système de rang 3 dans les cas particuliers et dans le cas général; ces axes se répartissent sur une infinité d'hyperboloïdes et forment une congruence de troisième ordre et deuxième classe étudiée par Waelsch (*Wiener Berichte*, 1895), celle des perpendiculaires communes aux génératrices d'un système réglé du second ordre.

Jung (*F.*). — Méthode géométrique pour la compensation des masses dans les machines marines à quatre bielles. (108-125).

Retrouve, par des procédés géométriques, les résultats de Schubert et de Lorenz (*voir* cette Revue, t. XLV); les directions des manivelles doivent faire partie d'un paraboloïde hyperbolique.

Heimann (*H.*). — La résistance d'une plaque plane dans le cas d'une charge normale constante. (126-134).

Solution des équations de Clebsch dans le cas d'une plaque circulaire, quelle que soit la fixation des bords, puis dans le cas d'une plaque elliptique avec encastrement des bords, enfin dans le cas d'une plaque rectangulaire dans le cas où les appuis sont élastiquement déformables.

Francke (*A.*). — Détermination graphique des forces dans un arc circulaire avec ou sans rotules aux naissances. (193-200).

— L'arc articulé avec rotule à la clef et avec moment d'inertie variable d'une manière discontinue. (201-208).

Applications du polygone funiculaire à la détermination de la flexion d'un arc chargé, les naissances étant à rotule ou encastrées.

Müller (*R.*). — Sur la théorie des courbes doubles liées au mouvement de la bielle. Courbure de ces courbes aux points de contact sextuple avec la tangente. (208-219).

Suite de l'article du Tome XLVI de cette Revue. Si un point de la bielle décrit une courbe ayant, avec une de ses tangentes, un contact d'ordre $n-1$, le rapport $\frac{dx}{ds^{n-1}}$, appelé par Mehmke *courbure d'ordre* $n-1$, renseigne sur la manière dont la courbe se confond avec sa tangente. La recherche de cette courbure se rattache à la considération des pôles d'inflexion d'ordre successif. Application au cas de $n=6$.

Müller (*R.*). — Sur la théorie du déplacement instantané d'un système plan invariable. Une propriété des points de Burmester. (220-223).

Suite des articles parus dans cette Revue, t. XXXVII et XLII, sur les points dont la trajectoire a un contact du quatrième ou du cinquième ordre avec le cercle de courbure; application au quadrilatère articulé.

Müller (*R.*). — Sur quelques courbes se rattachant à la théorie du quadrilatère articulé plan. (224-248).

Reproduction partielle d'un article publié pour l'anniversaire de Dedekind (1901). Étude :

1° De la courbe des pôles, lieu des points du plan de la bielle dont la trajectoire a un point de rebroussement; ce lieu est du huitième ordre, avec rebroussement aux points cycliques;

2° De la courbe d'ondulation, lieu des points de Ball, dont la trajectoire a un point d'ondulation, ou nœud inflexionnel; dans le cas particulier où les côtés du quadrilatère sont égaux deux à deux, cette courbe se déduit de la première par une transformation conforme d'équation

$$z' = az^2 \quad \text{ou} \quad z' = az + bz^{-1};$$

3° De la courbe de passage, lieu des points dont la trajectoire a un point de propre contact ou tacnodal; ce lieu est du dixième ordre.

Vieth (*J.-V.*). — Sur le mouvement central. (249-265).

Étude du mouvement d'un mobile décrivant la courbe $r^n = \frac{p^n}{1 + e \cos n\varphi}$ sous l'action d'une force centrale.

Kann (*Léopold*). — Sur la résolution mécanique des équations. (266-272).

Un courant passe dans des fils de résistances différentes, sur des longueurs variables avec la grandeur de l'inconnue.

Föppl (*A.*). — Solution du problème de la toupie à l'aide du calcul vectoriel. (272-284).

En prenant comme point de départ le théorème des moments des quantités de mouvement, on obtient une équation vectorielle dont l'inconnue est la composante, suivant l'axe de la toupie, de la rotation instantanée.

Roth (*Paul*). — Les théories de la résistance et les formules qui en découlent pour la construction des machines. (285-316).

Étude comparative des diverses théories, en particulier de celle de Duguet et de celle de Mohr et exposé de cette dernière. Connaissant les directions principales des efforts autour d'un point, on peut déterminer graphiquement le plus grand effort de glissement tangentiel, et c'est en maintenant ce dernier dans les limites voulues que l'on calcule les pièces de machines. Comparaison des résultats obtenus de cette manière avec les résultats habituellement employés soit dans le cas d'efforts statiques, soit dans le cas d'efforts répétés comme les ont étudiés Wöhler et Bauschinger.

Grassmann (*Hermann*). — La rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'est soumis à aucune force. (329-376).

Exposé de la théorie classique de Poinsot; description d'appareils cinéma-

tiques construits par Martin Schilling; discussion de la position respective et de la concavité des cônes roulant l'un sur l'autre.

Francke (*Adolf*). — Poutres paraboliques continues. (377-393).

Le théorème des trois moments s'applique encore aux travées courbes, en supposant que deux arcs successifs soient liés invariablement l'un à l'autre. En partant des formules établies dans le cas d'arcs circulaires surbaissés, d'équation $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, l'auteur néglige y^2 et parvient ainsi au cas d'arcs paraboliques dont il donne plusieurs exemples.

Gans (*Richard*). — Sur l'intégration numérique d'équations aux dérivées partielles. (394-399).

Extension de la méthode de Runge (*Math. Ann.*, t. XLVI, 1895). Soit une équation $q = f(x, y, z, p)$ dont on cherche une solution qui, pour $y = y_0$, se réduit à une fonction donnée $z_0(x)$; on calcule une valeur approchée de Δz, développée suivant les puissances croissantes de Δy, les coefficients étant fonctions de x; les méthodes de Simpson appliquées entre o et Δy fournissent une solution approchée jusqu'au terme Δy^3 inclusivement.

Horn (*J.*). — Complément à la théorie des petites oscillations. (400-434).

Suite d'un article, Tome XLVII de cette Revue, où étaient étudiées les petites oscillations d'un système à un degré de liberté. L'auteur examine ici le cas où il y a plusieurs degrés de liberté; il se limite à la recherche des petites oscillations périodiques d'un système à liaisons indépendantes du temps, quand il existe une fonction des forces et que les équations de Lagrange sont applicables. Ces oscillations ont été étudiées par Painlevé (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV); mais, pour éviter une objection, l'auteur reprend ici la question dès le début.

Les n équations de Lagrange se ramènent à $m = 2n$ équations du premier ordre de la forme

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = a_{\alpha 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha m} x_m + \text{des termes d'ordre} \geqq 2;$$

pour qu'une solution soit périodique, il est nécessaire que l'équation en S caractéristique relative au système $a_{\alpha\beta}$ ait une racine imaginaire de la forme λi.

Supposons alors, en faisant au besoin une transformation de variables, que l'équation caractéristique ait un couple de racines simples, égales à $\pm i$, et qu'elle n'ait aucune racine nulle ni multiple entier de $+i$ ou $-i$; on peut ramener le système à la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \ldots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \ldots,$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = a_{\alpha 3} x_3 + \ldots + a_{\alpha m} x_m + \ldots \qquad (\alpha \geqq 3);$$

en général, il n'existe pas de solution périodique, mais il est un cas où l'on peut affirmer l'existence d'une telle solution, c'est celui où l'on connaît une intégrale première de la forme $\Phi(x_1, x_2, \ldots) = \text{const.}$, Φ renfermant parmi les termes de degré le moins élevé un terme en x_1 seul. Pour cette solution périodique, on peut se donner arbitrairement, entre certaines limites, la valeur initiale c de x_1, les autres données initiales doivent être déterminées en fonction de c; la période T diffère peu de 2π et a pour valeur

$$2\pi + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \ldots;$$

enfin, en posant $u = \frac{2\pi t}{T}$, la solution périodique se met sous la forme

$$x_\alpha = c\,\psi_{\alpha 1}(u) + c^2\,\psi_{\alpha 2}(u) + \ldots$$

avec

$$\psi_{11} = \cos u, \qquad \psi_{21} = -\sin u, \qquad \psi_{31} = \psi_{41} = \ldots = 0,$$

$$\psi_{\alpha\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} A_{\alpha\nu}^{\mu} \cos \mu u - \sum_{\mu=1}^{\nu} B_{\alpha\nu}^{\mu} \sin \mu u.$$

Ces résultats s'appliquent aux équations de Lagrange sans qu'il soit nécessaire de les ramener à la forme canonique précédente. Soient

$$T = \frac{1}{2} \sum x'_\alpha x'_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} x_1 + \ldots),$$

$$U = \frac{1}{2} \sum x_\alpha x_\beta b_{\alpha\beta} + \ldots;$$

si l'équation caractéristique $|a_{\alpha\beta} s - b_{\alpha\beta}| = 0$ n'a que des racines négatives $s_i = -\lambda_i^2$, la position dont les coordonnées sont nulles est d'équilibre stable; si les nombres λ ne sont pas nuls et si leurs rapports sont irrationnels, on peut trouver n familles de mouvements périodiques. A chaque nombre λ_i correspond une famille de mouvement dépendant d'une constante arbitraire c_i, la période étant voisine de $\frac{2\pi}{\lambda_i}$. Si les nombres λ_i ne sont pas incommensurables, on ne peut affirmer qu'il n'existe pas d'autre solution périodique que les précédentes.

L'auteur applique ces considérations au cas d'un cylindre horizontal pesant roulant sans glisser sur une surface cylindrique, au cas d'un point pesant mobile sur une surface près d'un point où le plan tangent est horizontal, enfin au cas d'une cloche et de son battant.

Runge (C.). — Sur la composition et la décomposition de rotations par une méthode graphique. (435-442).

Une rotation d'un système est déterminée dès qu'on donne l'arc décrit par un point M du système. Si l'on fait une projection stéréographique d'une sphère ayant son centre sur l'axe de rotation, on peut choisir pour M le point qui décrit un arc de cercle dont le plan passe par le point de vue; sa trajectoire est projetée suivant une droite; toute rotation est ainsi déterminée par un segment rectiligne; on peut remplacer un segment par un autre pris sur la même droite que le premier et vu sous le même angle du pôle de projection.

Deux mouvements de rotation se composent en faisant la somme géométrique

des segments représentatifs, pris à partir du point commun aux droites qui les portent.

Runge (*C.*). — Sur la décomposition en sinusoïdes de fonctions périodiques données empiriquement. (443-456).

Améliorations apportées à la méthode connue et à la disposition des calculs.

Dietrichkeit (*O.*). — Tables de logarithmes à nombre supérieur de décimales. (457-461).

Schmid (*Theodor*). — Sur un modèle cinématique. (462-465).

Exposé d'un appareil imaginé par Markus Kriss pour la description continue des ellipses et des trochoïdes algébriques.

Meisel (*Ferdinand*). — Sur la théorie de l'expérience du pendule de Foucault. (465-470).

Recherche élémentaire des variations finies du plan d'oscillation du pendule, en supposant qu'il reste toujours parallèle à la tangente au point le plus bas de la première oscillation, tangente dirigée suivant la méridienne du lieu. Si β est la latitude, t le temps en arcs, x la déviation apparente du plan d'oscillation, on a

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin t \sin\beta}{\sin^2\beta \cos t + \cos^2\beta}.$$

Heimann (*H.*). — Un exemple pour le théorème du minimum du travail résistant. (471-472).

Klingatsch (*A.*). — La détermination du point le plus favorable pour le recoupement en arrière. (473-487).

Une transformation faite de l'un des points connus comme pôle permet de ramener l'un à l'autre le recoupement en avant et le recoupement en arrière; il suffit de considérer le deuxième. A une erreur moyenne sur les angles mesurés correspond une erreur sur le point inconnu; les points du plan pour lesquels ces erreurs ont des valeurs données sont situés sur une courbe du quatrième ordre qui permet de résoudre graphiquement la question.

Schilling (*Fr.*). — Sur le théorème de Pohlke. (407-494).

Nouvelle démonstration et construction relative à ce théorème :

Trois vecteurs concourants dans un même plan sont les projections de trois vecteurs égaux formant dans l'espace un trièdre trirectangle.

H. V.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série. Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, éditeur (1).

Tome XXVI; 1893.

Sayno (A.). — [T2b]. Sur certaines formules réduites pour le calcul des arcs circulaires métalliques. Première Partie : arcs enchâssés. (143-155).

Pannelli (M.). — [P4g ref. M³ 1a]. Sur la réduction des singularités d'une courbe gauche. (216-222).

On peut toujours, par des transformations cubiques birationnelles de l'espace, réduire une courbe gauche quelconque à une autre n'ayant que des points multiples *ordinaires*, c'est-à-dire dont les tangentes soient distinctes, et le plan osculateur d'une branche n'y soit pas tangent à une autre branche.

Sayno (A.). — [T2b]. Sur certaines formules réduites pour le calcul des arcs circulaires métalliques. Deuxième Partie : arcs à un ou à deux centres, armés de tirants. (266-276).

Formenti (C.). — [C1]. Sur une classe de fonctions dérivées. I (330-343), II (382-389), III (482-491).

L'auteur prend pour définir la *dérivée* $\delta\varphi(x)$ d'une fonction $\varphi(x)$ les propriétés caractéristiques suivantes :

$$\delta(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)=\delta\varphi_1+\delta\varphi_2+\ldots+\delta\varphi_n,$$
$$\delta_x\varphi(x+y)=\delta_y\varphi(x+y),$$
$$\delta A = 0,$$

A étant une constante. Cela ne caractérise pas les seules dérivées ordinaires; mais constitue une définition plus générale, qui donne, par exemple, comme dérivée d'un polynome $\varphi(x)$ l'expression

$$\delta\varphi(x)=\mu_1\varphi'(x)+\mu_2\varphi''(x)+\ldots+\mu_n\varphi^{n}(x),$$

combinaison linéaire des dérivées ordinaires, aussi bien que l'expression

$$\delta\varphi(x)=M_1\Delta\varphi+M_2\Delta_2\varphi+\ldots+M_n\Delta_n\varphi,$$

combinaison linéaire des différences.

Étant $d\varphi$ une dérivée (dans le sens général) de φ et si l'on a

$$\delta\varphi=\mu_1 d\varphi+\mu_2 d_2\varphi+\ldots+\mu_n d_n\varphi,$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVIII, p. 5.

la fonction

$$\mu(\varepsilon) = \sum_1^n \mu_r \varepsilon^r = \mu_n \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)\ldots(\varepsilon - \varepsilon_{n-1})$$

est appelée la *dérivatrice* relative à la dérivée fondamentale $d\varphi$ et l'on a symboliquement

$$\delta\varphi = \mu(d\varphi).$$

La dérivatrice peut aussi être une série. Le théorème de Taylor prend une forme plus générale, où interviennent dans les coefficients des polynomes dont l'auteur trouve diverses expressions et par lesquels on peut aussi exprimer les puissances de la variable. Enfin l'auteur trouve des relations entre les dérivées que l'on obtient suivant diverses définitions. Par exemple, si

$$\delta f(x) = \mu(f'),$$

μ étant la fonction dérivatrice et la dérivée fondamentale étant la dérivée ordinaire, on aura

$$f'(x) = \lambda(\delta f),$$

λ étant une autre dérivatrice pour laquelle il est

$$\lambda[\mu(\varepsilon)] = \varepsilon - \varepsilon^{n+1} f(\varepsilon).$$

Dans la deuxième Note, on trouve

$$y = e^{\varepsilon_r x}(p_0 + p_1 x + \ldots + p_r x^r) + A_{r+1} e^{\varepsilon_{r+1} x} + \ldots + A_{n-1} e^{\varepsilon_{n-1} x}$$

comme expression générale des fonctions qui ont nulle la dérivée δ; ayant supposé que r des racines $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ soient égales entre elles. Puis l'auteur résout le problème plus général de trouver les fonctions qui ont une dérivée donnée, la dérivée fondamentale étant l'ordinaire.

Dans la troisième Note, il traite la même question en supposant que la dérivée fondamentale soit la différence, et puis d'autres questions qui le conduisent à une expression remarquable de la dérivée ordinaire d'ordre r de $\dfrac{1}{\varphi(x)}$, et à une expression des nombres de Bernoulli. Citons ici la formule

$$\frac{d^r \frac{1}{\varphi}}{dx^r} = \frac{(-1)^r}{\varphi^{r+1}} \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi'' & 2\varphi' & \varphi & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ \varphi^{(r)} & r\varphi^{(r-1)} & \binom{r}{2}\varphi^{(r-2)} & \ldots & r\varphi' \end{vmatrix}.$$

Bardelli (G.). — [R7c]. Sur un problème de Dynamique de G. Saladini généralisé par A. Serret. (344-348).

Bardelli (G.). — [R7c]. Appendice à la Note précédente. (379-381).

Déterminer une courbe (dans un plan vertical) qui ait la propriété que les

temps employés par un point pesant à en parcourir un arc quelconque aient un rapport constant au temps employé à parcourir la corde correspondante. Serret (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, p. 28) a démontré que ce problème peut toujours se réduire aux quadratures. L'auteur résout complètement le problème en donnant l'équation de la courbe en coordonnées polaires

$$(1) \qquad r = \left(a\mu^{\frac{1}{1-m^2}} - b\mu^{\frac{1}{m^2-1}}\right)\cos^{\frac{m^2}{m^2-1}}\theta,$$

étant m le rapport donné,

$$\lambda = \sqrt{m^2 - \cos^2\theta},$$

$$\mu = \frac{1}{m^m \cos^m\theta}\,\frac{(m\sin\theta - \lambda)^m}{\sin\theta + \lambda},$$

et a, b des constantes arbitraires. Pour $m = 1$, l'équation se réduit à celle d'une lemniscate dont l'axe fait 45° avec la verticale et qui correspond au problème déjà posé et résolu par Saladini.

Mais la forme (1) de l'intégrale générale est erronée et, dans l'appendice, elle est remplacée par la suivante

$$\left(r\cos^{\frac{m^2}{m^2-1}}\theta.\mu^{\frac{1}{m^2-1}} - a\right)\left(r\cos^{\frac{m^2}{m^2-1}}\theta.\mu^{\frac{1}{1-m^2}} - a\right) = 0.$$

qui n'a qu'une constante arbitraire.

Une généralisation analogue à celle que Serret a faite du problème de Saladini peut se faire pour le cas d'un point attiré par un centre fixe en raison directe de la distance, et elle conduit à la même équation.

Formenti (*C.*). — [R7*d*]. Sur un mouvement brachistochrone particulier. (355-359).

Si la vitesse est représentée en grandeur et direction par une fonction d'une variable complexe $z = x + iy$, c'est-à-dire si, étant v la grandeur de la vitesse et ω l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, on a

$$ve^{\omega i} = V(z),$$

le mouvement est brachistochrone.

Maggi (*G.-A.*). — [D2*b* ref. T3*a*]. Sur une série non uniformément convergente. (368-372).

On la rencontre dans l'étude de l'induction d'un point électrique sur deux plans infinis parallèles entre eux. On prend pour axe des x la perpendiculaire aux plans menée par le point donné et pour origine le milieu du segment compris entre les deux plans. Alors la charge $E(u)$ d'un cercle de rayon u situé dans le plan $x = \varpi$ (ϖ = [illegible] Δ, étant Δ la distance des deux plans) et ayant son centre sur l'axe, est

$$E(u) = \sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)\left(1 - \frac{\frac{\varpi}{\Delta}\Delta_i}{\sqrt{\Delta_i^2 + u^2}}\right).$$

où

$$\Delta_i = (2i-1)\varpi + (-1)\,\delta$$

et δ est l'abscisse du point donné.

Pour résoudre le problème, il faut prendre

$$\lim_{u=\infty} \mathrm{E}(u),$$

mais la série n'est pas uniformément convergente par rapport à u dans l'intervalle $(0, \infty)$. L'auteur trouve la somme de la série par une application de la formule

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \int_0^\infty e^{-a\alpha} \mathrm{J}_0(b\alpha)\,d\alpha \qquad (a > 0),$$

et en déduit

$$\lim_{u=\infty} \mathrm{E}(u) = -\frac{\Delta - \frac{\varpi}{\Delta}\delta}{2\Delta}.$$

Jorini (*A.-F.*). — [T2*b*]. Charges fixes équivalant à des trains mobiles donnés. (416-424).

Ciani (*E.*). — [M²3*c*]. Sur les hessiennes des surfaces cubiques. I (498-507), II (523-533), III (557-565).

L'auteur corrige et complète ici les résultats obtenus par lui dans sa Note : *Sulle superficie cubiche la cui hessiana si spezza* (*Rend. des Lincei*, Vol. VI, 1890), résultats qui ne subissent aucune modification lorsque la surface fondamentale n'a pas de points singuliers. Il démontre qu'il n'y a qu'une surface du 4ᵉ ordre, irréductible et douée de courbe multiple, qui puisse être la hessienne d'une surface cubique : c'est la surface qui a une (seule) droite double avec un point triple sur cette droite; elle est la hessienne d'une surface cubique à point double biplanaire. Cette hessienne est étudiée dans la Note II, où commence aussi l'étude des hessiennes dégénérées, qui est achevée dans la Note III. Un tableau à la fin du travail résume tous les cas de dégénération de la hessienne.

Pieri (*M.*). — [N¹2 ref. Q2]. Sur le problème des espaces sécants. (534-546).

La question de trouver le nombre des espaces linéaires de s dimensions renfermés dans un espace de n dimensions et satisfaisant à des conditions données se réduit à la transformation de la condition *composée*

$$(a_0, a_1, \ldots, a_s)(b_0, b_1, \ldots, b_s),$$

produit de deux conditions fondamentales, en une *somme* de conditions fondamentales *simples* de même dimension.

Ici une telle décomposition est faite pour le produit

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)(h, n-s+1, n-s+2, \ldots, n-1, n).$$

c'est-à-dire pour le cas qu'à l'espace [s] soient imposées les conditions d'appartenir à une forme fondamentale donnée et de rencontrer en un point un espace [h] donné.

Montesano (*D.*). — [N²3*a*]. Sur les congruences linéaires de coniques dans l'espace. (589-604).

Une congruence est un système ∞^2 de coniques tel qu'une seule d'entre elles passe par un point donné. L'auteur trouve que ces coniques sont les bases variables des faisceaux dans un réseau de surfaces homaloïdiques, et puis il détermine les caractéristiques élémentaires des coniques du système. Il y a un nombre ∞ de transformations birationnelles et involutives de l'espace qui ont pour courbes unies les coniques de la congruence. Une congruence de coniques peut, sous certaines conditions, être réduite par une transformation birationnelle à une congruence de droites.

De Marchi (*L.*). — [S]. Sur la théorie des cyclons. Note II (624-637).

La Note I est dans le Tome XXV, page 320.

Ferrini (*R.*). — [T7]. Sur un diagramme de von Hefner Alteneck. (724-726).

Brioschi (*F.*). — [F4*b*]. Un théorème dans la division des périodes des fonctions elliptiques. (727-731).

Soient u, u_1, u_2 trois arguments, et

$$\pm u \pm u_1 \pm u_2 = 0;$$

posons

$$x = p(u), \qquad x_1 = p(u_1), \qquad x_2 = p(u_2);$$

on ait, pour un quatrième argument v,

$$\pm v \pm u_1 \pm u_2 = 0,$$

et posons

$$y = p(v);$$

soit aussi

$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 &= -a, \\ x_1 x_2 + x_2 x + x x_1 &= b \\ x x_1 x_2 &= -c, \end{aligned}$$

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x)^2 (x - x_1)^2;$$

on aura

$$Dy = Lx^2 + Mx + N,$$

D, L, M, N étant des fonctions de a, b, c, g_2, g_3.

L'auteur, après avoir démontré ce théorème, en fait l'application à la division des périodes par un nombre premier > 7.

Il y a une Note II dans le Tome XXVII, page 186.

Tome XXVII : 1894.

Brioschi (*F.*). — [F4*b*]. Un théorème dans la division des périodes des fonctions elliptiques. Note II (186-193).

La Note I est dans le Tome précédent, page 727.

Ciani (*E.*). — [M^{2}3*c*]. Sur les surfaces cubiques qui peuvent être regardées comme des parties de la hessienne d'une autre surface cubique. (222-233).

La condition nécessaire et suffisante pour cela est que la surface donnée ait deux points biplanaires, distincts ou coïncidents. La correspondance qui a lieu entre ses points en vertu des propriétés de la hessienne, est comprise en une correspondance quadratique singulière de l'espace (dans laquelle aux plans correspondent des cônes). Réciproquement toute transformation quadratique singulière peut, à moins d'homographies, être interprétée comme une correspondance de cônes polaires sur une des ∞^3 surfaces cubiques à deux points biplanaires, transformées en elles-mêmes par la correspondance.

Pieri (*M.*). — [N^{4}2 ref. Q2]. Sur le problème des espaces sécants. (258-273).

Autre problème analogue à celui de la Note précédente du même auteur, Tome XXVI, page 534. Il y a une Note III dans le Tome XXVIII, page 441.

Jung (*G.*). — [R2*b*]. A propos d'une question de M. Ed. Collignon dans le nouveau périodique : *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Sur le barycentre superficiel). (292-300).

Bardelli (*G.*). — [R2*b*]. Un théorème sur les barycentres généralisé. (326-330).

Beltrami (*E.*). — [R5*a*]. Sur les fonctions complexes. Note III (337-344).

Complément à la Note II (t. XXIV, 1891, p. 1188). Substitution d'une distribution linéaire sur une ellipse à une distribution sur une couronne elliptique, comprise entre deux ellipses homothétiques.

Jorini (*A.-F.*). — [T2*b*]. Renfort des ponts métalliques au moyen d'une poutre centrale. (356-371).

Jung (*G.*). — [R9*a*]. Sur le plan de rupture et sur la poussée

d'un terre-plein contre une paroi plane résistante. (403-413, 1 planche).

Kantor (*S.*). — [P4 ref. Q2]. Sur les caractéristiques des transformations quadratiques dans l'espace de *r* dimensions. (477-485).

Généralisation des transformations quadratiques planes, faite en substituant au couple formé par deux des trois points fondamentaux une variété quadratique de $r-2$ dimensions.

Jung (*G.*). — [R9*a*]. Sur les forces distribuées (le long d'une droite), avec des applications aux transports de terre et à la ligne élastique des poutres droites. (507-522, 1 planche).

Enriquez (*F.*). — [V1*a* ref. P]. Sur les fondements de la Géométrie projective. (550-567).

D'abord l'auteur rappelle les propositions préliminaires de la Géométrie projective sur la détermination des formes de première et de deuxième espèce, puis il donne les notions d'*ordre naturel* et de *disposition circulaire naturelle* sur une forme de première espèce et il en déduit que le quatrième harmonique de A, B, C est distinct de ces éléments. Après, il introduit le postulatum de la continuité et démontre le théorème fondamental (de Staudt). Enfin, il fait quelques observations destinées à établir le principe de dualité.

Kantor (*S.*). — [P4 ref. Q2]. Sur les transformations quadratiques périodiques dans l'espace de *r* dimensions. (712-722), (749-759).

Construction des caractéristiques de ces transformations. Le travail suit au Tome XXVIII, page 249.

Jorini (*A.-F.*). — [T2*b*]. Ponts des chemins de fer avec échafaudage continu. (825-837).

Valentini (*C.*). — [S3]. Sur la manière de déterminer le profil de compensation et son importance dans les arrangements hydrauliques. (852-867, 1 planche).

S. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVIII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXVIII; 1904. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXXVI, CXXXVII. — 64-79.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126. — 20-64, 50-148.

Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere, 2e série. T. XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII. — 5-19, 242-248.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. T. XXIX, XXX, XXXI, XXXII, XXXIII. — 115-205.

The Messenger of Mathematics. T. XXX, XXXI, XXXII. — 149-155, 206-220.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XLVI, XLVII, XLVIII. — 221-241.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
34579 Quai des Grands-Augustins, 55.